

DEVOIR SURVEILLÉ N°2

Sujet donné le samedi 18 octobre 2025, 4h.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**. Les réponses aux questions seront numérotées et séparées par un trait horizontal. Les résultats essentiels devront être encadrés ou soulignés.

BON TRAVAIL

EXCURSION DE 4H DANS LE DEMI-PLAN DE POINCARÉ

On note $\mathbb{P}$ le demi-plan de Poincaré, c'est-à-dire l'ensemble des nombres complexes de partie imaginaire strictement positive :

$$\mathbb{P} = \{z \in \mathbb{C} ; \operatorname{Im} z > 0\}.$$

On note E l'ensemble des matrices d'ordre 2 de déterminant strictement positif :

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) ; \det(M) := ad - bc > 0 \right\}.$$

Pour tout $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$, on note h_M l'application :

$$\begin{aligned} h_M : \mathbb{P} &\rightarrow \mathbb{P} \\ z &\mapsto \frac{az + b}{cz + d} \end{aligned}$$

Une fonction $f : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ est une *homographie* s'il existe $M \in E$ tel que $f = h_M$. L'ensemble des homographies est noté $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H} = \left\{ \begin{aligned} \mathbb{P} &\rightarrow \mathbb{P} \\ z &\mapsto \frac{az+b}{cz+d} \end{aligned} , \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E \right\}.$$

1. Soient $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$ et $z \in \mathbb{P}$.
 - a) Montrer que $h_M(z)$ est bien défini.
 - b) Montrer que $h_M(z) \in \mathbb{P}$.

Cette question permet de justifier a posteriori la définition des homographies proposée en début d'énoncé.

Partie I : Ensembles images

On note h l'homographie associée à l'élément $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, $h : z \mapsto \frac{2z+3}{-z+1}$.

On considère les ensembles $\Gamma = \{e^{i\theta}, \theta \in]0, \pi[\}$, $D = \{-1 + xi, x > 0\}$ et $\Delta_+ = \{\frac{1}{2} + ix, x > 0\}$.

2. Montrer que $\Gamma \subset \mathbb{P}$.
3. Sur un même graphique, représenter les ensembles Γ et D .
4. Soit f l'application définie pour tout $\theta \in]0, \pi[$ par $f(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{1 - \cos(\theta)}$.
 - a) Dresser le tableau de variations de f en précisant les valeurs aux bornes de l'intervalle de définition.
 - b) Soit $\theta \in]0, \pi[$. Écrire $h(e^{i\theta})$ sous forme algébrique.
 - c) En déduire $h(\Gamma) = \Delta_+$.
On justifiera soigneusement cette égalité ensembliste.

5. Soit $z = -1 + xi \in D$.
 - a) Écrire $h(z)$ sous forme algébrique. On notera $h(z) = X + iY$ où $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$.
 - b) Calculer $(X + \frac{3}{4})^2 + Y^2$.
 - c) En déduire que $h(D)$ est inclus dans une forme géométrique simple dont on précisera les éléments caractéristiques principaux.

Partie II : Structure de $\mathcal{H}$

6. On pose $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $I \in E$ et décrire l'application h_I .
7. Déterminer l'ensemble des éléments $M \in E$ tels que : $\forall z \in \mathbb{P}, h_M(z) = z$.
8. On définit sur E la relation binaire : $M \mathcal{R} N$ si $h_M = h_N$.
- a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
- b) Soit $M \in E$. Déterminer la classe d'équivalence de M .
9. Soit $(M_1, M_2) \in E^2$, montrer que $h_{M_1} \circ h_{M_2}$ est une homographie.
Plus précisément, montrer $h_{M_1} \circ h_{M_2} = h_{M_1 \times M_2}$
Il s'agit du produit matriciel M_1 par M_2 .
10. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$.
- a) On suppose, dans cette sous-question, que $\det(M) = 1$. On note $M' = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
Expliciter $h_M \circ h_{M'}$ et $h_{M'} \circ h_M$. Que peut-on en déduire concernant l'application h_M ?
- b) On ne suppose plus que $\det M = 1$. On rappelle toutefois que $\det M > 0$.
Justifier l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\lambda M \in E$ et $\det(\lambda M) = 1$.
En déduire que h_M est bijective et déterminer h_M^{-1} .
11. Décrire l'ensemble des homographies h qui satisfont $h(i) = i$.
12. Soit $M \in E \setminus \{\lambda I, \lambda \in \mathbb{R}\}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur E pour que h_M admette un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $z \in \mathbb{P}$ tel que $h_M(z) = z$.
13. On considère l'application $\Phi : \begin{matrix} E & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ M & \longmapsto & h_M \end{matrix}$. Indiquez si chacune des assertions suivantes est vraie, en justifiant votre réponse (*par une démonstration ou un contre-exemple*).
- a) L'application Φ est injective.
- b) L'application Φ est surjective.
- c) L'application Φ est bijective.

Partie III : Distance hyperbolique

14. Montrer que pour tous $u, v \in \mathbb{P}$, $|u - v| < |u - \bar{v}|$, puis que $\frac{|u - \bar{v}| + |u - v|}{|u - \bar{v}| - |u - v|} \geq 1$.

Pour tous $u, v \in \mathbb{P}$, la distance hyperbolique entre u et v , notée $d(u, v)$, est définie par

$$d(u, v) = \ln \left(\frac{|u - \bar{v}| + |u - v|}{|u - \bar{v}| - |u - v|} \right).$$

15. Montrer que pour tout $u, v \in \mathbb{P}$,

- a) $d(u, v) \geq 0$.
- b) $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$.
- c) $d(u, v) = d(v, u)$.

On admettra par ailleurs que pour tous $u, v, w \in \mathbb{P}$, $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$.

Ces propriétés montrent que l'application d est une distance sur $\mathbb{P}$.

16. Soit $M \in E$.

- a) Pour tous $z, z' \in \mathbb{P}$, exprimer $h_M(z) - h_M(z')$ en fonction de $z - z'$, $ad - bc$, $cz + d$ et $cz' + d$.
- b) En déduire que pour tous $z, z' \in \mathbb{P}$, $d(h_M(z), h_M(z')) = d(z, z')$.

On a ainsi démontré que les homographies sont des isométries du demi-plan de Poincaré.

Partie IV : Géodésiques

Soient $z_0, z_1 \in \mathbb{P}$.

- 17.** On pose $P_0(X) = X^2 - 2\Re(z_0)X + |z_0|^2$ et $P_1(X) = X^2 - 2\Re(z_1)X + |z_1|^2$.
Pour tout $t \in]0, 1[$, on note $P_t(X) = (1-t)P_0(X) + tP_1(X)$ et Δ'_t son discriminant réduit (qui vaut $\frac{1}{4}$ du discriminant).
- Dans toute la suite, t désigne un réel de l'intervalle $]0, 1[$.
- a) Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{P}$, $|\Re(z)| < |z|$.
 - b) Montrer que $\Delta'_t < -t(1-t)(\Re(z_0) - \Re(z_1))^2$.
 - c) En déduire que $P_t(X)$ possède une unique racine dans $\mathbb{P}$, notée z_t .
 - d) Exprimer z_t en fonction de t , $\Re(z_0)$, $\Re(z_1)$ et Δ'_t .
- 18.** On suppose que $\Re(z_0) = \Re(z_1)$.
Montrer que pour tout $t \in [0, 1]$, z_t appartient à la droite verticale qui contient z_0 et z_1 .
On pourrait montrer que z_t décrit le segment qui relie z_0 à z_1 lorsque t décrit $[0, 1]$.
- 19.** On suppose que $\Re(z_0) \neq \Re(z_1)$.
- a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t \in [0, 1]$. Montrer qu'il existe deux réels λ et μ indépendants de t , que vous préciserez, tels que $|z_t - x|^2 = \lambda t + \mu$.
 - b) En déduire que pour tout $t \in [0, 1]$, z_t appartient à un cercle de centre situé sur l'axe des réels.
On peut montrer que z_t décrit précisément l'arc de cercle qui relie z_0 à z_1 sur le cercle décrit précédemment lorsque t décrit $[0, 1]$.

Partie V : Décomposition des homographies

Pour tout θ, t réels et $z \in \mathbb{P}$, on note,

$$f_\theta(z) = \frac{\cos(\theta)z - \sin(\theta)}{\sin(\theta)z + \cos(\theta)} \text{ et } g_t(z) = \frac{\operatorname{ch}(t)z + \operatorname{sh}(t)}{\operatorname{sh}(t)z + \operatorname{ch}(t)}.$$

- 20.** Soit $t \in \mathbb{R}$. Exprimer $\operatorname{sh}(2t)$ en fonction de $\operatorname{ch}(t)$ et $\operatorname{sh}(t)$.
- 21.** Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que f_θ et g_t sont des homographies.
- 22.** Soient $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que :

$$\forall z \in \mathbb{P}, f_\theta(z) = f_\varphi(z).$$

- 23.** Soit $z = x + yi \in \mathbb{P}$ écrit sous forme algébrique.
Montrer qu'il existe un unique couple $(\lambda, t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tel que $z = \lambda g_t(i)$.
- 24.** Soit $h \in \mathcal{H}$. Montrer qu'il existe un unique triplet $(\lambda, t, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times [0, \pi[$ tel que $h = \lambda g_t \circ f_\theta$.