

DEVOIR SURVEILLÉ N°3
CORRECTION

Sujet donné le samedi 22 novembre 2025, 4h.

EXERCICE

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta \, d\theta$.

1. Calculer W_0 , W_1 .

$$W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^0 \theta \, d\theta = \frac{\pi}{2} \text{ et } W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \, d\theta = [\sin \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta \, d\theta$.

L'application $\theta \mapsto \frac{\pi}{2} - \theta$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur lui-même.

Posons $\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$, on a donc $d\alpha = -d\theta$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_n = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) (-d\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \alpha \, d\alpha$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Etudier le signe de $f_n : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $\theta \mapsto \cos^{n+1} \theta - \cos^n \theta$. En déduire que (W_n) est décroissante.

Pourquoi peut-on en déduire facilement que (W_n) est convergente.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On peut factoriser par $\cos^n \theta$: $f_n(\theta) = \cos^n \theta (\cos \theta - 1)$.

Or pour $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leq \cos \theta \leq 1$, donc $\cos^n \theta \geq 0$ et $\cos \theta - 1 \leq 0$.

Par règle de signes :

$$\forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], f_n(\theta) \leq 0$$

Et donc comme les bornes sont dans un ordre croissant : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(\theta) \, d\theta \leq 0$.

Puis, par linéarité de l'intégration :

$$W_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} \theta \, d\theta \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta \, d\theta = W_n$$

La suite $(W_n)_n$ est donc décroissante.

Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos^n \theta \geq 0$, donc par croissance de l'intégration : $W_n \geq 0$.

La suite (W_n) est décroissante et minorée, donc elle converge.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $W_{n+2} = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos^n \theta \, d\theta$.
En déduire $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$ (*).

Soit $n \in \mathbb{N}$. Les applications $u : \theta \mapsto \cos^{n+1} \theta$ et $v : \theta \mapsto \sin \theta$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Et pour tout $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $u'(\theta) = -(n+1) \sin \theta \cos^n \theta$ et $v'(\theta) = \cos \theta$.

On peut appliquer une intégration par parties :

$$W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos(\theta)}_{v'(\theta)} \times \underbrace{\cos^{n+1}(\theta)}_{u(\theta)} \, d\theta = \left[-\sin(\theta) \cos^{n+1}(\theta) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(\theta) \cos^n(\theta) \, d\theta$$

Et comme $\sin(0) = 0$ et $\cos^{n+1}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ (car $n+1 \geq 1$), on trouve donc :

$$W_{n+2} = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(\theta) \cos^n(\theta) \, d\theta$$

Comme $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$, on trouve donc

$$W_{n+2} = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^n \theta - \cos^{n+2} \theta) \, d\theta = (n+1) [W_n - W_{n+2}]$$

Ainsi, $(1 + (n+1))W_{n+2} = (n+1)W_n$, ou encore

$$(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$$

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = (n+1)W_{n+1}W_n$.

5. Démontrer que (I_n) est une suite constante. Quelle est sa valeur ?

Soit $n \in \mathbb{N}$. $I_{n+1} = (n+2)W_{n+2}W_{n+1}$.

En exploitant la relation précédente : $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$, on trouve : $I_{n+1} = (n+1)W_nW_{n+1} = I_n$.

Ainsi la suite (I_n) est une suite constante et (avec la première question)

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = I_0 = 1W_1W_0 = \frac{\pi}{2}$$

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta^2 \cos^n \theta \, d\theta$.

6. Evaluer J_0 .

$$J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta^2 \, d\theta = \left[\frac{1}{3} \theta^3 \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{24}$$

7. Avec deux intégrations par parties, montrer que pour tout entier n , $n \geq 2$, $W_n = \frac{n}{2} ((n-1)J_{n-2} - nJ_n)$ (★★).

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$.

On considère maintenant $u_1 : \theta \mapsto \cos^n \theta$ et $v_1 : \theta \mapsto \frac{1}{2}\theta^2$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

$\forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $u_1'(\theta) = n \sin \theta \cos^{n-1} \theta$, $u_1''(\theta) = n(n-1) \sin^2 \theta \cos^{n-2} \theta + n \cos^n \theta = n(n-1)(1-\cos^2 \theta) \cos^{n-2} \theta + n \cos^n \theta = n(1-(1-n)) \cos^n \theta - n(n-1) \cos^{n-2} \theta = n^2 \cos^n \theta - n(n-1) \cos^{n-2} \theta$ alors que $v_1'(\theta) = \theta$, $v_1''(\theta) = 1$.

On a donc

$$\begin{aligned} W_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} u_1(\theta) v_1''(\theta) d\theta = [u_1(\theta) v_1'(\theta)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u_1'(\theta) v_1'(\theta) d\theta \\ &= [u_1(\theta) v_1'(\theta) - u_1'(\theta) v_1(\theta)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} u_1''(\theta) v_1(\theta) d\theta \\ &= 0 + \frac{n^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(\theta) \theta^2 d\theta + \frac{n(n-1)}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}(\theta) d\theta \end{aligned}$$

car $v_1(0) = v_1'(\pi/2) = 0$ et $u_1(\pi/2) = u_1'(0) = 0$ ($n \geq 2$).

Ainsi

$$W_n = \frac{n}{2} ((n-1)J_{n-2} - nJ_n)$$

8. En exploitant (★) et (★★) montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{J_{2n-2}}{W_{2n-2}} - \frac{J_{2n}}{W_{2n}} = \frac{1}{2n^2}$$

On considère $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 1$. Alors $2n \geq 2$ et donc d'après la question précédente (en $n \leftarrow 2n$) :

$$W_{2n} = n((2n-1)J_{2n-2} - 2nJ_{2n})$$

En divisant par $2n^2 W_{2n}$ et en exploitant le fait que $2n W_{2n} = (2n-1)W_{2n-2}$ (formule (★) pour $n \leftarrow 2n-2$):

$$\frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2n} \left((2n-1) \frac{J_{2n-2}}{W_{2n-2}} - 2n \frac{J_{2n}}{W_{2n}} \right) = \frac{1}{2n} \left((2n-1) \frac{2n J_{2n-2}}{(2n-1)W_{2n-2}} - 2n \frac{J_{2n}}{W_{2n}} \right) = \frac{J_{2n-2}}{W_{2n-2}} - \frac{J_{2n}}{W_{2n}}$$

$$\frac{1}{2n^2} = \frac{J_{2n-2}}{W_{2n-2}} - \frac{J_{2n}}{W_{2n}}$$

9. Montrer alors, que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} = 2 \frac{J_0}{W_0} - 2 \frac{J_{2N}}{W_{2N}}$$

On a donc, en exploitant un télescope (somme télescopique) :

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} = 2 \sum_{n=1}^N \left(\frac{J_{2n-2}}{W_{2n-2}} - \frac{J_{2n}}{W_{2n}} \right) = \frac{J_0}{W_0} - \frac{J_{2N}}{W_{2N}}$$

10. Soit $n \in \mathbb{N}$. En exploitant l'inégalité : $\theta \leq \frac{\pi}{2} \sin \theta$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et une intégration par parties,

montrer les inégalités et égalité :

$$0 \leq J_n \leq \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta \cos^n \theta \sin \theta \, d\theta = \frac{\pi}{2(n+1)} W_{n+1}$$

En multipliant l'inégalité par $\theta \cos^n \theta \geq 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$: $0 \leq \theta^2 \cos^n \theta \leq \frac{\pi}{2} \theta \sin \theta \cos^n \theta$. On a alors en intégrant ces inégalités :

$$0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta^2 \cos^n \theta \, d\theta \leq \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta \sin \theta \cos^n \theta \, d\theta$$

On peut alors faire de nouveau une intégration par parties avec $u(\theta) = \theta$ et $v(\theta) = \frac{-1}{n+1} \cos^{n+1} \theta$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ où $u'(\theta) = 1$ et $v'(\theta) = \sin \theta \cos^n \theta$.

On a donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta \sin \theta \cos^n \theta \, d\theta = [\theta \cos^{n+1} \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(\theta) \, d\theta = \frac{W_{n+1}}{n+1}$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq J_n \leq \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta \cos^n \theta \sin \theta \, d\theta = \frac{\pi}{2(n+1)} W_{n+1}$$

Il n'est pas demandé de démontrer l'inégalité.

On peut étudier les variations de $\theta \mapsto \sin \theta - \frac{2}{\pi} \theta$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

(deux dérivations. Croissante sur $[0, \alpha]$, décroissante sur $[\alpha, \frac{\pi}{2}]$ où $\alpha = \arccos \frac{2}{\pi}$ et nulle en 0 et en $\frac{\pi}{2}$).

11. En déduire que $\left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}\right)_N$ est une suite convergente. Quelle est sa limite ?

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, puisque $W_n \geq 0$:

$$0 \leq \frac{J_n}{W_n} \leq \frac{\pi}{2(n+1)} \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq \frac{\pi}{2(n+1)}$$

car $W_{n+1} \leq W_n$. Ainsi, par comparaison de suite, convergente vers 0, $\left(\frac{J_n}{W_n}\right)_n$ converge vers 0.

Et donc par addition de suites convergentes :

$$\left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}\right)_N \text{ converge et } \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} = 2 \frac{J_0}{W_0} - 0 = 2 \frac{\pi^3}{24} \frac{2}{\pi} = \frac{\pi^2}{6}, \text{ noté } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

PROBLÈME

Soient I un intervalle réel non vide et non réduit à un point, p , q et h trois fonctions réelles définies et continues sur I . Pour $\mathbb{K}$ valant $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, On note $\mathcal{D}^1(I, \mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{D}^2(I, \mathbb{K})$) l'ensemble des fonctions dérivables (resp. deux fois dérivables) sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Pour tous $t_0 \in I$ et $(\alpha_0, \alpha_1) \in \mathbb{R}^2$ fixés quelconques, on admet (car cette équation est linéaire du second ordre à coefficients **non constants** et ne rentre donc pas dans le cadre du cours de MPSI) l'existence et l'unicité d'une solution réelle définie sur I au problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \forall t \in I & , & y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = h(t) \\ y(t_0) & = & \alpha_0 \\ y'(t_0) & = & \alpha_1 \end{cases} \quad (1)$$

La partie I étudie l'existence de solutions périodiques pour des équations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2. Elle est indépendante du reste du problème.

La partie II prouve un résultat technique utilisé dans la partie III.

La partie III étudie les zéros des solutions non identiquement nulles de l'équation harmonique $y'' + y = 0$ perturbée en $y'' + (1 + q)y = 0$ où q est une petite perturbation.

Partie I - Recherche de solutions périodiques

1. On considère l'équation différentielle $y' + \sin(t)y = e^{\cos(t)}$.

a) En détaillant la démarche, déterminer l'ensemble des solutions de cette équation différentielle.

1. Recherche des solutions de l'équation homogène.

Comme une primitive de $\sin$ est $-\cos$, l'ensemble des solutions de l'équation homogène est

$$\left\{ x \mapsto \lambda e^{\cos(x)}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. Recherche d'une solution particulière.

Cherchons une solution de la forme $t \mapsto \lambda(t)e^{\cos(t)}$, où λ est une fonction dérivable.

Alors,

$$\begin{aligned} (\lambda e^{\cos})' + \sin \lambda e^{\cos} &= e^{\cos} \\ \lambda' e^{\cos} + \lambda \cos' e^{\cos} + \sin \lambda e^{\cos} &= e^{\cos} \\ \lambda' e^{\cos} &= e^{\cos} \\ \lambda' &= 1 \end{aligned}$$

On pose ainsi $\lambda : t \mapsto t$ et une solution particulière est $t \mapsto te^{\cos(t)}$.

3. Ensemble des solutions de l'équation.

L'ensemble des solutions de l'équation est

$$\boxed{\left\{ t \mapsto (\lambda + t)e^{\cos(t)}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}}.$$

b) En déduire l'ensemble des solutions qui sont 2π -périodiques.

Soit h une solution 2π -périodique de l'équation différentielle.

D'après la question précédente, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, h(t) = (\lambda + t)e^{\cos(t)}.$$

Comme h est 2π -périodique, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} h(t + 2\pi) &= h(t) \\ (\lambda + t + 2\pi)e^{\cos(t+2\pi)} &= (\lambda + t)e^{\cos(t)} \\ \lambda + t + 2\pi &= \lambda + t, \text{ car } e^{\cos(t)} \neq 0 \\ 2\pi &= 0. \end{aligned}$$

On obtient ainsi une contradiction et

l'équation ne possède donc pas de solution 2π -périodique.

2. On considère l'équation différentielle $y' + \sin(t)y = \sin(t)e^{-\cos(t)}$.

a) Déterminer l'ensemble des solutions de cette équation différentielle.

1. Recherche des solutions de l'équation homogène.

Comme une primitive de $\sin$ est $-\cos$, l'ensemble des solutions de l'équation homogène est

$$\left\{ x \mapsto \lambda e^{\cos(x)}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. Recherche d'une solution particulière.

Cherchons une solution de la forme $t \mapsto \lambda(t)e^{\cos(t)}$, où λ est une fonction dérivable.

Alors,

$$\begin{aligned} (\lambda e^{\cos})' + \sin \lambda e^{\cos} &= \sin e^{-\cos} \\ \lambda' e^{\cos} + \lambda \cos' e^{\cos} + \sin \lambda e^{\cos} &= \sin e^{-\cos} \\ \lambda' e^{\cos} &= \sin e^{-\cos} \\ \lambda' &= \sin e^{-2\cos} \end{aligned}$$

On pose ainsi $\lambda : t \mapsto \frac{1}{2}e^{-2\cos}$ et une solution particulière est $t \mapsto \frac{1}{2}e^{-\cos(t)}$.

3. Ensemble des solutions de l'équation.

L'ensemble des solutions de l'équation est

$$\left\{ t \mapsto \lambda e^{\cos(t)} + \frac{1}{2}e^{-\cos(t)}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

b) En déduire l'ensemble des solutions qui sont 2π -périodiques.

On constate que toutes les solutions de cette équation sont 2π -périodiques.

Soient $T > 0$ et a et b des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$, définies sur $\mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}$ et T -périodiques. Considérons l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, y'(t) + a(t)y(t) = b(t) \quad (E_1)$$

3. Montrer que, si $f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est solution de (E_1) , alors $f_T : t \mapsto f(t + T)$ est également solution de (E_1) .

- $t \mapsto t + T \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ donc par stabilité de la dérivabilité par composition, on a

$$\boxed{f_T = f \circ (t \mapsto t + T) \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})}.$$

- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, en dérivant la composée ci-dessus, $f'_T(t) = f'(t + T) \times 1 = f'(t + T)$ donc

$$\begin{aligned} f'_T(t) + a(t)f_T(t) &= f'(t + T) + a(t)f(t + T) \\ &= f'(t + T) + a(t + T)f(t + T) \quad \text{car } a \text{ est } T\text{-périodique} \\ &= b(t + T) \quad \text{car } f \text{ est solution de } (E_1) \\ &= b(t) \quad \text{car } b \text{ est } T\text{-périodique} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } f_T \text{ est une solution de } (E_1).}$$

4. En considérant le problème de Cauchy en 0 associé à (E_1) , montrer qu'une solution $f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ de (E_1) est T -périodique si et seulement si $f(0) = f(T)$.

Soit $f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ une solution de (E_1) .

- Supposons que f est T -périodique.

Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = f(t + T)$ donc pour $t \leftarrow 0$, $f(0) = f(T)$.

- Supposons que f vérifie $f(0) = f(T)$.

Il est immédiat d'observer que f est une solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}, y'(t) + a(t)y(t) = b(t) \\ y(0) = f(0) \end{cases}$$

D'après la question précédente, f_T est solution de (E_1) et, de plus $f_T(0) = f(T) = f(0)$ donc f_T est aussi une solution du même problème de Cauchy que f .

Or, l'équation (E_1) est linéaire du premier ordre à coefficient et second membre continus sur $\mathbb{R}$ donc le problème de Cauchy ci-dessus admet une unique solution définie sur $\mathbb{R}$ donc $f = f_T$ ce qui prouve que f est T -périodique.

Ainsi,

$$\boxed{f \text{ solution de } (E_1) \text{ est } T\text{-périodique si et seulement si } f(0) = f(T).}$$

5.a) En détaillant la démarche, déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (E_1) en fonction de A , la primitive de a qui s'annule en 0 et de la primitive B de $t \mapsto b(t)e^{A(t)}$ qui s'annule en 0.
Il s'agit de re-démontrer le résultat vu en cours décrivant l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.

On note $D : y \mapsto y'$, $F_a : y \mapsto y' + ay$, A la primitive de a (continue) qui s'annule en 0 et $H_A : y \mapsto e^A \times y$.
On a alors $H_{-A} \circ H_A : y \mapsto y$ et $H_A \circ H_{-A} : y \mapsto y$. Donc $H_A^{-1} = H_{-A}$.

$$H_A^{-1} \circ D \circ H_A(y) = H_A^{-1}(e^A y)' = H_{-A}(y' e^A + A' y e^A) = y' + ay = F_a(y)$$

On a alors les équivalences :

$$\begin{aligned} y' + ay = b &\iff D_{-A} \circ H \circ D_A(y) = b \iff H \circ D_A(y) = D_A(b) = e^A b \\ &\iff \exists K \in \mathbb{R} \text{ telle que } D_A(y) : t \mapsto \int_0^t e^A(u)b(u) du + K \\ &\iff \exists K \in \mathbb{R} \text{ telle que } y : t \mapsto e^{-A(t)} \int_0^t e^A(u)b(u) du + K e^{-A(t)} \end{aligned}$$

En exploitant la fonction B donnée dans l'énoncé :

L'ensemble des solutions est $\left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto \lambda e^{-A(t)} + e^{-A(t)} B(t) \end{array} \mid \lambda \in \mathbb{C} \right\}$.

b) Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, $e^z = 1$.

$$e^z = 1 \iff \underbrace{e^{\operatorname{Re}(z)}}_{>0} e^{i\operatorname{Im}(z)} = 1 \times e^{i0}$$

donc en utilisant la condition nécessaire et suffisante d'égalité de deux nombres complexes non nuls sous forme exponentielle,

$$e^z = 1 \iff \begin{cases} e^{\operatorname{Re}(z)} = 1 \\ \operatorname{Im}(z) \equiv 0 [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} \operatorname{Re}(z) = 0 \\ \operatorname{Im}(z) \equiv 0 [2\pi] \end{cases} \iff z \in 2i\pi\mathbb{Z}$$

L'ensemble des solutions de $e^z = 1$ est $\{2i\pi\mathbb{Z}\}$.

c) Montrer que, si $\int_0^T a(s) ds \notin 2i\pi\mathbb{Z}$, alors l'équation (E_1) admet une unique solution T -périodique.

Commençons par une analyse préalable :

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \text{ est une sol. } T\text{-per. de } (E_1) &\iff \begin{cases} f \text{ est une solution de } (E_1) \\ f \text{ est } T\text{-périodique} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} f \text{ est une solution de } (E_1) \\ f(0) = f(T) \end{cases} \quad \text{d'après la question 4} \\ &\iff \begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{C} : f = \lambda e^{-A} + B \\ f(0) = f(T) \end{cases} \quad \text{d'après la question 1} \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{C} : \begin{cases} f = \lambda e^{-A} + e^{-A} B \\ \lambda e^{-A(0)} + e^{-A(0)} B(0) = \lambda e^{-A(T)} + e^{-A(T)} B(T) \end{cases} \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{C} : \begin{cases} f = \lambda e^{-A} + e^{-A} B \\ \lambda(1 - e^{-A(T)}) = e^{-A(T)} B(T) \end{cases} \quad \text{car } A(0) = 0 \text{ et } B(0) \neq 0 \end{aligned}$$

Ici, comme $\int_0^T a(s) ds = A(T) \notin 2\pi\mathbb{Z}$, alors $1 - e^{-A(T)} \neq 0$.

Donc l'équation $\lambda(1 - e^{-A(T)}) = e^{-A(T)}B(T)$ admet une unique solution $\lambda = \frac{e^{-A(T)}B(T)}{1 - e^{-A(T)}}$ donc

$$(2) \iff f = \frac{e^{-A(T)}B(T)}{1 - e^{-A(T)}}e^{-A} + e^{-A}B = \frac{B(T)}{e^{A(T)} - 1}e^{-A} + e^{-A}B$$

si bien que dans cette situation,

Si $\int_0^T a(s) ds \notin 2i\pi\mathbb{Z}$, (E_1) admet une unique solution T -périodique.

d) Montrer que, si $\int_0^T a(s) ds \in 2i\pi\mathbb{Z}$, alors l'équation (E_1) admet soit aucune soit une infinité de solutions T -périodique, en fonction de la valeur de $B(T)$.

Pour cette question, on a $\int_0^T a(s) ds = A(T) \in 2\pi\mathbb{Z}$, alors $1 - e^{-A(T)} = 0$.

L'équation $\lambda(1 - e^{-A(T)}) = e^{-A(T)}B(T)$ devient $0 = e^{-A(T)}B(T) \iff B(T) = 0$.

- Si $B(T) = 0$, alors toute valeur $\lambda \in \mathbb{C}$ est solution de l'équation donc toutes les solutions de (E_1) sont T -périodiques.
- Si $B(T) \neq 0$, alors l'équation d'inconnue λ n'a aucune solution si bien que (E_1) n'admet aucune solution T -périodique.

Si $\int_0^T a(s) ds \in 2i\pi\mathbb{Z}$, alors :

- si $B(T) \neq 0$, (E_1) n'admet aucune solution T -périodique,
- si $B(T) = 0$, toutes les solutions de (E_1) sont T -périodiques.

e) Ces résultats vous semblent-ils cohérents avec les résultats des questions 1 et 2 ?
Votre réponse devra être argumentée.

Les équations des questions 1 et 2 entrent dans le cas des valeurs exceptionnelles de $\int_0^T a(s) ds$ car

$$\int_0^{2\pi} \sin(s) ds = 0$$

et 0 est justement une valeur exceptionnelle. Dans cette situation, il faut calculer la valeur $B(T)$ qui correspond

★ pour l'équation $y' + (\sin t)y = e^{\cos t}$, à

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos s} e^{-\cos s} ds = \int_0^{2\pi} 1 ds \neq 0$$

donc la théorie prévoit qu'il n'y a aucune solution 2π -périodique.

★ pour l'équation $y' + (\sin t)y = (\sin t)e^{-\cos t}$, à

$$\int_0^{2\pi} \sin s e^{-\cos s} e^{-\cos s} ds = \int_0^{2\pi} \pi \sin s e^{-2\cos s} ds = \left[\frac{e^{-2\cos s}}{2} \right]_0^{2\pi} = 0$$

donc la théorie prévoit que toutes les solutions sont 2π -périodiques.

6. On considère l'équation différentielle $y'' + y = \sin^2$.

a) Déterminer, en détaillant votre démarche, l'ensemble des solutions à valeurs réelles de cette équation. On pourra utiliser une formule de duplication ainsi que le principe de superposition.

- L'équation caractéristique est $r^2 + 1 = 0$. Ses solutions sont i et $-i$. L'ensemble des solutions de l'équation homogène est donc

$$\{t \mapsto \lambda \cos(t) + \mu \sin(t), \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

- D'après les formules de duplication, l'équation différentielle s'écrit

$$y'' + y = \frac{1 - \cos(2t)}{2}.$$

Nous allons utiliser le principe de superposition.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{2}$ est solution particulière de l'équation $y'' + y = \frac{1}{2}$.

Recherchons une solution particulière de l'équation $y'' + y = \cos(2t)$ sous la forme

$$y_p : t \mapsto \lambda \cos(2t)$$

Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$y_p(t) = \lambda \cos(2t)$$

$$y_p'(t) = -2\lambda \sin(2t)$$

$$y_p''(t) = -4\lambda \cos(2t).$$

Ainsi,

$$\cos(2t) = -3\lambda \cos(2t).$$

On choisit $\lambda = -\frac{1}{3}$.

D'après le principe de superposition, une solution particulière de $y'' + y = \sin^2$ est donc

$$t \mapsto \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cos(2t).$$

- D'après le cours, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est donc

$$S = \left\{ t \mapsto \lambda \cos(t) + \mu \sin(t) + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cos(2t), \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation qui sont 2π -périodiques.

On remarque que toutes les solutions de l'équation sont 2π -périodiques.

Soit b une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$, définie sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ et 2π périodique. Considérons maintenant l'équation différentielle :

$$\forall t \in \mathbb{R}, y''(t) + y(t) = b(t) \quad (E_2)$$

Considérons la fonction s définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $s(t) = \int_0^t b(x) \sin(t-x) dx$.

7. Montrer que s est une fonction 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et solution de (E_2) . Préciser les valeurs $s(0)$ et $s'(0)$.
On pourra mettre $s(t)$ sous la forme $u(t) \cos(t) + v(t) \sin(t)$ afin de dériver rigoureusement.

- En utilisant la formule $\sin(t-u) = \sin t \cos u - \cos t \sin u$,

$$\forall t \in \mathbb{R}, s(t) = (\sin t) \int_0^t b(x) \cos x dx - (\cos t) \int_0^t b(x) \sin x dx$$

Posons, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u(t) = - \int_0^t b(x) \sin x dx$ et $v(t) = \int_0^t b(x) \cos x dx$ pour obtenir la relation

$$\forall t \in \mathbb{R}, s(t) = u(t) \cos t + v(t) \sin t$$

- $b \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $\cos \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ donc $x \mapsto b(x) \cos x \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ si bien que sa primitive qui s'annule en 0, $v : t \mapsto \int_0^t b(x) \cos x dx$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

Un raisonnement analogue prouve que $u : t \mapsto - \int_0^t b(x) \sin x dx$ (opposé de la primitive de $b \times \sin$ qui s'annule en 0) est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

Par stabilité de la dérivabilité par produit, $u \times \cos \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $v \times \sin \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Ainsi, $s = u \times \cos + v \times \sin$ est la somme de deux fonctions dérivables donc $u \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et,

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, s'(t) &= u'(t) \cos t - u(t) \sin t + v'(t) \sin t + v(t) \cos t \\ &= [-b(t) \sin t] \cos t - u(t) \sin t + [b(t) \cos t] \sin t + v(t) \cos t \\ &= -u(t) \sin t + v(t) \cos t \end{aligned}$$

- $s' = -u \times \sin + v \times \cos$ or nous avons vu que u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc par stabilité de la dérivabilité par produit et combinaison linéaire, s' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et,

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, s''(t) &= -u'(t) \sin t - u(t) \cos t + v'(t) \cos t - v(t) \sin t \\ &= -[-b(t) \sin t] \sin t - u(t) \cos t + [b(t) \cos t] \cos t - v(t) \sin t \\ &= b(t) \underbrace{[\cos^2 t + \sin^2 t]}_{=1} - \underbrace{u(t) \cos t + v(t) \sin t}_{=-s(t)} \\ &= b(t) - s(t) \end{aligned}$$

$s \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \text{ et } s'' + s = b \text{ sur } \mathbb{R}.$

- En reprenant les calculs effectués,

$$s(0) = u(0) \underbrace{\cos 0}_{=1} + v(0) \underbrace{\sin 0}_{=0} = u(0) = 0, \quad s'(0) = -u(0) \underbrace{\sin 0}_{=0} + v(0) \underbrace{\cos 0}_{=1} = v(0) = 0$$

$\text{Ainsi, } s \text{ et } s' \text{ s'annulent en } 0.$

8. En détaillant la démarche, déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (E_2) .

- ★ (E_2) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants et avec second membre, définie sur $\mathbb{R}$.
- ★ (E_2) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 résolue sur $\mathbb{R}$, à coefficients constants (donc continus sur $\mathbb{R}$) et avec second membre continu sur $\mathbb{R}$ donc les solutions définies sur un intervalle maximal sont définies sur $\mathbb{R}$ et leur ensemble constitue le plan affine passant par une solution particulière et dirigé par le plan vectoriel des solutions de l'équation homogène.
- ★ Le plan vectoriel des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène est $\text{Vect}\{\sin, \cos\}$.
- ★ Puisque la fonction s est une solution particulière,

l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de (E_2) est $\left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{C} \\ t & \mapsto \lambda \cos t + \mu \sin t + s(t) \end{array} \middle| (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$.

9. En considérant le problème de Cauchy en 0 associé à (E_2) , établir une CNS analogue à celle de la question 4 pour qu'une solution $f \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ de (E_2) soit 2π -périodique.

Soit $f \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ une solution de (E_2) .

- Supposons que f est 2π -périodique.

Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = f(t + 2\pi)$ donc pour $t \leftarrow 0$, $f(0) = f(2\pi)$. De plus, en dérivant l'égalité $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = f(t + 2\pi)$, on obtient $\forall t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = f'(t + 2\pi)$ puis pour $t \leftarrow 0$, $f'(0) = f'(2\pi)$.

- Supposons que f vérifie $f(0) = f(2\pi)$ et $f'(0) = f'(2\pi)$.

Il est immédiat d'observer que f est une solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}, y''(t) + y(t) = b(t) \\ y(0) = f(0) \\ y'(0) = f'(0) \end{cases}$$

Considérons la fonction g définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $g(t) = f(t + 2\pi)$. Comme dans la question 4, puisque $f \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $g \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ d'où

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, g''(t) + g(t) &= f''(t + 2\pi) + f(t + 2\pi) \\ &= b(t + 2\pi) \quad \text{car } f \text{ est solution de } (E_2) \\ &= b(t) \quad \text{car } b \text{ est } 2\pi\text{-périodique} \end{aligned}$$

De plus, $g(0) = f(2\pi) = f(0)$ et $g'(0) = f'(2\pi) = f'(0)$.

Par conséquent, g est aussi une solution du même problème de Cauchy que f .

Or l'équation (E_2) est linéaire du second ordre à coefficients constants et avec second membre continu sur $\mathbb{R}$ donc le problème de Cauchy ci-dessus admet une unique solution définie sur $\mathbb{R}$ donc $f = g$ ce qui prouve que f est 2π -périodique.

Ainsi, une solution f de (E_2) est 2π -périodique si et seulement si $f(0) = f(2\pi)$ et $f'(0) = f'(2\pi)$.

10. En déduire que les solutions de (E_2) sont 2π -périodiques si et seulement si

$$\int_0^{2\pi} b(t) \cos(t) dt = \int_0^{2\pi} b(t) \sin(t) dt = 0.$$

D'après la résolution complète (E_2) , puisque toute combinaison linéaire de $\sin$ et $\cos$ est une fonction 2π -périodique, toutes les solutions de (E_2) sont 2π -périodiques si et seulement si la solution particulière s est 2π -périodique.

Or en utilisant la caractérisation de la 2π -périodicité pour les solutions de (E_2) établie dans la question précédente,

$$\begin{aligned} s \text{ est } 2\pi\text{-périodique} &\iff s(0) = s(2\pi) \text{ et } s'(0) = s'(2\pi) \\ &\iff s(2\pi) = 0 \text{ et } s'(2\pi) = 0 \quad \text{car } s(0) = s'(0) = 0 \\ &\iff u(2\pi) = 0 \text{ et } v(2\pi) = 0 \quad \text{en utilisant } s = u \cos + v \sin \text{ et } s' = -u \sin + v \cos \\ &\iff -\int_0^{2\pi} b(t) \sin t dt = 0 \text{ et } \int_0^{2\pi} b(t) \cos t dt = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, toutes les solutions de (E_2) sont 2π -périodiques $\iff \int_0^{2\pi} b(t) \cos t dt = \int_0^{2\pi} b(t) \sin t dt = 0$.

Partie II - Théorème du relèvement

On rappelle que I est un intervalle réel non vide et non réduit à un point, $t_0 \in I$ et $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. On note $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions k fois dérivables sur I et dont la dérivée k ième est continue.

Soit $g \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{C})$ une fonction de classe $\mathcal{C}^k$, à **valeurs complexes**, et qui **ne s'annule pas sur I** .

11. Justifier l'existence d'une fonction $A \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{C})$ telle que

$$A(t_0) = 0 \text{ et } \forall t \in I, \quad A'(t) = \frac{g'(t)}{g(t)}$$

On donnera une expression intégrale de A en fonction de g , g' et t_0 .

$\frac{g'}{g}$ est le quotient d'une fonction de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur I (dérivée d'une fonction de classe $\mathcal{C}^k$) par une fonction de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur I (car $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{C}) \subset \mathcal{C}^{k-1}(I, \mathbb{C})$) ne s'annulant pas sur I donc $\frac{g'}{g} \in \mathcal{C}^{k-1}(I, \mathbb{C})$.

Or $k \geq 1$ donc $\frac{g'}{g} \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$. Elle admet une unique primitive A définie sur I qui prend la valeur 0 en t_0 :

$$A \left| \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto \int_{t_0}^t \frac{g'(u)}{g(u)} du \end{array} \right. \text{ est bien défini}$$

De plus, en tant que primitive d'une fonction de classe $\mathcal{C}^{k-1}$, $A' \in \mathcal{C}^{k-1}(I, \mathbb{C})$ donc

$$A \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{C}).$$

12. Montrer que $\delta : t \mapsto g(t)e^{-A(t)}$ est une fonction constante.

δ est dérivable sur I comme produit de fonctions dérivable et pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned} \delta'(t) &= g'(t)e^{-A(t)} + g(t) \times (-A'(t))e^{-A(t)} \\ &= \left(g'(t) - g(t) \frac{g'(t)}{g(t)} \right) e^{-A(t)} = 0. \end{aligned}$$

Or, I est un intervalle donc

$$\boxed{\text{la fonction } \delta \text{ est constante sur } I.}$$

13. En introduisant les fonction $U = \operatorname{Re}(A)$ et $V = \operatorname{Im}(A)$, montrer qu'il existe $r \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}_+^*)$ à valeurs strictement positives et $\theta \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall t \in I, g(t) = r(t)e^{i\theta(t)}.$$

On explicitera les fonctions r et θ en fonction de $U, V, r_0 = |g(t_0)|$ et $\theta_0 \in \mathbb{R}$ un argument de $g(t_0)$.

La fonction δ est constante sur I donc

$$\forall t \in I, g(t)e^{-A(t)} = g(t_0)\underbrace{e^{-A(t_0)}}_{=1} = g(t_0)$$

donc

$$\forall t \in I, g(t) = g(t_0)e^{A(t)} = r_0e^{i\theta_0}e^{U(t)+iV(t)} = r_0e^{U(t)} \times e^{i(\theta_0+V(t))}.$$

$$\boxed{\text{Posons } r \left| \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto r_0e^{U(t)} \end{array} \right. \text{ et } \theta \left| \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \theta_0 + V(t) \end{array} \right. .}$$

★ r et θ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I à valeurs réelles car U et V le sont (parties réelle et imaginaire d'une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et à valeurs complexes).

★ $\forall t \in I, g(t) = r_0e^{U(t)} \times e^{i(\theta_0+V(t))} = r(t)e^{i\theta(t)}.$

★ $\forall t \in I, r(t) > 0$ car $r_0 = |g(t_0)| > 0$ (g ne s'annule pas) et $\exp(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+^*$.

Partie III - Étude de la suite des zéros d'une solution

Étant donné x un réel, la partie entière supérieure de x , notée $\lceil x \rceil$, est le plus petit entier supérieur ou égal à x : $x \leq \lceil x \rceil < x + 1$.

14. Soit h une solution à valeurs réelles définie sur $\mathbb{R}_+$, non identiquement nulle de l'équation différentielle (appelée équation harmonique) $y'' + y = 0$.

a) Justifier qu'il existe $(M, \phi) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tels que $\forall t \in \mathbb{R}_+, h(t) = M \sin(t + \phi)$.

L'ensemble des solutions de $y'' + y = 0$ est $\operatorname{Vect}\{\cos, \sin\}$,

or h est une solution de cette équation donc $\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2 : h = A \cos + B \sin$.

Si $(A, B) = (0, 0)$, alors h est la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$ ce qui est exclu donc $(A, B) \neq (0, 0)$

si bien que $A^2 + B^2 > 0$ ce qui permet d'écrire

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, h(t) = \sqrt{A^2 + B^2} \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos t + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin t \right)$$

Posons $M = \sqrt{A^2 + B^2}$, on a $M > 0$.

Observons que $\left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right)^2 + \left(\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right)^2 = 1$ donc le nombre complexe $\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} + i \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ est de module 1 si bien qu'il existe $\phi \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} + i \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} = e^{i\phi}$$

d'où

$$\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \cos \phi \quad \text{et} \quad \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \sin \phi$$

si bien que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, h(t) = M((\sin \phi) \cos t + (\cos \phi) \sin t) = M \sin(t + \phi)$$

Ainsi, il existe $(M, \phi) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tels que $\forall t \in \mathbb{R}_+, h(t) = M \sin(t + \phi)$.

b) Posons $k_0 = \left\lceil \frac{\phi}{\pi} \right\rceil$. Montrer que $0 \leq k_0\pi - \phi < \pi$.

L'encadrement qui caractérise la partie entière supérieure donne

$$\frac{\phi}{\pi} \leq k_0 < \frac{\phi}{\pi} + 1$$

donc après multiplication par $\pi > 0$ (ce qui préserve les inégalités strictes et larges)

$$\phi \leq k_0\pi < \pi + \phi$$

$$\text{d'où } 0 \leq k_0\pi - \phi < \pi.$$

c) En déduire que les zéros de h forment une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ strictement croissante que l'on explicitera en fonction de ϕ , n et k_0 .

h est définie sur $\mathbb{R}_+$ (choix de l'énoncé) donc

$$h(t) = 0 \iff M \sin(t + \phi) \underbrace{\iff}_{M \neq 0} \sin(t + \phi) = 0 \iff t + \phi \equiv 0 \pmod{\pi} \iff t \in \{-\phi + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{R}_+$$

Or, puisque les éléments de l'ensemble $\{-\phi + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ sont distants d'un multiple entier de π , l'encadrement établi dans la question précédente montre que k_0 est le plus petit entier relatif k tel que $-\phi + k\pi \geq 0$ si bien que l'ensemble des zéros de h est $\{-\phi + k\pi \mid k \in \llbracket k_0, +\infty \rrbracket\}$.

Pour obtenir une strictement croissante, posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = -\phi + (k_0 + n)\pi$.

La suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante et l'ensemble des zéros de h est exactement $\{t_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Soient $\varepsilon \in]0, 1[$ et q une fonction **continue** définie sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs réelles dans $[-\varepsilon, \varepsilon]$.

Soit f une solution **réelle non identiquement nulle** définie sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation différentielle (E) :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, y''(t) + (1 + q)y(t) = 0. \quad (E)$$

Posons $z \left| \begin{array}{ll} \mathbb{R}_+ & \rightarrow \mathbb{C} \\ t & \mapsto f'(t) + if(t) \end{array} \right.$

15.a) Montrer, en utilisant l'unicité de la solution au problème de Cauchy admise au début du problème, que $\forall t \in \mathbb{R}_+, z(t) \neq 0$.

Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $z(t_0) = 0$.

Alors, $f'(t_0) = \operatorname{Re}(z(t_0)) = 0$ et $f(t_0) = \operatorname{Im}(z(t_0)) = 0$ donc f est une solution réelle définie sur $\mathbb{R}_+$ du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \forall t \in I & , & y''(t) + (1 + q(t))y(t) = 0 \\ y(t_0) & = & 0 \\ y'(t_0) & = & 0 \end{cases}$$

L'équation est linéaire homogène du second ordre et résolue sur $\mathbb{R}_+$, les coefficients sont continus sur $\mathbb{R}_+$ donc ce problème admet une unique solution, or la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$ et f sont des solutions de ce problème de Cauchy, par unicité elles sont égales donc $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $f(t) = 0$ ce qui contredit l'hypothèse f est **réelle non identiquement nulle**.

Ainsi, z ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$.

b) En tant que solution d'une équation différentielle du second ordre, f appartient à $\mathcal{D}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Justifier que $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ puis qu'il existe $r \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$ et $\theta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ , f(t) = r(t) \sin(\theta(t)) , f'(t) = r(t) \cos(\theta(t)).$$

f vérifie l'équation (E) donc

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ , f''(t) = \underbrace{-(1 + q(t))}_{\in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})} \times \underbrace{f(t)}_{\in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$$

donc f'' est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Par conséquent, $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

Ainsi $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ donc

$$z = \underbrace{f'}_{\in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})} + i \underbrace{f}_{\in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$$

et z ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$ ce qui permet d'appliquer le résultat de la partie 2 pour $I \leftarrow \mathbb{R}_+$, $g \leftarrow z$ et $k \leftarrow 1$ (puisque $z \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$) :

$\exists (r, \theta) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})^2 : \forall t \in I , z(t) = r(t)e^{i\theta(t)} , \text{ avec } r(t) > 0$

En prenant la partie réelle et la partie imaginaire de l'égalité fonctionnelle $z = re^{i\theta}$, on obtient

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ , f(t) = r(t) \sin(\theta(t)) , f'(t) = r(t) \cos(\theta(t))$$

16.a) Montrer, en dérivant la relation $f = r \sin \theta$ les égalités

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ , \begin{cases} r'(t) \sin(\theta(t)) + r(t) \cos(\theta(t)) \theta'(t) = r(t) \cos(\theta(t)) & (Eq_1) \\ r'(t) \cos(\theta(t)) - r(t) \sin(\theta(t)) \theta'(t) = -(1 + q(t)) r(t) \sin(\theta(t)) & (Eq_2) \end{cases}$$

Dérivons la relation

$$f(t) = r(t) \sin(\theta(t))$$

pour obtenir

$$f'(t) = r'(t) \sin(\theta(t)) + r(t) \cos(\theta(t)) \theta'(t)$$

si bien qu'en égalant cette expression de $f'(t)$ avec $f'(t) = r(t) \cos(\theta(t))$, on obtient

$$\boxed{r'(t) \sin(\theta(t)) - r(t) \cos(\theta(t)) \theta'(t) = r(t) \cos(\theta(t))} \quad (3)$$

Dérivons la relation

$$f'(t) = r(t) \cos(\theta(t))$$

pour obtenir

$$f''(t) = r'(t) \cos(\theta(t)) - r(t) \sin(\theta(t)) \theta'(t)$$

or f étant solution de l'équation (E),

$$f''(t) = -(1 + q(t))f(t)$$

si bien qu'en remplaçant $f(t)$ par son expression en fonction de $r(t)$ et $\theta(t)$:

$$f''(t) = -(1 + q(t))r(t) \sin(\theta(t))$$

En égalant les deux expressions de $f''(t)$,

$$\boxed{r'(t) \cos(\theta(t)) - r(t) \sin(\theta(t)) \theta'(t) = -(1 + q(t))r(t) \sin(\theta(t))} \quad (4)$$

b) En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\theta'(t) = 1 + q(t) \sin^2(\theta(t)) \quad (5)$$

$$r'(t) = -q(t)r(t) \sin(\theta(t)) \cos(\theta(t)) \quad (6)$$

Effectuons les combinaisons linéaires :

★ $\cos(\theta(t))(Eq_1) - \sin(\theta(t))(Eq_2)$ pour obtenir

$$r(t) \cos^2(\theta(t)) \theta'(t) + r(t) \sin^2(\theta(t)) \theta'(t) = r(t) \cos^2(\theta(t)) + (1 + q(t))r(t) \sin^2(\theta(t))$$

d'où, puisque $\cos^2 + \sin^2 = 1$,

$$r(t) \theta'(t) = r(t) + q(t)r(t) \sin^2(\theta(t))$$

ce qui donne $\theta'(t) = 1 + q(t) \sin^2(\theta(t))$ puisque $r(t) \neq 0$.

★ $\sin(\theta(t))(Eq_1) + \cos(\theta(t))(Eq_2)$ pour obtenir

$$r'(t) \sin^2(\theta(t)) + r'(t) \cos^2(\theta(t)) \theta'(t) = r(t) \sin(\theta(t)) \cos(\theta(t)) - (1 + q(t))r(t) \cos(\theta(t)) \sin(\theta(t))$$

d'où, puisque $\cos^2 + \sin^2 = 1$,

$$r'(t) = -q(t)r(t) \cos(\theta(t)) \sin(\theta(t))$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \begin{cases} \theta'(t) &= 1 + q(t) \sin^2(\theta(t)) \\ r'(t) &= -q(t)r(t) \sin \theta(t) \cos \theta(t) \end{cases}}$$

17.a) Montrer qu'il existe un unique $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta(0) \leq n_0\pi < \theta(0) + \pi$.

★ **Existence.** En s'inspirant de la construction faite dans la question 2, posons $n_0 = \left\lceil \frac{\theta(0)}{\pi} \right\rceil$. On obtient alors, avec la même technique, $0 \leq -\theta(0) + n_0\pi < \pi$ soit aussi

$$\theta(0) \leq n_0\pi < \theta(0) + \pi$$

★ **Unicité.** Soient $(n_0, n'_0) \in \mathbb{Z}^2$ fixés quelconques tels que $\theta(0) \leq n_0\pi < \theta(0) + \pi$ et $\theta(0) \leq n'_0\pi < \theta(0) + \pi$.

Alors d'une part $\frac{\theta(0)}{\pi} \leq n_0 < \frac{\theta(0)}{\pi} + 1$ et d'autre part $\frac{\theta(0)}{\pi} \leq n'_0 < \frac{\theta(0)}{\pi} + 1$ d'où $-\frac{\theta(0)}{\pi} \geq -n'_0 > -\frac{\theta(0)}{\pi} - 1$ si bien qu'en additionnant les encadrements

$$\frac{\theta(0)}{\pi} \leq n_0 < \frac{\theta(0)}{\pi} + 1 \quad \text{et} \quad -\frac{\theta(0)}{\pi} - 1 < -n'_0 \leq -\frac{\theta(0)}{\pi}$$

on obtient

$$-1 < \underbrace{n_0 - n'_0}_{\in \mathbb{Z}} < 1 \quad \text{d'où} \quad n_0 = n'_0$$

Rmq. On peut aussi utiliser que

$$\theta(0) \leq n_0\pi < \theta(0) + \pi \iff \frac{\theta(0)}{\pi} \leq n_0 < \frac{\theta(0)}{\pi} + 1 \iff n_0 = \left\lceil \frac{\theta(0)}{\pi} \right\rceil$$

même si cette caractérisation de la partie entière supérieure n'est pas explicitement au programme.

b) Prouver que θ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $[\theta(0), +\infty[$ et en déduire que les zéros de f (c'est-à-dire les solutions $t \in \mathbb{R}_+$ de l'équation $f(t) = 0$) forment une suite $t_0 < t_1 < t_2 < \dots$ notée $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ strictement croissante que l'on exprimera en fonction de θ^{-1} , n et n_0 .

★ La fonction θ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

★ D'après la question 2,

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \theta'(t) = 1 + q(t) \sin^2(\theta(t)) \geq 1 - |q(t)| \geq 1 - \varepsilon \quad \underbrace{\qquad}_{\varepsilon \in]0, 1[} > 0$$

donc la fonction θ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

★ θ' est minorée par $1 - \varepsilon > 0$ sur $\mathbb{R}_+$ donc

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \theta(t) - \theta(0) = \int_0^t \theta'(u) du \geq \int_0^t (1 - \varepsilon) du = (1 - \varepsilon)t$$

si bien que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \theta(t) \geq \theta(0) + (1 - \varepsilon)t \quad \text{d'où} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) = +\infty$$

Ainsi le théorème de la bijection permet d'affirmer que θ réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[\theta(0), +\infty[$.

De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned}
f(t) = 0 &\iff r(t) \sin(\theta(t)) = 0 \\
&\iff \sin \theta(t) = 0 \quad \text{car } r(t) > 0 \\
&\iff \theta(t) \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \quad \text{or } \theta(\mathbb{R}_+) = [\theta(0), +\infty[\\
&\iff \theta(t) \in [\theta(0), +\infty[\cap \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \\
&\quad \text{or par construction, } n_0 \text{ est le plus petit entier tel que } \theta(0) \leq n_0\pi < \theta(0) + \pi \\
&\iff \theta(t) \in \{(n_0 + k)\pi \mid k \in \mathbb{N}\} \\
&\iff t \in \{\theta^{-1}((n_0 + k)\pi) \mid k \in \mathbb{N}\} \quad \text{car } \theta \text{ est bijective}
\end{aligned}$$

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = \theta^{-1}((n_0 + n)\pi)$.

Les zéros de f forment la suite strictement croissante:

$$(t_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\theta^{-1}((n_0 + n)\pi))_{n \in \mathbb{N}}.$$

18. Montrer, en encadrant θ' que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(1 - \varepsilon)(t_{n+1} - t_n) \leq \int_{t_n}^{t_{n+1}} \theta'(t) dt \leq (1 + \varepsilon)(t_{n+1} - t_n)$$

puis, en calculant explicitement l'intégrale ci-dessus, en déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{\pi}{1 + \varepsilon} \leq t_{n+1} - t_n \leq \frac{\pi}{1 - \varepsilon}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque.

Par hypothèse, q est à valeurs dans $[-\varepsilon, \varepsilon]$ donc

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad -\varepsilon \leq -|q(t)| \leq q(t) \sin^2(\theta(t)) \leq |q(t)| \leq \varepsilon$$

or d'après la question 2,

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \theta'(t) = 1 + q(t) \sin^2(\theta(t))$$

donc

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad 1 - \varepsilon \leq \theta'(t) \leq 1 + \varepsilon$$

si bien qu'en intégrant les 3 membres de l'encadrement ci-dessus pour $t \in [t_n, t_{n+1}]$,

$$(1 - \varepsilon)(t_{n+1} - t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} (1 - \varepsilon) dt \leq \int_{t_n}^{t_{n+1}} \theta'(t) dt \leq \int_{t_n}^{t_{n+1}} (1 + \varepsilon) dt = (1 + \varepsilon)(t_{n+1} - t_n)$$

Par ailleurs, $\int_{t_n}^{t_{n+1}} \theta'(t) dt = [\theta(t)]_{t_n}^{t_{n+1}} = \theta(t_{n+1}) - \theta(t_n) = ((n_0 + n + 1)\pi) - ((n_0 + n)\pi) = \pi$ donc

$$(1 - \varepsilon)(t_{n+1} - t_n) \leq \pi \leq (1 + \varepsilon)(t_{n+1} - t_n)$$

$$\text{d'où } \frac{\pi}{1 + \varepsilon} \leq t_{n+1} - t_n \leq \frac{\pi}{1 - \varepsilon}.$$

19. Conclure que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_0 + \frac{n\pi}{1 + \varepsilon} \leq t_n \leq t_0 + \frac{n\pi}{1 - \varepsilon}$.

Pour $n = 0$, l'encadrement attendu est immédiat.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque.

Par sommation télescopique, $t_n = t_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k)$, or

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad \frac{\pi}{1+\varepsilon} \leq t_{k+1} - t_k \leq \frac{\pi}{1-\varepsilon}$$

donc en sommant ces encadrements,

$$t_0 + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\pi}{1+\varepsilon}}_{= \frac{n\pi}{1+\varepsilon}} \leq \underbrace{t_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k)}_{= t_n} \leq \underbrace{t_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\pi}{1-\varepsilon}}_{= \frac{n\pi}{1-\varepsilon}}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_0 + \frac{n\pi}{1+\varepsilon} \leq t_n \leq t_0 + \frac{n\pi}{1-\varepsilon}$.

20. Application. Considérons une solution non identiquement nulle du problème

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad y''(t) + \left(1 + \frac{\cos t + \sin t}{2}\right) y(t) = 0, \quad y(0) = 0$$

Donner un encadrement de son $(n+1)$ -ième zéro t_n en fonction de n .

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\cos t + \sin t = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos t + \sin \frac{\pi}{4} \sin t \right) = \sqrt{2} \cos \left(t - \frac{\pi}{4} \right)$.

On peut donc appliquer le résultat de la question précédente pour $q(t) \leftarrow \frac{\cos t + \sin t}{2}$ (autorisé car cette fonction est continue sur $\mathbb{R}_+$), pour $\varepsilon \leftarrow \frac{\sqrt{2}}{2}$ (car $t \mapsto \frac{\cos t + \sin t}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \left(t - \frac{\pi}{4} \right)$ est à valeurs dans $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$) ce qui est autorisé car $\frac{\sqrt{2}}{2} \in]0, 1[$: la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des zéros de toute solution du problème (il n'est pas de Cauchy car il n'y a pas de contrainte sur $y'(0)$)

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad y''(t) + \left(1 + \frac{\cos t + \sin t}{2}\right) y(t) = 0, \quad y(0) = 0$$

vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_0 + \frac{n\pi\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \leq t_n \leq t_0 + \frac{n\pi\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ où t_0 est le premier zéro de la solution sur $\mathbb{R}_+$, or compte tenu du problème considéré : $y(0) = 0$, $t_0 = 0$ donc

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n\pi\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \leq t_n \leq \frac{n\pi\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$.