

DEVOIR SURVEILLÉ N°3

Sujet donné le samedi 22 novembre 2025, 4h.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**. Les réponses aux questions seront numérotées et séparées par un trait horizontal. Les résultats essentiels devront être encadrés ou soulignés.

BON TRAVAIL

EXERCICE

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta \, d\theta$.

1. Calculer W_0 , W_1 .

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta \, d\theta$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Etudier le signe de $f_n : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $\theta \mapsto \cos^{n+1} \theta - \cos^n \theta$. En déduire que (W_n) est décroissante. Pourquoi peut-on en déduire facilement que (W_n) est convergente.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $W_{n+2} = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos^n \theta \, d\theta$.

En déduire $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$ (★).

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = (n+1)W_{n+1}W_n$.

5. Démontrer que (I_n) est une suite constante. Quelle est sa valeur ?

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta^2 \cos^n \theta \, d\theta$.

6. Evaluer J_0 .

7. Avec deux intégrations par parties, montrer que pour tout entier n , $n \geq 2$, $W_n = \frac{n}{2} ((n-1)J_{n-2} - nJ_n)$ (★★).

8. En exploitant (★) et (★★) montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{J_{2n-2}}{W_{2n-2}} - \frac{J_{2n}}{W_{2n}} = \frac{1}{2n^2}$$

9. Montrer alors, que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} = 2 \frac{J_0}{W_0} - 2 \frac{J_{2N}}{W_{2N}}$$

10. Soit $n \in \mathbb{N}$. En exploitant l'inégalité : $\theta \leq \frac{\pi}{2} \sin \theta$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et une intégration par parties, montrer les inégalités et égalité :

$$0 \leq J_n \leq \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta \cos^n \theta \sin \theta \, d\theta = \frac{\pi}{2(n+1)} W_{n+1}$$

11. En déduire que $\left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \right)_N$ est une suite convergente. Quelle est sa limite ?

PROBLÈME

Soient I un intervalle réel non vide et non réduit à un point, p , q et h trois fonctions réelles définies et continues sur I . Pour $\mathbb{K}$ valant $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, On note $\mathcal{D}^1(I, \mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{D}^2(I, \mathbb{K})$) l'ensemble des fonctions dérivables (resp. deux fois dérivables) sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Pour tous $t_0 \in I$ et $(\alpha_0, \alpha_1) \in \mathbb{R}^2$ fixés quelconques, on admet (car cette équation est linéaire du second ordre à coefficients **non constants** et ne rentre donc pas dans le cadre du cours de MPSI) l'existence et l'unicité d'une solution réelle définie sur I au problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \forall t \in I & , & y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = h(t) \\ y(t_0) & = & \alpha_0 \\ y'(t_0) & = & \alpha_1 \end{cases} \quad (1)$$

La partie I étudie l'existence de solutions périodiques pour des équations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2. Elle est indépendante du reste du problème.

La partie II prouve un résultat technique utilisé dans la partie III.

La partie III étudie les zéros des solutions non identiquement nulles de l'équation harmonique $y'' + y = 0$ perturbée en $y'' + (1 + q)y = 0$ où q est une petite perturbation.

Partie I - Recherche de solutions périodiques

1. On considère l'équation différentielle $y' + \sin(t)y = e^{\cos(t)}$.
 - a) En détaillant la démarche, déterminer l'ensemble des solutions de cette équation différentielle.
 - b) En déduire l'ensemble des solutions qui sont 2π -périodiques.
2. On considère l'équation différentielle $y' + \sin(t)y = \sin(t)e^{-\cos(t)}$.
 - a) Déterminer l'ensemble des solutions de cette équation différentielle.
 - b) En déduire l'ensemble des solutions qui sont 2π -périodiques.

Soient $T > 0$ et a et b des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$, définies sur $\mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}$ et T -périodiques.

Considérons l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R} , \quad y'(t) + a(t)y(t) = b(t) \quad (E_1)$$

3. Montrer que, si $f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est solution de (E_1) , alors $f_T : t \mapsto f(t + T)$ est également solution de (E_1) .
4. En considérant le problème de Cauchy en 0 associé à (E_1) , montrer qu'une solution $f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ de (E_1) est T -périodique si et seulement si $f(0) = f(T)$.
- 5.a) En détaillant la démarche, déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (E_1) en fonction de A , la primitive de a qui s'annule en 0 et de la primitive B de $t \mapsto b(t)e^{A(t)}$ qui s'annule en 0.
Il s'agit de re-démontrer le résultat vu en cours décrivant l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.
 - b) Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, $e^z = 1$.
 - c) Montrer que, si $\int_0^T a(s) ds \notin 2i\pi\mathbb{Z}$, alors l'équation (E_1) admet une unique solution T -périodique.
 - d) Montrer que, si $\int_0^T a(s) ds \in 2i\pi\mathbb{Z}$, alors l'équation (E_1) admet soit aucune soit une infinité de solutions T -périodique, en fonction de la valeur de $B(T)$.
 - e) Ces résultats vous semblent-ils cohérents avec les résultats des questions 1 et 2 ?
Votre réponse devra être argumentée.
6. On considère l'équation différentielle $y'' + y = \sin^2$.
 - a) Déterminer, en détaillant votre démarche, l'ensemble des solutions à valeurs réelles de cette équation.
On pourra utiliser une formule de duplication ainsi que le principe de superposition.
 - b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation qui sont 2π -périodiques.

Soit b une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$, définie sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ et 2π périodique. Considérons maintenant l'équation différentielle :

$$\forall t \in \mathbb{R} , \quad y''(t) + y(t) = b(t) \quad (E_2)$$

Considérons la fonction s définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $s(t) = \int_0^t b(x) \sin(t - x) dx$.

7. Montrer que s est une fonction 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et solution de (E_2) . Préciser les valeurs $s(0)$ et $s'(0)$.
On pourra mettre $s(t)$ sous la forme $u(t)\cos(t) + v(t)\sin(t)$ afin de dériver rigoureusement.
8. En détaillant la démarche, déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (E_2) .
9. En considérant le problème de Cauchy en 0 associé à (E_2) , établir une CNS analogue à celle de la question 4 pour qu'une solution $f \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ de (E_2) soit 2π -périodique.
10. En déduire que les solutions de (E_2) sont 2π -périodiques si et seulement si

$$\int_0^{2\pi} b(t) \cos(t) dt = \int_0^{2\pi} b(t) \sin(t) dt = 0.$$

Partie II - Théorème du relèvement

On rappelle que I est un intervalle réel non vide et non réduit à un point, $t_0 \in I$ et $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. On note $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions k fois dérivables sur I et dont la dérivée k ème est continue.

Soit $g \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{C})$ une fonction de classe $\mathcal{C}^k$, à **valeurs complexes**, et qui **ne s'annule pas sur I** .

11. Justifier l'existence d'une fonction $A \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{C})$ telle que

$$A(t_0) = 0 \text{ et } \forall t \in I, A'(t) = \frac{g'(t)}{g(t)}$$

On donnera une expression intégrale de A en fonction de g , g' et t_0 .

12. Montrer que $\delta : t \mapsto g(t)e^{-A(t)}$ est une fonction constante.

13. En introduisant les fonction $U = \operatorname{Re}(A)$ et $V = \operatorname{Im}(A)$, montrer qu'il existe $r \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}_+^*)$ à valeurs strictement positives et $\theta \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall t \in I, g(t) = r(t)e^{i\theta(t)}.$$

On explicitera les fonctions r et θ en fonction de U , V , $r_0 = |g(t_0)|$ et $\theta_0 \in \mathbb{R}$ un argument de $g(t_0)$.

Partie III - Étude de la suite des zéros d'une solution

Étant donné x un réel, la partie entière supérieure de x , notée $[x]$, est le plus petit entier supérieur ou égal à x : $x \leq [x] < x + 1$.

14. Soit h une solution à valeurs réelles définie sur $\mathbb{R}_+$, non identiquement nulle de l'équation différentielle (appelée équation harmonique) $y'' + y = 0$.

- a) Justifier qu'il existe $(M, \phi) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tels que $\forall t \in \mathbb{R}_+, h(t) = M \sin(t + \phi)$.

- b) Posons $k_0 = \left\lceil \frac{\phi}{\pi} \right\rceil$. Montrer que $0 \leq k_0\pi - \phi < \pi$.

- c) En déduire que les zéros de h forment une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ strictement croissante que l'on explicitera en fonction de ϕ , n et k_0 .

Soient $\varepsilon \in]0, 1[$ et q une fonction **continue** définie sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs réelles dans $[-\varepsilon, \varepsilon]$.

Soit f une solution **réelle non identiquement nulle** définie sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation différentielle (E) :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, y''(t) + (1 + q(t))y(t) = 0. \quad (E)$$

Posons $z \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \rightarrow & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & f'(t) + if(t) \end{cases}$

- 15.a) Montrer, en utilisant l'unicité de la solution au problème de Cauchy admise au début du problème, que $\forall t \in \mathbb{R}_+, z(t) \neq 0$.

- b) En tant que solution d'une équation différentielle du second ordre, f appartient à $\mathcal{D}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Justifier que $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ puis qu'il existe $r \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$ et $\theta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, f(t) = r(t) \sin(\theta(t)), f'(t) = r(t) \cos(\theta(t)).$$

- 16.a) Montrer, en dérivant la relation $f = r \sin \theta$ les égalités

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \begin{cases} r'(t) \sin(\theta(t)) + r(t) \cos(\theta(t)) \theta'(t) & = & r(t) \cos(\theta(t)) \\ r'(t) \cos(\theta(t)) - r(t) \sin(\theta(t)) \theta'(t) & = & -(1 + q(t)) r(t) \sin(\theta(t)) \end{cases} \quad \begin{matrix} (Eq_1) \\ (Eq_2) \end{matrix}$$

- b) En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\theta'(t) = 1 + q(t) \sin^2(\theta(t)) \quad (2)$$

$$r'(t) = -q(t) r(t) \sin(\theta(t)) \cos(\theta(t)) \quad (3)$$

17.a) Montrer qu'il existe un unique $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta(0) \leq n_0\pi < \theta(0) + \pi$.

b) Prouver que θ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $[\theta(0), +\infty[$ et en déduire que les zéros de f (c'est-à-dire les solutions $t \in \mathbb{R}_+$ de l'équation $f(t) = 0$) forment une suite $t_0 < t_1 < t_2 < \dots$ notée $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ strictement croissante que l'on exprimera en fonction de θ^{-1} , n et n_0 .

18. Montrer, en encadrant θ' que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(1 - \varepsilon)(t_{n+1} - t_n) \leq \int_{t_n}^{t_{n+1}} \theta'(t) dt \leq (1 + \varepsilon)(t_{n+1} - t_n)$$

puis, en calculant explicitement l'intégrale ci-dessus, en déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{\pi}{1 + \varepsilon} \leq t_{n+1} - t_n \leq \frac{\pi}{1 - \varepsilon}$$

19. Conclure que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_0 + \frac{n\pi}{1 + \varepsilon} \leq t_n \leq t_0 + \frac{n\pi}{1 - \varepsilon}$.

20. Application. Considérons une solution non identiquement nulle du problème

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad y''(t) + \left(1 + \frac{\cos t + \sin t}{2}\right) y(t) = 0, \quad y(0) = 0$$

Donner un encadrement de son $(n + 1)$ -ième zéro t_n en fonction de n .