

DEVOIR SURVEILLÉ N°4
CORRECTION

Sujet donné le samedi 13 décembre 2025, 4h.

Problème

Soient $a \in \mathbb{C}$ et $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z + z^2$. On étudie dans ce problème la suite (z_n) définie par récurrence en posant

$$z_0 = a \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = f(z_n) .$$

Pour tout n entier naturel, on note respectivement x_n et y_n la partie réelle et la partie imaginaire de z_n . On note Ω l'ensemble des valeurs de la condition initiale a pour lesquelles la suite (z_n) converge.

$$\Omega = \{a \in \mathbb{C} \mid (z_n) \text{ converge}\}$$

On note I et K les points du plan d'affixes respectives $-\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{4}$.

Pour tout point M du plan d'affixe m et tout réel $r > 0$, on note respectivement $\mathcal{C}(M, r)$ et $\mathbb{D}(M, r)$ le cercle de centre M et de rayon r et le disque ouvert de centre M et de rayon r :

$$\mathcal{C}(M, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - m| = r\} \quad \text{et} \quad \mathbb{D}(M, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - m| < r\} .$$

On rappelle que, pour toute application h d'un ensemble E dans lui-même, les points fixes de h sont les éléments x de E tels que $h(x) = x$.

La Partie I établit un résultat classique et préliminaire qui sera utilisé dans la Partie III.

La Partie II se concentre sur les suites associées à certaines conditions initiales qui leur confèrent des propriétés particulières.

La Partie III étudie les suites (z_n) lorsque la condition initiale a est réelle ce qui permet de déterminer l'ensemble des nombres réels appartenant à Ω .

La partie IV propose l'étude de la convergence de la suite (z_n) sous des hypothèses particulières portant sur ses parties réelles et imaginaires, sur son module, ...

Enfin, dans la partie V, on démontre que Ω est inclus dans le disque ouvert de centre I et de rayon $\frac{1 + \sqrt{2}}{2}$.

Partie I - Préliminaire

1. Soient $\ell \in \mathbb{C}$ et (u_n) une suite de nombres complexes qui converge vers ℓ . Soit $\varepsilon > 0$.

a) Montrer qu'il existe un entier n_0 non nul et un réel c_0 tels que pour tout $n \geq n_0$,

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k - \ell \right| \leq \frac{c_0}{n} + \varepsilon .$$

Comme (u_n) converge vers ℓ , il existe un entier n_1 tel que

$$\forall n \geq n_1, |u_n - \ell| \leq \varepsilon .$$

Posons $n_0 = \max\{n_0, 1\}$ (la présence du 1 permet de garantir $n_0 \geq 1$). Soit $n \geq n_0$. D'après l'inégalité

triangulaire, et en notant $c_0 = \sum_{k=0}^{n_0-1} |u_k - \ell|$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k - \ell \right| &= \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (u_k - \ell) \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |u_k - \ell| \quad (\text{inégalité triangulaire}) \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n_0-1} |u_k - \ell| + \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n-1} |u_k - \ell| \\ &\leq \frac{c_0}{n} + \frac{n-1-n_0+1}{n} \varepsilon \\ &\leq \frac{c_0}{n} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ et $c_0 \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \geq n_0$, $\left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k - \ell \right| \leq \frac{c_0}{n} + \varepsilon$.

b) En déduire que la suite $\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ .

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{c_0}{n} = 0$, il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_2, \left| \frac{c_0}{n} \right| \leq \varepsilon.$$

Soit $n \geq \max\{n_0, n_2\}$. D'après la question précédente,

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k - \ell \right| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Ainsi,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N, \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k - \ell \right| \leq 2\varepsilon.$$

D'après la définition de la limite (quitte à reprendre le raisonnement en remplaçant ε par $\frac{\varepsilon}{2}$),

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k \right) \text{ converge vers } \ell.$$

2. On considère $L : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ continue, strictement croissante et telle que $\lim_{x \rightarrow 0} L(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} L(x) = +\infty$.

On définit alors la loi $\otimes$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\text{pour tout } a, a' \in \mathbb{R}_+^*, a \otimes a' := L^{-1}(L(a) \times L(a')).$$

Montrer que $\otimes$ est bien définie et que $(\mathbb{R}_+^*, \otimes)$ est un groupe. Est-il commutatif ?

D'après les hypothèse, en appliquant le théorème de la bijection : l'application L est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc $\otimes$ est bien définie :

$$\forall a, a' > 0, \quad L(a), L(a') \in \mathbb{R}_+^* ; L(a) \times L(a') \in \mathbb{R}_+^*$$

1 admet un antécédent par L . Notons $e = L^{-1}(1)$.

- Il s'agit bien d'une loi interne car L^{-1} est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

- La loi est associative.

Pour tout $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$:

$$(a \otimes b) \otimes c = L^{-1}(L(a) \times L(b)) \otimes c = L^{-1}(L(L^{-1}(L(a) \times L(b)) \times L(c))) = L^{-1}(L(a) \times L(b) \times L(c))$$

$$a \otimes (b \otimes c) = a \otimes L^{-1}(L(b) \times L(c)) = L^{-1}(L(a) \times L(L^{-1}(L(b) \times L(c)))) = L^{-1}(L(a) \times L(b) \times L(c))$$

- La loi est commutative (montrons-le dès maintenant). Pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+^*$,

$$a \otimes b = L^{-1}(L(a) \times L(b)) = L^{-1}(L(b) \times L(a)) = b \otimes a$$

- Elle possède un élément neutre e .

Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$,

$$a \otimes e = L^{-1}(L(a) \times L(e)) = L^{-1}(L(a) \times 1) = a = e \otimes a$$

(par commutativité)

- Tous les éléments sont inversibles : Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, par bijectivité de L , en notant $\bar{a} = L^{-1}\left(\frac{1}{L(a)}\right)$, on a :

$$a \otimes \bar{a} = L^{-1}(L(a) \times L(\bar{a})) = L^{-1}\left(L(a) \times \frac{1}{L(a)}\right) = L^{-1}(1) = e$$

$(\mathbb{R}_+^*, \otimes)$ est donc un groupe abélien ou commutatif.

Son élément neutre est $e = L^{-1}(1)$. L'inverse de a est $L^{-1}\left(\frac{1}{L(a)}\right)$

Partie II - Quelques informations sur Ω

3. Points fixes de f .

a) Si a est un point fixe de f , déterminer la suite (z_n) obtenue.

Soit a un point fixe de f . Une récurrence immédiate permet de prouver que $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n = a$ donc

$$(z_n) \text{ est la suite constante de valeur } a.$$

b) Déterminer l'ensemble des points fixes de f , noté $\text{Fix}(f)$. En déduire que Ω est non vide.

Soit $z \in \mathbb{C}$. On a les équivalences (et donc la double inclusion d'ensembles)

$$z \in \text{Fix}(f) \iff f(z) = z \iff z^2 + z = z \iff z^2 = 0 \iff z = 0$$

Ainsi,

$$\text{Fix}(f) = \{0\}.$$

D'après la question précédente, si $a = 0$, la suite (z_n) est constante, donc converge. Ainsi, $0 \in \Omega$ et

$$\Omega \text{ n'est pas vide.}$$

c) Déterminer l'ensemble $f^{-1}(\text{Fix}(f))$ des antécédents des points fixes de f . Que dire de la suite (z_n) si a appartient à cet ensemble ?

On a $z \in f^{-1}(\text{Fix}(f)) \iff f(z) \in \text{Fix}(f) \iff f(z) = 0$.

Or, $f(z) = 0 \iff z + z^2 = 0 \iff z \in \{0, -1\}$.

$$\text{Ainsi, } f^{-1}(\text{Fix}(f)) = \{-1, 0\}.$$

Soit (z_n) une suite une suite telle que $a \in f^{-1}(\text{Fix}(f))$. Alors, $z_1 = f(z_0) \in \text{Fix}(f)$ donc,

$$\forall n \geq 1, z_n = 0.$$

$$\text{Ainsi, si } a \in f^{-1}(\text{Fix}(f)), (z_n) \text{ est stationnaire à partir du rang 1.}$$

d) Déterminer l'ensemble $f^{-1}(f^{-1}(\text{Fix}(f)))$. Que dire d'une suite dont la condition initiale appartient à cet ensemble sans appartenir à $f^{-1}(\text{Fix}(f))$?

On a $z \in f^{-1}(f^{-1}(\text{Fix}(f))) \iff f(z) \in f^{-1}(\text{Fix}(f)) \iff z^2 + z \in \{-1, 0\}$.

- D'une part, $z^2 + z = 0$ équivaut à $z \in \{-1, 0\}$.
- D'autre part, $z^2 + z = -1$ équivaut à $z^2 + z + 1 = 0$, soit $z \in \{j, \bar{j}\}$.

Finalement,

$$f^{-1}(f^{-1}(\text{Fix}(f))) \in \{-1, 0, j, \bar{j}\}.$$

Soit (z_n) une suite une suite telle que $a \in f^{-1}(f^{-1}(\text{Fix}(f)))$. Alors, $z_1 = f(z_0) \in f^{-1}(\text{Fix}(f))$ donc, d'après la question précédente

$$\forall n \geq 2, z_n = 0.$$

$$\text{Ainsi, si } a \in f^{-1}(f^{-1}(\text{Fix}(f))), (z_n) \text{ est stationnaire à partir du rang 2.}$$

4. Points fixes de $f \circ f$.

a) Déterminer les points fixes de $f \circ f$.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors,

$$f \circ f(z) = f(f(z)) = f(z^2 + z) = (z^2 + z)^2 + z^2 + z = z^4 + 2z^3 + 2z^2 + z.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} z \in \text{Fix}(f \circ f) &\Leftrightarrow f \circ f(z) = z \\ &\Leftrightarrow z^4 + 2z^3 + 2z^2 + z = z \\ &\Leftrightarrow z^2(z^2 + 2z + 2) = 0. \end{aligned}$$

Comme les racines du polynôme $X^2 + 2X + 2$ sont $-1 - i$ et $-1 + i$, alors

$$\text{Fix}(f \circ f) = \{0, -1 - i, -1 + i\}.$$

b) Que dire de la suite (z_n) si a appartient à $\text{Fix}(f \circ f) \setminus \text{Fix}(f)$?

Soit $a \in \text{Fix}(f \circ f) \setminus \text{Fix}(f)$.

D'une part, $z_2 = f \circ f(z_0) = a$ car $a \in \text{Fix}(f \circ f)$. On montre ainsi par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_{2n} = a.$$

D'autre part, $z_1 = f(z_0) \neq a$ car $a \notin \text{Fix}(f)$. Ainsi, $z_1 \neq z_0$. En effectuant la même récurrence que précédemment,

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_{2n+1} = z_1.$$

Finalement,

(z_{2n}) et (z_{2n+1}) sont constantes de valeurs resp. z_0 et $f(z_0)$ donc convergent vers des limites distinctes.

c) Peut-on espérer que $\Omega = \mathbb{C}$?

D'après la question précédente, si $a = -1 - i$, alors (z_{2n}) converge vers $-1 - i$ et (z_{2n+1}) converge vers $f(-1 - i) = -1 + i$.

Ainsi, (z_{2n}) et (z_{2n+1}) convergent vers deux limites distinctes. D'après le théorème des suites extraites, (z_n) diverge.

Ainsi, $-1 - i \notin \Omega$ et

$$\Omega \neq \mathbb{C}.$$

5. Soit $a \in \mathbb{C}$. Notons (z_n) et (z'_n) les deux suites récurrentes respectivement associées aux conditions initiales a et $\bar{a}$. Comment sont reliés les termes z_n et z'_n de ces deux suites ? Quelle propriété géométrique simple peut-on en déduire concernant l'ensemble Ω ?

Montrons par récurrence que $z_n = \bar{z'_n}$.

- Initialisation. Lorsque $n = 0$. Alors, $z_0 = a$ et $z'_0 = \bar{a}$, donc $z_0 = \bar{z'_0}$.

- Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $z_n = \bar{z}'_n$. Alors, d'après les propriétés du conjugué,

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= z_n + z_n^2 \\ &= \bar{z}'_n + (z'_n)^2, \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= z'_n + \overline{(z'_n)^2} \\ &= z'_{n+1}. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après le principe de récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, z_n = \bar{z}'_n.}$$

D'après la définition, si $a \in \Omega$, alors (z_n) converge. Ainsi, $(\Re(z_n))$ et $(\Im(z_n))$ convergent. Alors, $(\Re(z_n) - i\Im(z_n))$ converge, donc $(\bar{z}_n)$ converge.

Ainsi, en reprenant les notations du point précédent, $(z'_n) = (\bar{z}_n)$ converge. Donc, $\bar{a} \in \Omega$.

La réciproque se démontre de la même manière, donc

$$a \in \Omega \Leftrightarrow \bar{a} \in \Omega.$$

Ainsi,

$$\boxed{\Omega \text{ est symétrique par rapport à l'axe réel.}}$$

Partie III - Étude des suites (z_n) lorsque $a \in \mathbb{R}$

Dans cette partie, on suppose que **la condition initiale a est un nombre réel**. L'objectif est de déterminer $\Omega \cap \mathbb{R}$.

6. Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq x$. En déduire que (z_n) est croissante.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(x) - x = (x + x^2) - x = x^2 \geq 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geq x}$$

Comme $z_0 = a \in \mathbb{R}$ et que $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, alors la suite (z_n) est bien définie et à valeurs réelles.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $z_{n+1} = f(z_n) \geq z_n$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la suite } (z_n) \text{ est croissante.}}$$

7. Cas $a \in]-1, 0[$.

a) Justifier que $f(]-1, 0[) \subset]-1, 0[$ puis que, si $a \in]-1, 0[$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, z_n \in]-1, 0[$.

La fonction f est un polynôme de degré 2 qui s'annule en -1 et 0 , son graphe est donc une parabole d'axe $x = -\frac{1}{2}$ dont les branches infinies sont tournées vers le haut.

Ainsi, d'après les propriétés sur les variations des trinômes, f est strictement décroissante sur $\left] -\infty, -\frac{1}{2} \right]$ et strictement croissante sur $\left] -\frac{1}{2}, +\infty \right[$.

Comme $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$, on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$-\frac{1}{4}$	0	$+\infty$

On a alors $f\left(\left[-1, -\frac{1}{2}\right]\right) = \left[f\left(-\frac{1}{2}\right), f(-1)\right] = \left[\frac{-1}{4}, 0\right]$.

On a alors $f\left(\left[-\frac{1}{2}, 0\right]\right) = \left[f\left(-\frac{1}{2}\right), f(0)\right] = \left[\frac{-1}{4}, 0\right]$.

Ainsi

$$f\left(]-1, 0[\right) = \left] \frac{-1}{4}, 0 \right[\subset]-1, 0[$$

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n : z_n \in]-1, 0[$.

- $z_0 = a \in]-1, 0[$, par hypothèse. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Ainsi, $z_n \in]-1, 0[$. Donc, d'après la première partie de la question : $z_{n+1} = f(z_n) \in]-1, 0[$.

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

D'après le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_n \in]-1, 0[.$$

b) En déduire que (z_n) converge et calculer sa limite.

D'après la première question (sans hypothèse supplémentaire), (z_n) est croissante.

Dans ce cas présent, $z_0 = a \in]-1, 0[$. Ainsi, d'après la question précédente, (z_n) est majorée par 0.

D'après le théorème de la limite monotone,

$$(z_n) \text{ est une suite convergente.}$$

Notons ℓ , la limite de (z_n) .

Alors, comme (z_{n+1}) est une suite extraite de (z_n) , elle converge également vers ℓ .

Donc $(f(z_n))$ converge vers ℓ , mais aussi vers $f(\ell)$ par continuité de f (polynomiale) en ℓ .

Ainsi, par unicité de la limite : $f(\ell) = \ell$, donc $\ell + \ell^2 = \ell$ i.e. $\ell^2 = 0$ et donc $\ell = 0$.

$$\text{Ainsi, } (z_n) \text{ a pour limite } 0.$$

c) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{z_n}$. Justifier que (u_n) est bien définie puis montrer que $(u_{n+1} - u_n)$ converge.

D'après la question ??, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n \in]0, 1[$.

La suite (z_n) ne s'annulant jamais, la suite (u_n) est bien définie.

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{z_{n+1}} - \frac{1}{z_n} = \frac{1}{z_n(1+z_n)} - \frac{1}{z_n} = \frac{1 - (1+z_n)}{z_n(1+z_n)} = \frac{-1}{1+z_n}$$

On sait que $(z_n) \rightarrow 0$, donc par addition et passage à l'inverse :

$$(u_{n+1} - u_n) = \left(\frac{-1}{1+z_n} \right) \text{ est une suite convergente. Et } \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = \frac{-1}{1+0} = -1.$$

d) En déduire, en utilisant le résultat de la question ?? que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -n$ puis donner un équivalent de (z_n) .

On considère la suite (a_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = u_{n+1} - u_n$.

D'après la question précédente, (a_n) est une suite qui converge vers -1 .

D'après le théorème de Cesaro prouvé dans la partie I, la suite dont le n -ième terme est

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (u_{k+1} - u_k) = \frac{1}{n} (u_n - u_0)$$

converge également vers -1 .

Ainsi, par addition de suites convergentes,

$$\frac{u_n}{n} = \frac{u_n - u_0}{n} + \frac{u_0}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -1 \quad \text{donc} \quad \frac{u_n}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -1.$$

Alors,

$$\boxed{u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -n}$$

En remplaçant u_n par $\frac{1}{z_n}$ et en passant à l'inverse :

$$\boxed{z_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{n}}$$

8. Cas $a \in]0, +\infty[$.

a) Justifier que $f(]0, +\infty[) \subset]0, +\infty[$. Montrer, en procédant par l'absurde et en utilisant sa monotonie, que (z_n) diverge vers $+\infty$.

On a vu en question ?? que f est strictement croissante sur $\left] \frac{-1}{2}, +\infty \right[$, donc sur $]0, +\infty[$.

Elle a pour image : $f(]0, +\infty[) =]f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[=]0, +\infty[$. Ainsi,

$$\boxed{f(]0, +\infty[) \subset]0, +\infty[}$$

Par récurrence, on démontre donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n \in]0, +\infty[$.

D'après la question ??, (z_n) est croissante. D'après le théorème de la limite monotone,

- ou bien (z_n) est majorée et (z_n) est convergente,
- ou bien (z_n) n'est pas majorée et elle diverge vers $+\infty$.

Supposons que (z_n) soit majorée, donc convergente. Notons $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n$. Comme dans la question ??, ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$ et $\ell \in [0, +\infty[$.

On a donc $\ell^2 = 0$ donc $\ell = 0$.

Or, $z_0 = a > 0$ et (z_n) croissante, donc $z_n \geq z_0 = a > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi, en passant à la limite dans l'inégalité ci-dessus $\ell \geq a > 0$. Tout cela est impossible.

Par conséquent, (z_n) ne converge pas,

$$\boxed{\text{donc } (z_n) \text{ diverge vers } +\infty.}$$

b) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{\ln(z_n)}{2^n}$. Montrer que (v_n) est croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après les définitions,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{\ln(z_{n+1})}{2^{n+1}} - \frac{\ln(z_n)}{2^n} \\ &= \frac{\ln(z_n + z_n^2) - 2 \ln(z_n)}{2^{n+1}} \\ &= \frac{\ln(z_n + z_n^2) - \ln(z_n^2)}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

Or, d'après la question précédente, $z_n \geq 0$, donc $z_n + z_n^2 \geq z_n^2$. Comme la fonction $\ln$ est croissante,

$$v_{n+1} - v_n \geq 0.$$

La suite (v_n) est donc croissante.

c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n \leq \frac{1}{2^{n+1}z_n} \leq \frac{1}{2^{n+1}a}$.

On pourra utiliser l'inégalité de convexité-concavité : $\forall t \in]-1, +\infty[, \ln(1+t) \leq t$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $z_n > 0$, alors $z_n \neq 0$ et

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^{n+1}} (\ln(z_{n+1}) - 2 \ln(z_n)) = \frac{1}{2^{n+1}} \ln \left(\frac{z_n + z_n^2}{z_n^2} \right) = \frac{1}{2^{n+1}} \ln \left(1 + \frac{1}{z_n} \right)$$

Puis comme $z_n > 0$, on peut appliquer l'inégalité de convexité/concavité donnée dans l'énoncé :

$$v_{n+1} - v_n \leq \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{z_n}$$

car $2^{n+1} > 0$. Enfin, par croissance de (z_n) et donc décroissance de $(1/z_n)$, $\frac{1}{z_n} \leq \frac{1}{a}$

$$v_{n+1} - v_n \leq \frac{1}{2^{n+1}a}$$

d) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq \ln a + \frac{1}{a} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right)$.

On peut alors exploiter les sommes télescopiques. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n - v_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}a} = \frac{1}{2a} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{a} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right)$$

Ainsi, comme $v_0 = \frac{\ln z_0}{2^0} = \ln a$, on trouve

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \leq \ln a + \frac{1}{a} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right)$$

e) Conclure que (v_n) converge. Nous noterons $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

On a vu que la suite (v_n) est croissante.

D'après la question précédente, (v_n) est majorée par $\ln a + \frac{1}{a}$, car $\frac{1}{2^na} > 0$.

Il s'agit donc d'une suite croissante et majorée donc

(v_n) est convergente.

f) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $v_{n+p} - v_n \leq \frac{1}{2^n z_n} \left(1 - \frac{1}{2^p}\right)$ et en déduire que $0 \leq \ell - v_n \leq \frac{1}{2^n z_n}$.

Reprenons l'encadrement qui nous a permis de répondre à la question ?? :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad v_{k+1} - v_k \leq \frac{1}{2^{k+1} z_k}$$

Puis effectuons un calcul sommatoire, télescopique. Pour $n, p \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+p} - v_n = \sum_{k=n}^{n+p-1} (v_{k+1} - v_k) \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{1}{2^{k+1} z_k}$$

Puis par croissance de $(z_k)_k$ donc décroissance de $\left(\frac{1}{z_k}\right)_k$, pour tout $k \in \llbracket n, n+p-1 \rrbracket$, $\frac{1}{z_k} \leq \frac{1}{z_n}$.

Ainsi :

$$v_{n+p} - v_n \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{1}{2^{k+1} z_n} = \frac{1}{2^{n+1} z_n} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^p}{1 - \frac{1}{2}}$$

$\forall n, p \in \mathbb{N}, \quad v_{n+p} - v_n \leq \frac{1}{2^n z_n} \left(1 - \frac{1}{2^p}\right)$

On fait ensuite, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, tendre $p \rightarrow +\infty$ dans les deux inégalité ci dessus (ce qui est autorisé car tous les termes sont convergents)

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \underbrace{0 \leq v_{n+p} - v_n}_{(v_n) \text{ est croissante}} \leq \frac{1}{2^n z_n} \left(1 - \frac{1}{2^p}\right)$$

pour obtenir

$0 \leq \ell - v_n \leq \frac{1}{2^n z_n} (1 - 0) = \frac{1}{2^n z_n}$

g) Établir que $2^n(\ell - v_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(1)$ puis, en exprimant z_n en fonction de v_n , calculer un équivalent de z_n . Cet équivalent dépendra de ℓ .

D'après la question précédente, on a l'inégalité :

$$0 \leq 2^n(\ell - v_n) \leq \frac{1}{z_n}$$

Or $(z_n) \rightarrow +\infty$, donc $\left(\frac{1}{z_n}\right) \rightarrow 0$. Le théorème de convergence par encadrement (et qui donne également la limite), permet d'affirmer que $(2^n(\ell - v_n))_n$ converge et a pour limite 0.

Avec les notations de domination, cela s'écrit exactement :

$$\boxed{2^n(\ell - v_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(1)}$$

En remplaçant v_n par $\frac{\ln z_n}{2^n}$, on trouve donc :

$$\ln z_n - 2^n \ell \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(1)$$

Attention, il faut être adroit ici, car on ne peut pas composer par exp dans les équivalents !!

On a donc : $\ln z_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 2^n \ell + o(1)$. On compose l'égalité par la fonction exponentielle :

$$z_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \exp(2^n \ell + o(1)) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \exp(2^n \ell) \times \exp(o(1))$$

Or $\exp(o(1))$ est une suite qui converge vers $\exp(0) = 1$ (par composition du passage à la limite avec $\exp$ continue en 0) donc $\frac{z_n}{\exp(2^n \ell)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$

$$\boxed{z_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{2^n \ell}}$$

On note $L : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, $a \mapsto \ell = \lim(v_n)$. On démontre alors que L est continue et strictement croissante avec $L(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}_+^*$. Ainsi (cf. préliminaires), on peut munir $\mathbb{R}_+^*$ d'une loi de groupe naturellement intéressante pour étudier les propriétés asymptotiques de (z_n) en fonction de son germe a .

9. Cas $a \in]-\infty, -1[$.

Notons (z'_n) la suite récurrente obtenue avec la condition initiale $z'_0 = f(a)$. En déterminant le signe de $f(a)$, conclure sur la nature de la suite (z_n) .

Par ailleurs, l'étude des variations de f effectuée dans la question ??, permet d'affirmer que f est décroissante sur $] -\infty, -1[$, à valeurs dans $]f(-1), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[=]0, +\infty[$.

Donc $f(a) \in]0, +\infty[$ et donc $(z'_n)_n$ est une suite qui possède sa condition initiale dans $]0, +\infty[$ donc, d'après les questions précédentes, elle diverge vers $+\infty$.

$$\boxed{\text{La suite } (z'_n)_n \text{ et donc } (z_n)_{n \geq 1} \text{ et donc } (z_n) \text{ sont divergentes vers } +\infty.}$$

10. Faire le bilan de la limite de la suite (z_n) en fonction de $a \in \mathbb{R}$ et déterminer $\Omega \cap \mathbb{R}$.

Bilan :

- Si $a \in]-\infty, -1[$, (z_n) diverge vers $+\infty$.
- Si $a = -1$, $z_n = 0$, pour tout $n \geq 1$, donc (z_n) converge vers 0.
- Si $a \in]-1, 0[$, (z_n) converge vers 0.

- Si $a = 0$, $z_n = 0$, pour tout $n \geq 0$, donc (z_n) converge vers 0.
- Si $a \in]0, +\infty[$, (z_n) diverge vers $+\infty$.

Ainsi, puisque $\Omega = \{a \in \mathbb{C} \mid (z_n) \text{ converge}\}$, on peut affirmer

$$\Omega \cap \mathbb{R} = [-1, 0]$$

Partie IV - Comportements de la suite (z_n) sous certaines hypothèses

Nous revenons au cas général de la suite complexe (z_n) définie par $z_0 = a$ et, pour tout n entier, $z_{n+1} = f(z_n)$. Nous exploiterons ici largement les résultats de la partie II.

On rappelle que, sauf mention du contraire, les hypothèses formulées dans une question ne sont valables que dans la question concernée.

11. En supposant que la suite (z_n) converge, déterminer sa limite.

Puisque (z_n) converge, notons ℓ sa limite. La suite extraite (z_{n+1}) converge également vers ℓ .

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = z_n^2 + z_n$.

Or $z_n^2 \rightarrow \ell^2$ et $z_n \rightarrow \ell$, donc par addition : $z_{n+1} \rightarrow \ell^2 + \ell$.

Enfin, comme la limite est unique, ℓ vérifie donc $\ell = \ell^2 + \ell$ et donc $\ell^2 = 0$.

$$\text{Si } (z_n) \text{ converge, alors sa limite est } \ell = 0.$$

12. On suppose que la suite $w = (z_{2n})$ converge et on note $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} z_{2n}$.

a) Déterminer une relation de récurrence satisfaite par w .

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$w_{n+1} = z_{2(n+1)} = z_{2n+2} = f(z_{2n+1}) = f \circ f(z_{2n}) = (f \circ f)(w_n)$$

Or $f \circ f : z \mapsto z^4 + 2z^3 + 2z^2 + z$ donc une relation de récurrence est :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = (f \circ f)(w_n) = w_n^4 + 2w_n^3 + 2w_n^2 + w_n.$$

b) En déduire les valeurs possibles de sa limite ℓ .

Comme précédemment, par extraction, par unicité des limites et par convergence par multiplication et addition :

Si (w_n) converge vers ℓ , alors nécessairement ℓ vérifie :

$$f \circ f(\ell) = \ell$$

Ainsi, d'après les questions précédentes, $\ell \in \text{Fix}(f \circ f)$, soit

$$\ell \in \{0, -1 - i, -1 + i\}.$$

c) Montrer que (z_{2n+1}) converge et déterminer sa limite en fonction de celle de (z_{2n}) .

Soit $n \in \mathbb{N}$.

D'après la définition, $z_{2n+1} = f(z_{2n}) = z_{2n}^2 + z_{2n}$.

D'après les propriétés des limites, (z_{2n+1}) converge donc vers $\ell^2 + \ell = f(\ell)$.

Or, $\ell \in \{0, -1 - i, -1 + i\}$, et

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(-1 + i) &= (-1 + i)^2 + (-1 + i) = -2i - 1 + i = -1 - i, \\ f(-1 - i) &= (-1 - i)^2 + (-1 - i) = 2i - 1 - i = -1 + i. \end{aligned}$$

Finalement,

$$(z_{2n+1})_n \text{ est également convergente et } \lim_{n \rightarrow +\infty} (z_{2n+1}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \lim(z_{2n}) = 0 \\ -1 - i & \text{si } \lim(z_{2n}) = -1 + i \\ -1 + i & \text{si } \lim(z_{2n}) = -1 - i \end{cases}.$$

d) Sous l'hypothèse de convergence de (z_{2n}) , peut-on affirmer que la suite (z_n) converge ?

Non. Posons $a = -1 + i$. Alors, d'après la question ??, (z_{2n}) converge vers $-1 + i$.

Or, d'après la question précédente, (z_{2n+1}) converge vers $-1 - i$.

Ainsi, (z_{2n}) et (z_{2n+1}) sont deux suites extraites de (z_n) qui convergent vers deux limites distinctes, donc (z_n) diverge.

Sous l'hypothèse de convergence de (z_{2n}) , on ne peut pas affirmer que (z_n) converge, en toute généralité.

13. On suppose que les suites (x_n) et $(|y_n|)$ convergent vers des nombres notés x et y_+ respectivement.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Établir des relations de récurrence permettant d'exprimer x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n .

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$z_{n+1} = z_n^2 + z_n = (x_n + iy_n)^2 + (x_n + iy_n) = (x_n^2 - y_n^2 + x_n) + i(2x_n y_n + y_n)$$

Donc en identifiant partie réelle et imaginaire, on trouve

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + x_n \\ y_{n+1} = (2x_n + 1)y_n \end{cases}$$

b) Montrer que les valeurs possibles de (x, y_+) sont $(0, 0)$ et $(-1, 1)$.

Puisque $(|y_n|) \rightarrow y_+$, alors $y_n^2 = |y_n|^2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} y_+^2$ (on rappelle que $y_n \in \mathbb{R}$).

Et ainsi, par addition, $x_{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x^2 - y_+^2 + x$. Et par extraction, cette limite est x .

On a donc la relation $x = x^2 - y_+^2 + x$ donc $x^2 = y_+^2$.

Par ailleurs, $|y_{n+1}| = |2x_n + 1| \times |y_n| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} |2x + 1|y_+$. Et donc pour les mêmes raisons :

$$y_+ = |2x + 1|y_+, \text{ ainsi } y_+(1 - |1 + 2x|) = 0.$$

Finalement :

- ou bien $y_+ = 0$ et donc $x^2 = 0$ donc $x = 0$,
- ou bien $y_+ \neq 0$ et donc $1 - |1 + 2x| = 0$, d'où $|1 + 2x| = 1$,

★ $1 + 2x = 1 \iff x = 0$ et donc $y_+ = 0$,

★ $1 + 2x = -1 \iff x = -1$ donc $y_+^2 = x^2 = 1$, or $y_+ \geq 0$ (puisque $(|y_n|)$ est positif pour tout n) donc $y_+ = 1$.

Ainsi :

les valeurs possibles de (x, y_+) sont $(0, 0)$ et $(-1, 1)$.

c) Soit (r_n) une suite réelle telle que

- $(|r_n|)$ converge vers $r_+ \in \mathbb{R}$,
- il existe une suite réelle (ε_n) qui converge vers -1 telle que $\forall n \in \mathbb{N}, r_{n+1} = \varepsilon_n r_n$.

(i) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, r_{2n+2} = \varepsilon_{2n+1} \varepsilon_{2n} r_n$ et en déduire qu'il existe un rang N à partir duquel tous les termes de la suite (r_{2n}) ont le même signe.

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$r_{2n+2} = \varepsilon_{2n+1} r_{2n+1} = \varepsilon_{2n+1} \varepsilon_{2n} r_{2n}$$

La suite (ε_n) converge vers -1 , donc

$$\forall \eta > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N, |\varepsilon_n - (-1)| \leq \eta$$

En prenant $\eta = \frac{1}{2}$, il existe donc N tel que pour tout $n \geq N$:

$$-\frac{1}{2} \leq \varepsilon_n + 1 \leq \frac{1}{2} \text{ donc } -\frac{3}{2} \leq \varepsilon_n \leq -\frac{1}{2}$$

Ainsi pour tout $n \geq N, \varepsilon_n < 0$.

Et donc, pour tout $m \geq N$ (optimisable en $\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1$), $2m \geq N$ et $2m+1 \geq N$ donc

$$r_{2m+2} = \underbrace{\varepsilon_{2m+1}}_{<0} \underbrace{\varepsilon_{2m}}_{<0} r_{2m} \quad \text{donc } r_{2m} \text{ et } r_{2m+2} \text{ ont le même signe.}$$

Il existe un rang N à partir duquel tous les termes de la suite (r_{2n}) ont le même signe.

(ii) Conclure que (r_{2n}) puis (r_{2n+1}) convergent et établir des liens entre leurs limites respectives et la limite r_+ de $(|r_n|)$.

Considérons N , rang à partir duquel la suite (r_{2n}) est de signe constant.

Notons $\rho := \begin{cases} 1 & \text{si } r_{2N} \geq 0 \\ -1 & \text{si } r_{2N} < 0 \end{cases}$ de sorte que $|r_{2N}| = \rho r_{2N}$ et également $r_{2N} = \rho |r_{2N}|$.

Enfin, comme tous les termes de $(r_{2n})_{n \geq N}$ ont même signe : $\forall n \geq N, r_{2n} = \rho |r_{2n}|$.

Puis, la suite $(|r_n|)$ converge vers r_+ , donc la suite extraite $|r_{2n}|$ également.

Ainsi, (r_{2n}) converge vers ρr_+ .

Comme $(\varepsilon_n) \rightarrow -1$, en tant que produit de suites convergentes, $(r_{2n+1}) = (\varepsilon_{2n} r_{2n})$ converge vers $-\rho r_+$.

Ainsi, $(r_{2n})_n$ et $(r_{2n+1})_n$ sont convergentes et ont des limites opposées : l'une vaut r_+ et l'autre vaut $-r_+$.

d) Établir que les suites (z_{2n}) et (z_{2n+1}) convergent. On pourra traiter séparément le cas où $(x, y_+) = (0, 0)$ et celui où $(x, y_+) = (-1, 1)$ et préciser dans chacun d'eux si la suite (z_n) converge ou pas.

- Cas où $(x, y_+) = (-1, 1)$.

On a alors la suite $(|y_n|)$ qui converge vers 1, et $y_{n+1} = \varepsilon_n y_n$ avec $\varepsilon_n = 2x_n + 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2(-1) + 1 = -1$.

On se trouve dans le cas étudié dans la question précédente ce qui permet d'affirmer que (y_{2n}) et (y_{2n+1}) convergent, l'une vers -1 et l'autre vers 1 .

Ainsi (z_{2n}) converge vers $-1 + i$ (ou $-1 - i$) et (z_{2n+1}) converge vers $-1 - i$ (ou $-1 + i$).

La suite (z_n) ne converge pas car elle a deux valeurs d'adhérence distinctes.

- Cas où $(x, y_+) = (0, 0)$.

Alors $(|y_n|)$ converge vers 0 et donc comme pour tout $n \in \mathbb{N} : -|y_n| \leq y_n \leq |y_n|$,

le théorème de convergence par encadrement permet d'affirmer que (y_n) converge vers 0.

Ainsi (z_n) converge vers $0 + i \times 0 = 0$

Si $(x, y_+) = (-1, 1)$, (z_n) ne converge pas, (z_{2n}) et (z_{2n+1}) convergent l'une vers $1 + i$ et l'autre vers $1 - i$.
Si $(x, y_+) = (0, 0)$, (z_n) converge vers 0.

14. On suppose que la suite $(|z_n|)$ converge vers $r \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que $(|1 + z_n|)$ converge vers 1. On pourra relier $|z_{n+1}|$ à $|1 + z_n|$ et distinguer deux cas selon que r est nul ou pas.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z_{n+1}| = |z_n + z_n^2| = |z_n(1 + z_n)| = |z_n||1 + z_n|$.

Les suites $(|z_n|)$ et $(|z_{n+1}|)$ convergent toutes les deux vers r .

★ Si $r = 0$, alors la suite $(|z_n|)$ converge vers 0 donc la suite (z_n) converge vers 0 donc la suite $(1 + z_n)$ converge vers $1 + 0$ donc la suite $(|1 + z_n|)$ converge vers $|1| = 1$.

★ Sinon, $r \neq 0$ donc, en appliquant la définition de la convergence pour $\varepsilon \leftarrow \frac{r}{2}$ (autorisé car $\frac{r}{2} > 0$), à partir d'un certain rang N , tous les termes de la suite ont un module $\geq \frac{r}{2}$, ce qui permet d'écrire

$$\forall kn \geq N, |1 + z_n| = \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{r}{r} = 1 \quad (\text{quotient de suites convergentes})$$

donc $(|1 + z_n|)_n$ converge vers 1.

Dans tous les cas, $(|1 + z_n|)$ converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (|1 + z_n|) = 1$.

b) En déduire que (x_n) et $(|y_n|)$ convergent.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|1 + z_n|^2 = (1 + x_n)^2 + (y_n)^2 = 1 + x_n^2 + 2x_n + y_n^2 = 1 + |z_n|^2 + 2x_n.$$

$$\text{Ainsi, } x_n = \frac{1}{2} (|1 + z_n|^2 - 1 - |z_n|^2) \longrightarrow \frac{1}{2} (1 - 1 - r^2) = -\frac{r^2}{2}.$$

Puis $y_n^2 = |z_n|^2 - x_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} r^2 - \frac{r^4}{4}$, et donc $|y_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{r}{2} \sqrt{4 - r^2}$ (on a $r \geq 0$ comme limite d'une suite de réels ≥ 0).

Ainsi, (x_n) et $(|y_n|)$ convergent.

c) Déterminer les valeurs possibles de la limite r de $(|z_n|)$. En utilisant les résultats des questions de la partie I, montrer que ces valeurs sont effectivement atteintes.

On suppose que $(|z_n|)$ converge vers r .

D'après la question précédente, (x_n) converge vers $x = -\frac{r^2}{2}$ et $(|y_n|)$ converge vers $y_+ = \frac{r}{2}\sqrt{4-r^2}$.

Or, les seuls couples de limites possibles pour (x, y_+) sont $(0, 0)$ et $(-1, 1)$.

- Si $(x, y_+) = (0, 0)$, alors $r = 0$.
- Si $(x, y_+) = (-1, 1)$, alors $r^2 = 2$ et $r\sqrt{4-r^2} = 1$ donc $r \geq 0$ donc $r = \sqrt{2}$.

Ainsi,

$r \in \{0, \sqrt{2}\}.$

On a vu précédemment que,

- ★ si $a = 0$, alors (z_n) converge vers 0.
- ★ si $a = -1 + i$, alors (z_{2n}) et (z_{2n+1}) sont constantes et respectivement égales à $-1 + i$ et $-1 - i$, ce qui donne une suite $(|z_n|)$ constante de valeur $\sqrt{2}$.

Ainsi, les deux valeurs 0 et $\sqrt{2}$ sont bien atteintes.

15. On suppose que la suite $\left(z_n + \frac{1}{2}\right)$ converge vers un réel noté d .

a) Soit $r \in \mathbb{R}_+$. Calculer, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $f\left(-\frac{1}{2} + re^{i\theta}\right)$. En déduire que $f(\mathcal{C}(I, r)) = \mathcal{C}(K, r^2)$.

Notons $z = -\frac{1}{2} + re^{i\theta}$. D'après la définition de f ,

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{2} + re^{i\theta} + \left(-\frac{1}{2} + re^{i\theta}\right)^2 \\ &= -\frac{1}{4} + r^2 e^{2i\theta}. \end{aligned}$$

- Soit $z \in \mathcal{C}(I, r)$. Alors, $-\frac{1}{2}$ étant l'affixe de I , $z - \left(-\frac{1}{2}\right)$ est un complexe de module r si bien qu'il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que

$$z - \left(-\frac{1}{2}\right) = re^{i\theta} \iff z = -\frac{1}{2} + re^{i\theta}$$

Le calcul ci-dessus montre que $\left|f(z) + \frac{1}{4}\right| = |r^2 e^{2i\theta}| = r^2$ donc $\left|f(z) - \left(-\frac{1}{4}\right)\right| = r^2$ si bien que $z \in \mathcal{C}(K, r^2)$.

- Réciproquement, soit $u \in \mathcal{C}(K, r^2)$. Alors, $-\frac{1}{4}$ étant l'affixe de K , $u - \left(-\frac{1}{4}\right)$ est un complexe de module r^2 donc il existe $\psi \in [0, 2\pi[$ tel que $u = -\frac{1}{4} + r^2 e^{i\psi}$. Posons $z = -\frac{1}{2} + re^{i\frac{\psi}{2}}$.

D'une part, $\left|z - \left(-\frac{1}{2}\right)\right| = |re^{i\frac{\psi}{2}}| = r$ donc $z \in \mathcal{C}(I, r)$,

d'autre part, le calcul ci-dessus montre que

$$f(z) = -\frac{1}{4} + r^2 e^{2i\frac{\psi}{2}} = -\frac{1}{4} + r^2 e^{i\psi} \quad \text{donc} \quad f(z) = u$$

d'où, $u \in f(\mathcal{C}(I, r))$.

Ainsi, $f(\mathcal{C}(I, r)) = \mathcal{C}(K, r^2)$.

b) Exprimer, à l'aide de la question précédente, la suite $\left(\left|z_n + \frac{1}{4}\right|\right)$ en fonction de la suite $\left(\left|z_n + \frac{1}{2}\right|\right)$ et déterminer sa nature.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Posons $r = \left|z_n + \frac{1}{2}\right|$ de sorte que $z_n \in \mathcal{C}(I, r)$.

D'après la question précédente, $f(\mathcal{C}(I, r)) = \mathcal{C}(K, r^2)$ donc $z_{n+1} = f(z_n) \in \mathcal{C}(K, r^2)$ si bien que

$$\left|z_{n+1} + \frac{1}{4}\right| = \left|f(z_n) + \frac{1}{4}\right| = r^2 = \left|z_n + \frac{1}{2}\right|^2$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|z_n + \frac{1}{4}\right| = \left|z_{n-1} + \frac{1}{2}\right|^2$, donc $\left(\left|z_n + \frac{1}{4}\right|\right)$ converge vers d^2 .

Remarque : il est aussi possible d'obtenir le résultat directement sans utiliser la question précédente. D'après la définition de la suite (z_n) ,

$$\left|z_{n+1} + \frac{1}{4}\right| = \left|z_n + z_n^2 + \frac{1}{4}\right| = \left|z_n + \frac{1}{2}\right|^2.$$

Ainsi, comme $\left(\left|z + \frac{1}{2}\right|\right)$ converge vers d , alors

$\left(\left|z_n + \frac{1}{4}\right|\right)$ converge vers d^2 .

c) En déduire la nature des suites (x_n) et $(|y_n|)$.

Observons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \left|z_n + \frac{1}{2}\right|^2 &= \left(x_n + \frac{1}{2}\right)^2 + y_n^2, \\ \left|z_n + \frac{1}{4}\right|^2 &= \left(x_n + \frac{1}{4}\right)^2 + y_n^2, \end{aligned}$$

donc par différence,

$$\begin{aligned} \left|z_n + \frac{1}{2}\right|^2 - \left|z_n + \frac{1}{4}\right|^2 &= \underbrace{\left(x_n + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(x_n + \frac{1}{4}\right)^2}_{= \frac{x_n}{2} + \frac{3}{16}} \\ &= \frac{x_n}{2} + \frac{3}{16} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} x_n &= 2 \left(\left|z_n + \frac{1}{2}\right|^2 - \left|z_n + \frac{1}{4}\right|^2 - \frac{3}{16} \right), \\ y_n^2 &= \left|z_n + \frac{1}{2}\right|^2 - \left(x_n + \frac{1}{2}\right)^2, \\ |y_n| &= \sqrt{\left|z_n + \frac{1}{2}\right|^2 - \left(x_n + \frac{1}{2}\right)^2}. \end{aligned}$$

D'après les propriétés de convergence de combinaisons linéaires de suites convergentes et de continuité de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que les suites (x_n) et $(|y_n|)$ convergent.

d) En déduire les valeurs possibles de la limite d de $\left(z_n + \frac{1}{2}\right)$. Ces valeurs sont-elles atteintes ?

Lorsque (x_n) et $(|y_n|)$ convergent, nous avons vu que les couples de limites possibles sont $(0, 0)$ et $(-1, 1)$.

★ Supposons que $|x_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $|y_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, alors

$$\left|z_n + \frac{1}{2}\right| = \sqrt{\left(x_n + \frac{1}{2}\right)^2 + y_n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\left(0 + \frac{1}{2}\right)^2 + 0^2} = \frac{1}{2}$$

★ Supposons que $|x_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -1$ et $|y_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, alors

$$\left|z_n + \frac{1}{2}\right| = \sqrt{\left(x_n + \frac{1}{2}\right)^2 + y_n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\left(-1 + \frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{5}{4}}$$

Ainsi, $d \in \left\{\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$.

On a vu précédemment que,

★ si $a = 0$, alors (z_n) converge vers 0 donc $\left(z_n + \frac{1}{2}\right)$ converge vers $\frac{1}{2}$.

★ si $a = -1 + i$, alors (z_{2n}) et (z_{2n+1}) sont constantes et respectivement égales à $-1 + i$ et $-1 - i$, ce qui donne une suite $\left(z_n + \frac{1}{2}\right)$ constante égale à $\frac{\sqrt{5}}{2}$ donc elle converge vers $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Ainsi, les deux valeurs $\frac{1}{2}$ et $\frac{\sqrt{5}}{2}$ sont bien atteintes.

Partie V - Ω est une partie bornée contenant un certain ensemble Δ

Considérons l'ensemble Δ défini par

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid -1 < \operatorname{Re}(z) < 0, \operatorname{Im}(z)^2 < \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Re}(z) + 1\}.$$

16.a) Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $-1 < a < 0$ et $b^2 < -a$. Montrer que $a + ib$ appartient à Δ .

★ Comme $-1 < a < 0$, la première condition $-1 < \operatorname{Re}(a + ib) < 0$ est satisfaite.

★ De plus, $(1 + a)^2 \geq 0$, donc $1 + a + a^2 \geq -a$. Par conséquent, $b^2 < -a \leq 1 + a + a^2$ donc $\operatorname{Im}(a + ib)^2 < \operatorname{Re}(a + ib)^2 + \operatorname{Re}(a + ib) + 1$ si bien que la seconde condition est satisfaite.

Ainsi, $a + ib \in \Delta$.

b) Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $z = x + iy \in \Delta$. Posons $X = \operatorname{Re}(f(z))$ et $Y = \operatorname{Im}(f(z))$. Montrer que $-1 < X < 0$ et $Y^2 + X = (4y^2 + 1)(x + x^2)$ puis en déduire que $f(z) \in \Delta$.
Nous venons de prouver que $f(\Delta) \subset \Delta$.

Par définition

$$f(z) = (x + iy)^2 + x + iy = x^2 + x - y^2 + iy(1 + 2x) \quad \text{donc} \quad \begin{cases} X &= x^2 + x - y^2 \\ Y &= y(1 + 2x) \end{cases}$$

★ D'une part, $z = x + iy \in \Delta$ donc $-1 < x < 0$ donc $x < 0$ et $1 + x > 0$ si bien que

$$X = \underbrace{x(1+x)}_{<0} \underbrace{-y^2}_{\leq 0} < 0$$

D'autre part, $z = x + iy \in \Delta$ donc $\operatorname{Im}(z)^2 < \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Re}(z) + 1$ donc $y^2 < x^2 + x + 1$ ce qui garantit

$$X = x^2 + x - y^2 > -1$$

Par conséquent, $-1 < X < 0$.

★

$$\begin{aligned} Y^2 + X &= y^2(1 + 2x)^2 + x + x^2 - y^2 \\ &= y^2(1 + 4x^2 + 4x) + x + x^2 - y^2 \\ &= y^2(4(x + x^2)) + x + x^2 \\ &= (4y^2 + 1)(x + x^2) \end{aligned}$$

Or $x + x^2 = x(1 + x) < 0$ (vu dans le premier point) et $4y^2 + 1 > 0$ donc $Y^2 + X = (4y^2 + 1)(x + x^2) < 0$ si bien que $Y^2 < -X$.

Les deux résultats obtenus ci-dessus permettent d'appliquer le résultat de la question précédente pour $(a, b) \leftarrow (X, Y)$ afin de conclure que $X + iY \in \Delta$.

Ainsi, $f(z) = X + iY \in \Delta$.

On admet que, pour tout $z \in \Delta$, $|f(z) + 1| < 1$.

Proposons une preuve du résultat admis par l'énoncé.

Soit $z \in \Delta$. Posons $x = \operatorname{Re}(z)$ et $y = \operatorname{Im}(z)$. On a

$$f(z) + 1 = (x^2 + x + 1 - y^2) + iy(1 + 2x)$$

$$\begin{aligned} |f(z) + 1|^2 &= (x^2 + x + 1 - y^2)^2 + y^2(1 + 2x)^2 \\ &= (x^2 + x + 1)^2 + y^4 - 2y^2(x^2 + x + 1) + y^2(1 + 4x + 4x^2) \\ &= (x(x + 1) + 1)^2 + y^4 - 2y^2(x(x + 1) + 1) + y^2(1 + 4x(x + 1)) \\ &= 1 + x^2(x + 1)^2 + 2x(x + 1) + y^4 - 2y^2x(x + 1) - 2y^2 + y^2 + 4y^2x(x + 1) \\ &= 1 + x^2(x + 1)^2 + 2x(x + 1) + y^4 - y^2 + 2y^2x(x + 1) \\ &= 1 + x(x + 1)(x(x + 1) + 2 + 2y^2) + y^4 - y^2 \\ &= 1 + x(x + 1)(x^2 + x + 2 + 2y^2) + y^2(y^2 - 1) \end{aligned}$$

Or l'appartenance de z à Δ donne

$$\star \quad x \in]-1, 0[\quad \text{donc} \quad \underbrace{x}_{<0} \underbrace{(1+x)}_{>0} < 0,$$

$$\star y^2 < x^2 + x + 1 \text{ donc } x^2 + x + 2 + 2y^2 = \underbrace{x^2 + x + 1}_{> y^2 > 0} + \underbrace{1 + 2y^2}_{> 0} > 0,$$

$$\star y^2 < x^2 + x + 1 \text{ donc } y^2 < \underbrace{x(x+1)}_{< 0} + 1 < 1 \text{ donc } y^2(y^2 - 1) < 0,$$

par conséquent,

$$|f(z) + 1|^2 = 1 + \underbrace{\underbrace{x(x+1)}_{< 0} \underbrace{(x^2 + x + 2 + 2y^2)}_{> 0}}_{< 0} + \underbrace{y^2(y^2 - 1)}_{< 0} < 1$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall z \in \Delta, |f(z) + 1|^2 < 1.}$$

17. Soit $a \in \Delta$.

a) Justifier que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ $z_n \in \Delta$ puis, en étudiant la quantité $\frac{|z_{n+2}|}{|z_{n+1}|}$, montrer que la suite $(|z_n|)$ est strictement décroissante à partir du rang 1.

★ La stabilité de Δ par f ($f(\Delta) \subset \Delta$) permet d'établir par récurrence en considérant la propriété $\mathcal{P}(\cdot)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\mathcal{P}(n) : z_n \in \Delta$, que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, z_n \in \Delta, \text{ or } 0 \notin \Delta \text{ donc } z_n \neq 0.}$$

★ Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{|z_{n+2}|}{|z_{n+1}|} = \frac{|z_{n+1}| |1 + z_{n+1}|}{|z_{n+1}|} = |1 + f(z_n)| < 1 \text{ d'après le résultat admis par l'énoncé puisque } z_n \in \Delta.$$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z_{n+2}| < |z_{n+1}|$ donc

$$\boxed{\text{la suite } (|z_n|) \text{ est strictement décroissante à partir du rang 1.}}$$

b) Conclure que $\Delta \subset \Omega$.

Soit $a \in \Delta$.

★ D'après la question précédente, la suite $(|z_n|)$ est décroissante à partir du rang 1, or elle est minorée (par 0, c'est une suite de modules) donc elle converge. Nous pouvons donc utiliser la conclusion de la question ?? qui établit, sous cette hypothèse que $r = \lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n|$ vérifie $r \in \{0, \sqrt{2}\}$.

★ Pour tout complexe z de Δ , en posant $x = \operatorname{Re}(z)$ et $y = \operatorname{Im}(z)$, l'appartenance à Δ impose $-1 < x < 0$ donc $|x| < 1$ et $y^2 < \underbrace{x(1+x)}_{< 0} + 1 < 1$ donc $|y| < \sqrt{1} = 1$ (par stricte croissance de la fonction racine

carrée). Par conséquent, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} < \sqrt{2}$.

Ainsi, Δ est inclus dans le disque ouvert de centre 0 et de rayon $\sqrt{2}$.

★ La suite $(|z_n|)$ étant décroissante à partir du rang 1,

$$\forall n \geq 1, |z_n| \leq |z_1|$$

si bien qu'en passant à la limite sur cette inégalité lorsque $n \rightarrow +\infty$ ce qui est autorisé car les deux membres convergent, $r \leq |z_1|$.

Or la suite est confinée dans Δ , donc $|z_1| < \sqrt{2}$ si bien que $r < \sqrt{2}$.

Par conséquent $r = 0$ ce qui signifie que la suite (z_n) converge (vers 0 mais ce n'est pas utile).

Ainsi, $\Delta \subset \Omega$.

18. Posons $r_0 = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$. L'objectif de cette question est de montrer que $\Omega \subset \mathbb{D}(I, r_0)$.

a) Justifier que, pour tout réel $r \geq r_0$, $r^2 - r - \frac{1}{4} \geq 0$.

La recherche des racines du trinôme du second degré $X^2 - X - \frac{1}{4}$ de discriminant 2 montre qu'il possède 2 racines réelles :

$$r'_0 = \frac{1 - \sqrt{2}}{2} < \frac{1 + \sqrt{2}}{2} = r_0$$

si bien que pour tout $r \geq r_0$, $r^2 - r - \frac{1}{4}$ est l'évaluation d'un trinôme du second degré à coefficient dominant positif en dehors du segment délimité par ses racines réelles ce qui donne une quantité positive ou nulle.

Ainsi, $\forall r \geq r_0, r^2 - r - \frac{1}{4} \geq 0$.

b) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z \notin \mathbb{D}(I, r_0)$. Montrer que $f(z) \notin \mathbb{D}(I, r_0)$. On pourra poser $r = \left| z + \frac{1}{2} \right|$ et utiliser le résultat de la question 15.a.

Posons $r = \left| z + \frac{1}{2} \right|$.

L'hypothèse $z \notin \mathbb{D}(I, r_0)$ est équivalente à $r = \left| z + \frac{1}{2} \right| \geq r_0$. Or le calcul effectué dans la question 15.a. établit que $\left| f(z) + \frac{1}{4} \right| = r^2$ si bien qu'en utilisant le caractère 1-lipschitzien du module (ce qui découle de l'inégalité triangulaire)

$$\begin{aligned} \left| f(z) + \frac{1}{2} \right| &= \left| f(z) + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right| \\ &\geq \left| \left| f(z) + \frac{1}{4} \right| - \left| \frac{1}{4} \right| \right| \\ &\geq \left| f(z) + \frac{1}{4} \right| - \frac{1}{4} \\ &\geq r^2 - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Or $r \geq r_0$ donc (question précédente) $r^2 - \frac{1}{4} \geq r$ si bien que

$$\left| f(z) + \frac{1}{2} \right| \geq r^2 - \frac{1}{4} \geq r \geq r_0$$

Ainsi, $f(z) \notin \mathbb{D}(I, r_0)$.

c) Conclure.

Nous venons de prouver dans la question précédente que l'ensemble $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}(I, r_0)$ est stable par f ce qui signifie que toute suite dont la condition initiale appartient à cet ensemble reste dans cet ensemble.

Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}(I, r_0)$. Supposons par l'absurde que $a \in \Omega$. Alors la suite (z_n) étant confinée dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}(I, r_0)$,

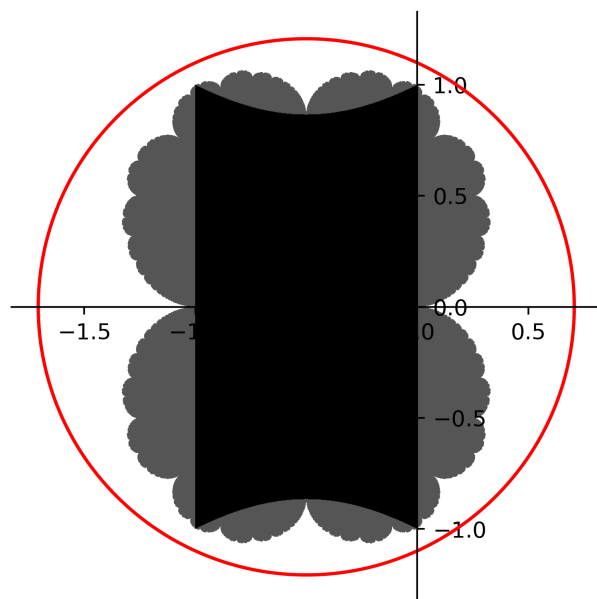
$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| z_n + \frac{1}{2} \right| \geq r_0$$

Or $a \in \Omega$ donc la suite (z_n) converge, donc elle converge vers 0, si bien qu'en passant à la limite dans l'inégalité ci-dessus

$$\left| 0 + \frac{1}{2} \right| \geq r_0 \quad \text{donc} \quad \frac{1}{2} \geq r_0 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ce qui est une contradiction.

Ainsi, $\Omega \subset \mathbb{D}(I, r_0)$.



En plus foncé l'ensemble Δ , en gris Ω et le cercle $\mathcal{C}(I, r_0)$. La frontière de Ω est un ensemble fractale dont on peut obtenir une représentation approchée grâce à des logiciels de calcul.