

DEVOIR SURVEILLÉ N°4

Sujet donné le samedi 13 décembre 2025, 4h.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

La notation tiendra particulièrement compte de la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées. Les réponses aux questions seront numérotées et séparées par un trait horizontal. Les résultats essentiels devront être encadrés ou soulignés.

BON TRAVAIL

Problème

Soient $a \in \mathbb{C}$ et $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z + z^2$. On étudie dans ce problème la suite (z_n) définie par récurrence en posant

$$z_0 = a \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = f(z_n).$$

Pour tout n entier naturel, on note respectivement x_n et y_n la partie réelle et la partie imaginaire de z_n .

On note Ω l'ensemble des valeurs de la condition initiale a pour lesquelles la suite (z_n) converge.

$$\Omega = \{a \in \mathbb{C} \mid (z_n) \text{ converge}\}$$

On note I et K les points du plan d'affixes respectives $-\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{4}$.

Pour tout point M du plan d'affixe m et tout réel $r > 0$, on note respectivement $\mathcal{C}(M, r)$ et $\mathbb{D}(M, r)$ le cercle de centre M et de rayon r et le disque ouvert de centre M et de rayon r :

$$\mathcal{C}(M, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - m| = r\} \quad \text{et} \quad \mathbb{D}(M, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - m| < r\}.$$

On rappelle que, pour toute application h d'un ensemble E dans lui-même, les points fixes de h sont les éléments x de E tels que $h(x) = x$.

La Partie I établit un résultat classique et préliminaire qui sera utilisé dans la Partie III.

La Partie II se concentre sur les suites associées à certaines conditions initiales qui leur confèrent des propriétés particulières.

La Partie III étudie les suites (z_n) lorsque la condition initiale a est réelle ce qui permet de déterminer l'ensemble des nombres réels appartenant à Ω .

La partie IV propose l'étude de la convergence de la suite (z_n) sous des hypothèses particulières portant sur ses parties réelles et imaginaires, sur son module, ...

Enfin, dans la partie V, on démontre que Ω est inclus dans le disque ouvert de centre I et de rayon $\frac{1 + \sqrt{2}}{2}$.

Partie I - Préliminaire

1. Soient $\ell \in \mathbb{C}$ et (u_n) une suite de nombres complexes qui converge vers ℓ . Soit $\varepsilon > 0$.

a) Montrer qu'il existe un entier n_0 non nul et un réel c_0 tels que pour tout $n \geq n_0$,

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k - \ell \right| \leq \frac{c_0}{n} + \varepsilon.$$

b) En déduire que la suite $\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ .

2. On considère $L : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ continue, strictement croissante et telle que $\lim_{x \rightarrow 0} L(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} L(x) = +\infty$.

On définit alors la loi $\otimes$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\text{pour tout } a, a' \in \mathbb{R}_+^*, a \otimes a' := L^{-1}(L(a) \times L(a')).$$

Montrer que $\otimes$ est bien définie et que $(\mathbb{R}_+^*, \otimes)$ est un groupe. Est-il commutatif ?

Partie II - Quelques informations sur Ω

3. Points fixes de f .

- a) Si a est un point fixe de f , déterminer la suite (z_n) obtenue.
- b) Déterminer l'ensemble des points fixes de f , noté $\text{Fix}(f)$. En déduire que Ω est non vide.
- c) Déterminer l'ensemble $f^{-1}(\text{Fix}(f))$ des antécédents des points fixes de f . Que dire de la suite (z_n) si a appartient à cet ensemble ?
- d) Déterminer l'ensemble $f^{-1}(f^{-1}(\text{Fix}(f)))$. Que dire d'une suite dont la condition initiale appartient à cet ensemble sans appartenir à $f^{-1}(\text{Fix}(f))$?

4. Points fixes de $f \circ f$.

- a) Déterminer les points fixes de $f \circ f$.
- b) Que dire de la suite (z_n) si a appartient à $\text{Fix}(f \circ f) \setminus \text{Fix}(f)$?
- c) Peut-on espérer que $\Omega = \mathbb{C}$?

5. Soit $a \in \mathbb{C}$. Notons (z_n) et (z'_n) les deux suites récurrentes respectivement associées aux conditions initiales a et $\bar{a}$. Comment sont reliés les termes z_n et z'_n de ces deux suites ? Quelle propriété géométrique simple peut-on en déduire concernant l'ensemble Ω ?

Partie III - Étude des suites (z_n) lorsque $a \in \mathbb{R}$

Dans cette partie, on suppose que la condition initiale a est un nombre réel. L'objectif est de déterminer $\Omega \cap \mathbb{R}$.

6. Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq x$. En déduire que (z_n) est croissante.

7. Cas $a \in]-1, 0[$.

- a) Justifier que $f(]-1, 0[) \subset]-1, 0[$ puis que, si $a \in]-1, 0[$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n \in]-1, 0[$.
- b) En déduire que (z_n) converge et calculer sa limite.
- c) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{z_n}$. Justifier que (u_n) est bien définie puis montrer que $(u_{n+1} - u_n)$ converge.
- d) En déduire, en utilisant le résultat de la question 1 que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -n$ puis donner un équivalent de (z_n) .

8. Cas $a \in]0, +\infty[$.

- a) Justifier que $f(]0, +\infty[) \subset]0, +\infty[$. Montrer, en procédant par l'absurde et en utilisant sa monotonie, que (z_n) diverge vers $+\infty$.
- b) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{\ln(z_n)}{2^n}$. Montrer que (v_n) est croissante.
- c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n \leq \frac{1}{2^{n+1}z_n} \leq \frac{1}{2^{n+1}a}$.
On pourra utiliser l'inégalité de convexité-concavité : $\forall t \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+t) \leq t$.
- d) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq \ln a + \frac{1}{a} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$.
- e) Conclure que (v_n) converge. Nous noterons $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.
- f) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $v_{n+p} - v_n \leq \frac{1}{2^n z_n} \left(1 - \frac{1}{2^p}\right)$ et en déduire que $0 \leq \ell - v_n \leq \frac{1}{2^n z_n}$.
- g) Établir que $2^n(\ell - v_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(1)$ puis, en exprimant z_n en fonction de v_n , calculer un équivalent de z_n . Cet équivalent dépendra de ℓ .

On note $L : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, $a \mapsto \ell = \lim(v_n)$. On démontre alors que L est continue et strictement croissante avec $L(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}_+^*$. Ainsi (cf. préliminaires), on peut munir $\mathbb{R}_+^*$ d'une loi de groupe naturellement intéressante pour étudier les propriétés asymptotiques de (z_n) en fonction de son germe a .

9. Cas $a \in]-\infty, -1[$.

Notons (z'_n) la suite récurrente obtenue avec la condition initiale $z'_0 = f(a)$. En déterminant le signe de $f(a)$, conclure sur la nature de la suite (z_n) .

10. Faire le bilan de la limite de la suite (z_n) en fonction de $a \in \mathbb{R}$ et déterminer $\Omega \cap \mathbb{R}$.

Partie IV - Comportements de la suite (z_n) sous certaines hypothèses

Nous revenons au cas général de la suite complexe (z_n) définie par $z_0 = a$ et, pour tout n entier, $z_{n+1} = f(z_n)$. Nous exploiterons ici largement les résultats de la partie II.

On rappelle que, sauf mention du contraire, les hypothèses formulées dans une question ne sont valables que dans la question concernée.

11. En supposant que la suite (z_n) converge, déterminer sa limite.

12. On suppose que la suite $w = (z_{2n})$ converge et on note $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} z_{2n}$.

- a) Déterminer une relation de récurrence satisfaite par w .
- b) En déduire les valeurs possibles de sa limite ℓ .
- c) Montrer que (z_{2n+1}) converge et déterminer sa limite en fonction de celle de (z_{2n}) .
- d) Sous l'hypothèse de convergence de (z_{2n}) , peut-on affirmer que la suite (z_n) converge ?

13. On suppose que les suites (x_n) et $(|y_n|)$ convergent vers des nombres notés x et y_+ respectivement.

- a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Établir des relations de récurrence permettant d'exprimer x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n .
- b) Montrer que les valeurs possibles de (x, y_+) sont $(0, 0)$ et $(-1, 1)$.
- c) Soit (r_n) une suite réelle telle que

- $(|r_n|)$ converge vers $r_+ \in \mathbb{R}$,
- il existe une suite réelle (ε_n) qui converge vers -1 telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $r_{n+1} = \varepsilon_n r_n$.

(i) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $r_{2n+2} = \varepsilon_{2n+1} \varepsilon_{2n} r_n$ et en déduire qu'il existe un rang N à partir duquel tous les termes de la suite (r_{2n}) ont le même signe.

(ii) Conclure que (r_{2n}) puis (r_{2n+1}) convergent et établir des liens entre leurs limites respectives et la limite r_+ de $(|r_n|)$.

d) Établir que les suites (z_{2n}) et (z_{2n+1}) convergent. On pourra traiter séparément le cas où $(x, y_+) = (0, 0)$ et celui où $(x, y_+) = (-1, 1)$ et préciser dans chacun d'eux si la suite (z_n) converge ou pas.

14. On suppose que la suite $(|z_n|)$ converge vers $r \in \mathbb{R}$.

- a) Montrer que $(1 + z_n)$ converge vers 1. On pourra relier $|z_{n+1}|$ à $|1 + z_n|$ et distinguer deux cas selon que r est nul ou pas.
- b) En déduire que (x_n) et $(|y_n|)$ convergent.
- c) Déterminer les valeurs possibles de la limite r de $(|z_n|)$. En utilisant les résultats des questions de la partie I, montrer que ces valeurs sont effectivement atteintes.

15. On suppose que la suite $\left(\left| z_n + \frac{1}{2} \right| \right)$ converge vers un réel noté d .

- a) Soit $r \in \mathbb{R}_+$. Calculer, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $f\left(-\frac{1}{2} + re^{i\theta}\right)$. En déduire que $f(\mathcal{C}(I, r)) = \mathcal{C}(K, r^2)$.
- b) Exprimer, à l'aide de la question précédente, la suite $\left(\left| z_n + \frac{1}{4} \right| \right)$ en fonction de la suite $\left(\left| z_n + \frac{1}{2} \right| \right)$ et déterminer sa nature.
- c) En déduire la nature des suites (x_n) et $(|y_n|)$.
- d) En déduire les valeurs possibles de la limite d de $\left(\left| z_n + \frac{1}{2} \right| \right)$. Ces valeurs sont-elles atteintes ?

Partie V - Ω est une partie bornée contenant un certain ensemble Δ

Considérons l'ensemble Δ défini par

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid -1 < \operatorname{Re}(z) < 0, \operatorname{Im}(z)^2 < \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Re}(z) + 1\}.$$

16.a) Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $-1 < a < 0$ et $b^2 < -a$. Montrer que $a + ib$ appartient à Δ .

b) Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $z = x + iy \in \Delta$. Posons $X = \operatorname{Re}(f(z))$ et $Y = \operatorname{Im}(f(z))$. Montrer que $-1 < X < 0$ et $Y^2 + X = (4y^2 + 1)(x + x^2)$ puis en déduire que $f(z) \in \Delta$.

Nous venons de prouver que $f(\Delta) \subset \Delta$.

On admet que, pour tout $z \in \Delta$, $|f(z) + 1| < 1$.

17. Soit $a \in \Delta$.

- a) Justifier que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ $z_n \in \Delta$ puis, en étudiant la quantité $\frac{|z_{n+2}|}{|z_{n+1}|}$, montrer que la suite $(|z_n|)$ est strictement décroissante à partir du rang 1.
- b) Conclure que $\Delta \subset \Omega$.

18. Posons $r_0 = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$. L'objectif de cette question est de montrer que $\Omega \subset \mathbb{D}(I, r_0)$.

- a) Justifier que, pour tout réel $r \geq r_0$, $r^2 - r - \frac{1}{4} \geq 0$.
- b) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z \notin \mathbb{D}(I, r_0)$. Montrer que $f(z) \notin \mathbb{D}(I, r_0)$. On pourra poser $r = \left| z + \frac{1}{2} \right|$ et utiliser le résultat de la question 15.a.
- c) Conclure.