

## DEVOIR SURVEILLÉ N°5

Sujet donné le samedi 17 janvier 2026, 4h.

**L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.**

La notation tiendra particulièrement compte de la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées. Les réponses aux questions seront numérotées et séparées par un trait horizontal. Les résultats essentiels devront être encadrés ou soulignés.

BON TRAVAIL

### QUELQUES RÉSULTATS SUR LES NOMBRES PREMIERS

Dans tout le problème,  $\mathcal{P}$  désigne l'ensemble des nombres premiers. Pour tout  $n$  entier naturel non nul, on note  $\mathcal{P}_n$  l'ensemble des nombres premiers inférieurs ou égaux à  $n$ . Par exemple,  $\mathcal{P}_8 = \{2, 3, 5, 7\}$  et  $\mathcal{P}_{11} = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ .

En notant  $\mathcal{P}_n = \{p_1, \dots, p_k\}$ , la notation  $\prod_{p \in \mathcal{P}_n} p$  désigne le produit  $\prod_{j=1}^k p_j$ . Plus généralement, si  $I$  est un intervalle borné de  $\mathbb{R}$ , la notation  $\prod_{\substack{p \in I \\ p \in \mathcal{P}}} p$  désigne le produit de tous les nombres premiers appartenant à l'intervalle  $I$ .

On rappelle la notation d'Iverson, pour une propriété  $\mathcal{Q}$  donnée :  $[\mathcal{Q}] = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{Q} \text{ vraie} \\ 0 & \text{si } \mathcal{Q} \text{ faux} \end{cases}$ .

On exploite cette notation pour interpréter  $\sum_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \leq x}} f(p)$  sous la forme  $\sum_{p \in \mathbb{N}} f(p) [p \in \mathcal{P} \text{ et } p \leq x]$ . Ainsi, par extension :

$$\sum_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ 5 < p \leq 11}} f(p) = f(7) + f(11) , \quad \sum_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ 2 \leq p \leq \sqrt{20}}} f(p) = f(2) + f(3) , \quad \sum_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ 3 < p \leq \sqrt{20}}} f(p) = 0 .$$

On utilise les conventions habituelles : une somme indexée par un ensemble vide est nulle, un produit indexé par un ensemble vide vaut 1.

Dans tout le problème, pour tout ensemble fini  $X$ , la notation  $|X|$  désigne le cardinal de l'ensemble  $X$ , c'est-à-dire le nombre de ses éléments.

## Partie I - Résultats préliminaires d'analyse

1. Soient  $u, v$  et  $w$  trois suites réelles telles que  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$  et  $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(w_n)$ .

Redémontrer alors que  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(w_n)$ .

2. Soient  $\lambda, \mu$  deux réels strictement positifs et  $\varphi_{\lambda, \mu} \left| \begin{array}{ccc} ]0, +\infty[ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \ln x - \lambda x + \mu \end{array} \right.$ .

a) Étudier les variations de  $\varphi_{\lambda, \mu}$  et donner le tableau correspondant avec les limites aux bords du domaine de définition.

b) Montrer que, pour tout entier naturel  $n > e^\mu$  il existe une unique solution à l'équation d'inconnue  $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\varphi_{\lambda, \mu}(x) = \ln(n)$$

On notera  $x_n$  cette solution pour  $n \geq n_0 = \lfloor e^\mu \rfloor + 1$ .

c) Montrer que la suite  $(x_n)_{n \geq n_0}$  est croissante puis déterminer sa limite.

d) Justifier que  $x_n \ln(x_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$ . En déduire un équivalent de  $\ln(x_n)$  et conclure que  $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{\ln(\ln(n))}$ .

3.a) Montrer que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $k \geq 2$ ,  $\int_{k-1}^k \ln(t) dt \leq \ln(k)$  puis en déduire que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  supérieur ou égal à 1 :

$$n \ln(n) - n + 1 \leq \ln(n!) \leq n \ln(n)$$

b) En déduire un équivalent de  $(\ln(n!))$ .

## Partie II - Résultats préliminaires d'arithmétique

On considère un entier  $n \geq 2$  et un nombre premier  $p$ . On rappelle que, pour tout  $a$  entier,  $v_p(a)$  désigne la valuation  $p$ -adique de  $a$ , c'est-à-dire le plus grand entier naturel  $k$  tel que  $p^k$  divise  $a$ .

4. Pour tout entier  $k \geq 0$ , on considère les sous-ensembles finis  $U_k$ ,  $\overline{U_k}$  et  $\Omega_k$  de  $\mathbb{N}$  définis par :

$$U_k = \{a \in \{1, 2, \dots, n\} \mid p^k \text{ divise } a\} \text{ et } \overline{U_k} = \{a \in \{1, 2, \dots, n\} \mid p^k \text{ ne divise pas } a\}$$

$$\Omega_k = \{a \in \{1, 2, \dots, n\} \mid v_p(a) = k\}$$

a) Justifier qu'il existe un plus grand entier  $k_p \geq 0$  tel que  $p^{k_p} \leq n$ . Montrer que  $k_p \geq 0$  et expliciter  $k_p$  en fonction de  $n$  et  $p$ . On exploitera la fonction partie entière.

b) Montrer que pour tout  $k \in \{0, \dots, k_p\}$ , l'ensemble  $U_{k+1}$  est strictement inclus dans  $U_k$  et que pour  $k > k_p$ ,  $U_k = \emptyset$ .

c) Prouver que la famille des parties  $(\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_{k_p})$  forme une partition de l'ensemble  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

d) Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\Omega_k = U_k \cap \overline{U_{k+1}}$ .

e) Calculer, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $|U_k|$ ,  $|\overline{U_k}|$ , puis  $|\Omega_k|$  en fonction de  $n$  et de  $p$ .

f) Montrer que  $v_p(n!) = \sum_{k=0}^{k_p} k |\Omega_k|$  et en déduire la formule de LEGENDRE

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$$

Il s'agit d'une somme finie, car les termes sont nuls à partir du rang  $k_p + 1$ .

5. On s'intéresse maintenant à la valuation du coefficient binomial :  $v_p \left( \binom{2n}{n} \right)$ .

a) En utilisant les questions précédentes, déterminer une expression de  $v_p \left( \binom{2n}{n} \right)$  faisant intervenir une somme de parties entières.

b) Montrer que  $v_p \left( \binom{2n}{n} \right) \leq \left\lfloor \frac{\ln(2n)}{\ln p} \right\rfloor$

c) Soit  $k$  tel que  $p^k$  divise  $\binom{2n}{n}$ . Montrer alors que  $p^k \leq 2n$ .

## Partie III - Estimation du nombre de diviseurs premiers

Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on note  $\omega(n)$  le nombre d'entiers premiers distincts qui divisent  $n$ .

On a  $\omega(1) = 0$ ,  $\omega(2) = 1$ ,  $\omega(3) = 1$ ,  $\omega(4) = 1$ ,  $\omega(6) = 2$ , ...

6. Donner le tableau des valeurs  $\omega(n)$  pour  $n \in \llbracket 10, 19 \rrbracket$ .

Donner sans justification les plus petits entiers  $n$  tels que  $\omega(n) = 3$  et  $\omega(n) = 4$ .

7. Montrer que  $\omega : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$  est surjective et que toutes les valeurs de  $\mathbb{N}$  admettent une infinité d'antécédents sauf une à préciser.

8. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Justifier que  $n \geq 2^{\omega(n)}$  (pour le cas  $n \geq 2$ , on pourra introduire  $q_1 < q_2 < \dots < q_{\omega(n)}$  les  $\omega(n)$  facteurs premiers de  $n$  et les utiliser pour exprimer  $n$ ).

En déduire une majoration de  $\omega(n)$  explicite en fonction de  $n$ .

Écrire ce résultat sous la forme  $\omega(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(u_n)$ , où  $u_n$  est une suite simple qui s'exprime à l'aide des fonctions usuelles. Ce résultat est une estimation asymptotique de  $\omega(n)$ .

9. En déduire un encadrement du nombre de diviseurs premiers distincts d'un entier  $n$  compris entre 2 et  $2^{20} = 1\,048\,576$ .

10. Amélioration de l'estimation asymptotique de  $\omega(n)$ .

a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $n \geq 2$ . Soient  $q_1 < q_2 < \dots < q_{\omega(n)}$  les  $\omega(n)$  facteurs premiers de  $n$ .

Montrer que

$$n \geq \prod_{k=1}^{\omega(n)} q_k \geq 2 \prod_{k=2}^{\omega(n)} (2k-1)$$

b) En exprimant le minorant de  $n$  obtenu dans la question précédente comme un quotient de deux factorielles, montrer que

$$\ln(n) \geq \ln((2\omega(n))!) - \ln(\omega(n)!) - (\omega(n) - 1) \ln 2$$

c) En utilisant les estimations de la question 1, montrer que

$$\ln(n) \geq \varphi_{\lambda, \mu}(\omega(n))$$

pour des valeurs de  $\lambda$  et  $\mu$  que l'on précisera.

d) En déduire que  $\omega(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{\ln(n)}{\ln(\ln(n))}\right)$ .

## Partie IV - Majoration du PPCM des $n$ premiers entiers

11. Soit  $r \in \mathbb{N}^*$ . Soient  $a_1, a_2, \dots, a_r$  des entiers naturels non nuls.

a) Justifier qu'il existe un unique entier naturel  $d \in \mathbb{N}^*$  tel que

$$a_1\mathbb{Z} \cap a_2\mathbb{Z} \cap \dots \cap a_r\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$$

On pourra étudier la nature de la structure algébrique  $a_1\mathbb{Z} \cap a_2\mathbb{Z} \cap \dots \cap a_r\mathbb{Z}$ .

b) Montrer que le nombre  $\mu$  est le plus petit entier naturel non nul qui est divisible par tous les entiers  $a_1, a_2, \dots, a_r$ . Le nombre  $\mu$  s'appelle le plus petit commun multiple de  $a_1, a_2, \dots, a_r$ , on le note  $\text{PPCM}(a_1, a_2, \dots, a_r)$ .

12. Soit  $n$  un entier naturel non nul. On note  $M_n = \text{PPCM}(1, 2, \dots, n)$ . On rappelle que, pour tout entier  $p$  premier, en utilisant les définitions de la Partie II,  $k_p = \max \{k \in \mathbb{N} \mid p^k \leq n\}$ .

a) Calculer  $M_2$ ,  $M_3$  et  $M_4$ .

b) Montrer que

$$M_n \leq n! \tag{1}$$

Cette majoration est relativement grossière et les questions suivantes permettront de l'améliorer.

c) Montrer que  $M_n = \prod_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} p^{k_p}$ .

On note  $\pi(n)$  le cardinal de l'ensemble  $\mathcal{P}_n$  des nombres premiers inférieurs ou égaux à  $n$ .

d) En déduire que

$$M_n \leq n^{\pi(n)} \tag{2}$$

## Partie V - Encadrement de la fonction $\pi$

Dans toute la suite,  $n$  désigne un entier naturel non nul. On rappelle que  $\pi(n)$  est le cardinal de l'ensemble  $\mathcal{P}_n$  des nombres premiers inférieurs ou égaux à  $n$ .

**13.** L'objectif de cette question est de majorer  $\prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \leq n}} p$  en fonction de  $n$ .

a) Soient  $a$  et  $b$  deux entiers tels que  $0 < \frac{b}{2} \leq a < b$ . Montrer que le produit  $\prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ a < p \leq b}} p$  divise l'entier  $\binom{b}{a}$ .

b) En déduire que pour tout  $m \geq 1$ ,  $\prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ m+1 < p \leq 2m+1}} p$  divise  $\binom{2m+1}{m+1}$ .

c) Comparer, pour  $m \geq 1$ , les entiers  $\binom{2m+1}{m}$  et  $\binom{2m+1}{m+1}$  puis en développant  $(1+1)^{2m+1}$ , montrer que  $\binom{2m+1}{m} \leq 4^m$ .

d) Montrer que, pour tout  $m \geq 1$ ,  $\prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ m+1 < p \leq 2m+1}} p \leq 4^m$ .

e) Montrer que  $\prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \leq n}} p \leq 4^n$ .

On pourra prouver par récurrence la propriété  $\mathcal{Q}(\cdot)$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  par

$$\mathcal{Q}(n) : \ll \forall k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket, \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \leq k}} p \leq 4^k \gg$$

**14.** Justifier que  $\prod_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} p \geq \prod_{\substack{\sqrt{n} < p \leq n \\ p \text{ premier}}} p$ .

**15.** Déduire des questions 13 et 14 que,

$$n^{(\pi(n) - \pi(\sqrt{n}))/2} \leq 4^n.$$

**16.** On suppose que  $n \geq 2$  et on admet que  $\ln(2) \leq \frac{3}{4}$ . Justifier que  $\pi(\sqrt{n}) \leq \sqrt{n} \leq \frac{n}{\ln(n)}$ , puis établir que

$$\pi(n) \leq 4 \frac{n}{\ln(n)}.$$

**17.** À l'aide des inégalités établies dans les questions 1 et 16, déterminer la limite de  $\left(\frac{n^{\pi(n)}}{n!}\right)$ . Des deux majorations (1) et (2) de  $M_n$  obtenues dans la partie précédente, laquelle est asymptotiquement la meilleure ?

On termine ce sujet en montrant que la majoration obtenue pour  $\pi(n)$  est le bon ordre de grandeur.

**18.** Montrer que

$$\frac{4^n}{2n} \leq \binom{2n}{n} \leq (2n)^{\pi(2n)}.$$

On pourra procéder par récurrence pour la minoration, et utiliser la question 3 pour la majoration.

**19.** Vérifier que

$$\frac{2n \ln(2)}{\ln(2n)} - 1 \geq \frac{n \ln(2)}{\ln(2n)},$$

puis en déduire que

$$\pi(2n) \geq n \frac{\ln(2)}{\ln(2n)}.$$

**20.** En déduire, en distinguant selon la parité de  $n$ , que

$$\pi(n) \geq \frac{\ln(2)}{3} \frac{n}{\ln(n)}.$$

*Ces inégalités ont été asymptotiquement améliorées en 1896. Ce résultat, appelé théorème des nombres premiers, indique*

$$\pi(n) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{\ln(n)}.$$