

DEVOIR SURVEILLÉ N°6
CORRECTION

Sujet donné le samedi 14 février 2026, 4h.

DIFFÉRENTS MODES DE CONVERGENCE D'UNE SUITE DE FONCTIONS ET
APPLICATION À L'APPROXIMATION POLYNOMIALE

Dans ce problème on s'intéresse à des suites de fonctions (φ_n) . On définit deux types de convergence.

— La **convergence simple** de la suite (φ_n) vers φ sur l'intervalle I , notée $(\varphi_n) \xrightarrow{c.s.} \varphi$ si :

$$\forall x \in I, \quad (\varphi_n(x)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \varphi(x) \text{ i.e. } \forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon,$$

— La **convergence uniforme** de la suite (φ_n) vers φ sur l'intervalle I , notée $(\varphi_n) \xrightarrow{c.u.} \varphi$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, \forall x \in I, |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon.$$

Si f est une fonction bornée sur l'intervalle I , on note $\|f\|_{\infty, I} = \sup\{|f(x)|, x \in I\}$. Cette notation permet de reformuler la définition de la convergence uniforme, ce qui est l'objet de la question ??.

La Partie **I** est dévolue à l'étude des modes de convergences, notamment à l'étude d'exemples et de contre-exemples.

Dans la Partie **II**, on démontre que toute fonction lipschitzienne sur un segment est limite uniforme d'une suite de polynômes.

Dans la Partie **III**, on définit et étudie la notion de fonction höldérienne, puis on étend les résultats de la Partie **II** à cette classe de fonctions.

Dans la Partie **IV** on montre qu'il est possible, pour une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, d'approcher de manière uniforme, simultanément la fonction et sa dérivée.

Partie I - Convergence d'une suite de fonctions

1. Dans cette question, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et φ sont des fonctions définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

a) Montrer que si $(\varphi_n) \xrightarrow{c.u.} \varphi$, alors $(\varphi_n) \xrightarrow{c.s.} \varphi$.

On suppose que $(\varphi_n) \xrightarrow{c.u.} \varphi$.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, \forall x \in I, |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$.

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, \forall x \in I, |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon$$

Alors ce N fixé (et qui dépend en fait uniquement d' ε) :

$$\forall x \in I, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, \forall x \in I, |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon$$

Donc

$$\forall (\varepsilon, x) \in]0, +\infty[\times I, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon$$

Ainsi : $(\varphi_n) \xrightarrow{c.s.} \varphi$

$$\boxed{(\varphi_n) \xrightarrow{c.u.} \varphi \implies (\varphi_n) \xrightarrow{c.s.} \varphi.}$$

b) Montrer que $(\varphi_n) \xrightarrow{c.u.} \varphi$ si et seulement s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\varphi_n - \varphi$ est bornée sur I et $(\|\varphi_n - \varphi\|_{\infty, I})_{n \geq N} \rightarrow 0$.

★ Supposons que $(\varphi_n) \xrightarrow{c.u.} \varphi$.

Appliquons la définition de la convergence uniforme de (φ_n) vers φ pour $\varepsilon \leftarrow 1$:

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, \forall x \in I, |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leq 1$$

Fixons un tel N .

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $n \geq N$. On a établi que

$$\forall x \in I, |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leq 1$$

ce qui signifie que la fonction $\varphi_n - \varphi$ est bornée par 1.

Par conséquent, pour tout $n \geq N$, $\varphi_n - \varphi$ est bornée.

Soit $\varepsilon > 0$.

Appliquons la définition de la convergence uniforme de (φ_n) vers φ pour $\varepsilon \leftarrow \varepsilon$:

$$\exists N' \in \mathbb{N} : \forall n \geq N', \forall x \in I, |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon$$

Fixons un tel N' .

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $n \geq N'$. On a établi que

$$\forall x \in I, |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon$$

ce qui est équivalent à $\|\varphi_n - \varphi\|_{\infty, I} \leq \varepsilon$.

Par conséquent, la suite $(\|\varphi_n - \varphi\|_{\infty, I})_{n \geq N}$ converge vers 0.

★ Supposons qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi_n - \varphi$ est bornée sur I et $(\|\varphi_n - \varphi\|_{\infty, I})_{n \geq N} \rightarrow 0$.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé.

Appliquons la définition de la convergence de $(\|\varphi_n - \varphi\|_{\infty, I})_{n \geq N}$ vers 0 pour $\varepsilon \leftarrow \varepsilon$:

$$\exists N' \geq N : \forall n \geq N', \|\varphi_n - \varphi\|_{\infty, I} \leq \varepsilon$$

ce qui signifie

$$\exists N' \in \mathbb{N} : \forall n \geq N', \forall x \in I, |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon$$

Nous venons d'établir la convergence uniforme sur I de (φ_n) vers φ .

Ainsi, $(\varphi_n) \xrightarrow{c.u.} \varphi \iff$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\varphi_n - \varphi$ est bornée sur I et $(\|\varphi_n - \varphi\|_{\infty, I})_{n \geq N} \rightarrow 0$.

2. Exemple 1. On considère la suite de fonctions (f_n) définie sur $\mathbb{R}$, par $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = x \arctan(nx)$.

a) Montrer que $(f_n) \xrightarrow{c.s.} f$ où $f : x \mapsto \frac{\pi}{2}|x|$.

• Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, fixé, la suite $(nx) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Donc par composition (et produit) $(nx) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}|x|$.

• De même si $x \in \mathbb{R}_-^*$, fixé, la suite $(nx) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$ et par composition : $(nx) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -x \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}|x|$.

• Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = 0$, donc $f_n(0) \rightarrow 0 = \frac{\pi}{2}|0|$.

La convergence de la suite $(f_n(x))$ vers $f(x)$ étant obtenue pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut affirmer que

$$(x \arctan(nx))_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{c.s.} f \text{ où } f : x \mapsto \frac{\pi}{2}|x|$$

b) Montrer que, pour tout $u > 0$, $\frac{\pi}{2} - \arctan u = \arctan \frac{1}{u}$.

Soit $\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$,

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{1}{\tan \theta}$$

Soit $u \in \mathbb{R}$, considérons alors $\theta = \arctan u \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, et donc, puisque $\tan \theta = u$:

$$\boxed{\frac{\pi}{2} - \arctan u = \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) = \arctan \frac{1}{u}}$$

c) Après avoir étudié $\psi : u \mapsto u\left(\frac{\pi}{2} - \arctan u\right)$ sur $\mathbb{R}_+$, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,
 $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}$.
 En déduire que la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

La fonction ψ est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $u \geq 0$:

$$\psi'(u) = \frac{\pi}{2} - \arctan(u) - \frac{u}{1+u^2} \quad \text{et} \quad \psi''(u) = -\frac{2}{1+u^2} - \frac{u(-2u)}{(1+u^2)^2} = \frac{-2}{(1+u^2)^2} < 0$$

Ainsi ψ' est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Par ailleurs :

$$\left(\psi'(0) = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} \psi'(u) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - 0 = 0\right)$$

car $\frac{u}{1+u^2} \underset{u \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{u}$, Donc $\psi' \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$,

Donc ψ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Ainsi, pour tout $u \geq 0$, $\psi(0) \leq \psi(u) \leq \lim_{u \rightarrow +\infty} \psi(u)$.

Or $\psi(0) = 0$

et $\frac{\pi}{2} - \arctan u = \arctan \frac{1}{u} \sim \frac{1}{u}$ car $u \rightarrow +\infty$, donc $\frac{1}{u} \rightarrow 0$; ainsi $\psi(u) \underset{u \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{u}{u} = 1 \rightarrow 1$.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } u \in \mathbb{R}_+, 0 \leq \psi(u) \leq 1.}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, $f_n(-x) = -x \arctan(-nx) = x \arctan(nx) = f_n(x)$ et $f(-x) = |-x| \frac{\pi}{2} = f(x)$.

Donc $|f_n(-x) - f(-x)| = |f_n(x) - f(x)|$, il suffit d'étudier le maximum de la différence sur $\mathbb{R}_+$.

Or, pour $x \geq 0$, $|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n} |\psi(nx)| \leq \frac{1}{n}$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}}$$

Et donc $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}$, et par encadrement $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$.

$$\boxed{(x \arctan(nx))_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{c.u.} f \text{ avec } f : x \mapsto \frac{\pi}{2} |x|}$$

3. Exemple 2. On considère la suite de fonctions (g_n) définie sur $\mathbb{R}$, par $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, g_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$.

a) Soit $x_0 \in \mathbb{R}^*$ fixé. On note $u_n = g_n(x_0)$. Donner un développement limité à l'ordre 5 de (u_n) pour $n \rightarrow +\infty$.

En déduire que (g_n) converge simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction g à préciser.

Comme x_0 est non nul :

$$u_n = g_n(x_0) = \frac{nx_0}{1 + n^2x_0^2} = \frac{1}{nx_0 \left(1 + \frac{1}{n^2x_0^2}\right)} = \frac{1}{nx_0} \times \left(1 - \frac{1}{n^2x_0^2} + \frac{1}{n^4x_0^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)$$

car $\frac{1}{n^0x_0^2} \rightarrow 0$. Et donc

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{nx_0} - \frac{1}{n^3x_0^3} + \frac{1}{n^5x_0^5} + o\left(\frac{1}{n^5}\right)$$

Ainsi si $x \neq 0$,

$$g_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{nx} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Et par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n(0) = 0$. Donc $g_n(0) \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$.

$$\text{Ainsi } (g_n) \xrightarrow{c.s.} g \text{ où } g : x \mapsto 0.$$

b) Évaluer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n\left(\frac{1}{n}\right)$.

Le calcul est simple :

$$g_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

c) Déterminer si la suite (g_n) converge uniformément sur $[0, 1]$ vers g .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|g_n(x) - g(x)| = |g_n(x)|$.

Or il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $g_n(x) = \frac{1}{2}$, donc $\sup_{x \in \mathbb{R}} |g_n(x) - g(x)| \geq \frac{1}{2}$.

Et ainsi, il est impossible que $\sup_{x \in \mathbb{R}} |g_n(x) - g(x)| \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$.

$$(g_n) \text{ ne converge pas uniformément vers } g.$$

Partie II - Approximation d'une fonction lipschitzienne

4. Calculs préliminaires.

Soient $x \in [0, 1]$ et n un entier naturel.

Établir les égalités suivantes.

$$\text{a) } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1, \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx \text{ et } \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2.$$

On reconnaît la formule du binôme de Newton :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x + (1-x))^n = 1^n = 1$$

Pour $k = 0$, le terme correspondant dans la somme est nul.

Ainsi si $n = 0$, on trouve $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 0 = nx$.

Puis pour $k, n \geq 1$, on applique la formule « dite du capitaine » :

$$k \binom{n}{k} = k \frac{n!}{k!(n-k)!} = n \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = n \binom{n-1}{k-1}$$

Ainsi, toujours avec $n \geq 1$, en posant $h = k - 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= n \sum_{h=0}^{n-1} \binom{n-1}{h} x^h (1-x)^{n-1-h} \times x = n(x + (1-x))^{n-1} x = nx \end{aligned}$$

Dans tous les cas ($n = 0$ et $n \geq 1$) $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx$

On suit la même stratégie : Pour $k = 0$ et $k = 1$, les termes correspondants dans la somme sont nuls.

Ainsi si $n = 0$ ou $n = 1$, on trouve $\sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 0 = n(n-1)x$.

Puis pour $k, n \geq 2$, on applique la formule « dite du capitaine-adjoint » :

$$k(k-1) \binom{n}{k} = k(k-1) \frac{n!}{k!(n-k)!} = n(n-1) \frac{(n-2)!}{(k-2)!((n-2)-(k-2))!} = n(n-1) \binom{n-2}{k-2}$$

Ainsi, toujours avec $n \geq 2$ et en posant $h = k - 2$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= \sum_{k=2}^n n(n-1) \binom{n-2}{k-2} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= n(n-1)x^2 \sum_{h=0}^{n-2} \binom{n-2}{h} x^h (1-x)^{n-2-h} \\ &= n(n-1)x^2 (x + (1-x))^{n-2} = n(n-1)x^2 \end{aligned}$$

Dans tous les cas ($n = 0$, $n = 1$ et $n \geq 2$) $\sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2$

b) Dédurre des calculs précédents la valeur de $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$.

Pour $k = 0$, le terme correspondant dans la somme est nul. Ainsi,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= \sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^n k(k-1+1) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^n k(k-1) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= n(n-1)x^2 + nx. \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2 + nx = nx(nx-x+1).$$

c) En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $\sum_{k=0}^n \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}$.

Notons d'abord que

$$\left(x - \frac{k}{n}\right)^2 = x^2 - 2\frac{k}{n}x + \frac{k^2}{n^2}.$$

Ainsi, en utilisant la linéarité de la somme puis en reconnaissant 3 sommes calculées précédemment :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= x^2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - \frac{2x}{n} \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= x^2 - \frac{2x}{n} \cdot nx + \frac{1}{n^2} \cdot (n(n-1)x^2 + nx) \\ &= (1-2)x^2 + \frac{n-1}{n}x^2 + \frac{1}{n}x = \frac{x-x^2}{n}. \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, pour } n \geq 1, \sum_{k=0}^n \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}$$

5. Majoration d'une suite de fonctions.

Pour tout entier naturel non nul n , notons S_n la fonction polynomiale définie pour tout $x \in [0, 1]$ par

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n \left|x - \frac{k}{n}\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Le but de cette partie est de majorer $S_n(x)$ en fonction de n et x .

Soient $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $V_{n,x} = \left\{k \in \llbracket 0, n \rrbracket \mid \left|x - \frac{k}{n}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$ et $W_{n,x} = \llbracket 0, n \rrbracket \setminus V_{n,x}$, son complémentaire.

a) Montrer qu'il existe une constante $a \in \mathbb{R}_+$    préciser et indépendante de n et x telle que

$$\sum_{k \in V_{n,x}} \left|x - \frac{k}{n}\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{a}{\sqrt{n}}.$$

Puisque $x \in [0, 1]$ alors, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket = V_{n,x} \cup W_{n,x}$, $\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \geq 0$,

Ainsi :

- puisque pour tout $k \in V_{n,x}$, $\left|x - \frac{k}{n}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$, alors

$$\sum_{k \in V_{n,x}} \left|x - \frac{k}{n}\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k \in V_{n,x}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

- et pour tout $k \in W_{n,x}$,

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k \in W_{n,x}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

Ainsi, en sommant les inégalités,

$$\sum_{k \in V_{n,x}} \left| x - \frac{k}{n} \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + 0 \leq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k \in V_{n,x}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k \in W_{n,x}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}_{= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{1}{\sqrt{n}}}$$

$$\boxed{\sum_{k \in V_{n,x}} \left| x - \frac{k}{n} \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.}$$

b) En comparant, pour tout $k \in W_{n,x}$, le réel $\sqrt{n} \left| x - \frac{k}{n} \right|$ à son carré, montrer que

$$\sum_{k \in W_{n,x}} \left| x - \frac{k}{n} \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{x(1-x)}{\sqrt{n}}.$$

Pour tout $k \in W_{n,x}$, $\left| x - \frac{k}{n} \right| > \frac{1}{\sqrt{n}}$, donc $\sqrt{n} \left| x - \frac{k}{n} \right| > 1$, et donc
puisque, pour tout $t > 1$, $t(t-1) > 0$, d'où $t^2 > t$,

$$\left(\sqrt{n} \left| x - \frac{k}{n} \right| \right)^2 = n \left(x - \frac{k}{n} \right)^2 > \sqrt{n} \left| x - \frac{k}{n} \right| \quad \text{donc} \quad \sqrt{n} \left| x - \frac{k}{n} \right|^2 > \left| x - \frac{k}{n} \right|.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \sum_{k \in W_{n,x}} \left| x - \frac{k}{n} \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &< \sqrt{n} \sum_{k \in W_{n,x}} \left| x - \frac{k}{n} \right|^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leq \sqrt{n} \sum_{k=0}^n \left| x - \frac{k}{n} \right|^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{\sqrt{n} x(1-x)}{n} \end{aligned}$$

en exploitant la positivité des termes de la somme pour $k \in V_{n,x}$ et le dernier résultat de la question précédente.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \sum_{k \in W_{n,x}} \left| x - \frac{k}{n} \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{x(1-x)}{\sqrt{n}}}$$

c) Conclure que $S_n(x) \leq \frac{5}{4\sqrt{n}}$.

L'application $x \mapsto x(1-x) = x - x^2$ est un trinôme du second degré qui tend vers $-\infty$ pour $x \rightarrow \pm\infty$.
elle est maximale en $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$ (milieu des racines qui sont 0 et 1) et vaut alors $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et donc pour tout $x \in [0, 1]$, $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$.

Finalement, par le théorème de sommation par paquets :

$$S_n(x) = \sum_{k \in V_{n,x}} \left| x - \frac{k}{n} \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k \in W_{n,x}} \left| x - \frac{k}{n} \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{4\sqrt{n}} = \frac{5}{4\sqrt{n}}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^* \text{ et } x \in [0, 1], S_n(x) \leq \frac{5}{4\sqrt{n}}.}$$

6. Approximation polynomiale uniforme d'une fonction lipschitzienne.

Soit f une fonction réelle définie sur le segment $[0, 1]$.

Pour tout entier naturel non nul n , notons $B_n(f)$ la fonction polynomiale définie pour tout $x \in [0, 1]$ par

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Le but de cette question est d'établir la convergence uniforme sur $[0, 1]$ de la suite de fonctions $(B_n(f))$ vers f lorsque f est lipschitzienne sur $[0, 1]$ puis d'étendre le résultat à toute fonction lipschitzienne sur un segment.

a) Exemple 1. Soit $f : x \in [0, 1] \mapsto x^2$.

Pour tout n entier naturel, calculer explicitement la fonction $B_n(f)$ en fonction de f , puis $\|B_n(f) - f\|_{\infty, [0, 1]}$. Cet exemple illustre-t-il le résultat à atteindre ?

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1]$. D'après la définition et la question ,

$$\begin{aligned} B_n(f)(x) &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \frac{n(n-1)x^2 + nx}{n^2} = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall x \in [0, 1], B_n(f)(x) = f(x) + \frac{x(1-x)}{n} \quad \text{donc} \quad |B_n(f)(x) - f(x)| = \frac{|x(1-x)|}{n}.$$

De plus, l'étude du trinôme $x \mapsto x(1-x)$ a déjà été vue : il est maximal en $\frac{1}{2}$ et vaut $\frac{1}{4}$ d'où

$$\|B_n(f) - f\|_{\infty, [0, 1]} \leq \frac{1}{4n}.$$

D'après le théorème d'encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|B_n(f) - f\|_{\infty, [0, 1]} = 0$.

Ainsi, d'après la question [1.b](#)),

$$\boxed{B_n(f) \xrightarrow{c.u.} f.}$$

On a ainsi montré que la suite de polynômes $(B_n(f))$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

On remarque que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0, 1]$, donc

$$\boxed{f \text{ est lipschitzienne d'après le théorème des accroissements finis.}}$$

b) Exemple 2. Notons $\delta_0 : x \in [0, 1] \mapsto \delta_{0,x} = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0, \\ 0 & \text{si } x \in]0, 1]. \end{cases}$

Pour tout n entier naturel non nul, calculer explicitement la fonction $B_n(\delta_0)$ puis $\|B_n(\delta_0) - \delta_0\|_{\infty, [0, 1]}$. Cet exemple est-il en contradiction avec le résultat à atteindre ?

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$. D'après la définition,

$$B_n(\delta_0)(x) = \sum_{k=0}^n \delta_0\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \binom{n}{0} x^0 (1-x)^{n-0} = (1-x)^n.$$

Ainsi,

$$B_n(\delta_0)(x) - \delta_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ (1-x)^n & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme la fonction $x \mapsto (1-x)^n$ est décroissante sur $]0, 1]$, alors $\sup\{(1-x)^n, x \in]0, 1]\} = 1$. Donc,

$$\|B_n(\delta_0) - \delta_0\|_{\infty, [0,1]} = 1.$$

Ainsi, d'après la question 1.b),

$$\boxed{(B_n(\delta_0)) \text{ ne converge pas uniformément sur } [0, 1] \text{ vers } \delta_0.}$$

Comme la fonction δ_0 n'est pas lipschitzienne (car non continue en 0 : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \delta_0(x) = 0 \neq 1 = \delta_0(0)$), cet exemple ne contrevient pas au théorème que nous souhaitons démontrer.

c) Soient $L \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction L -lipschitzienne sur $[0, 1]$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall x \in [0, 1], |B_n(f)(x) - f(x)| \leq \frac{5L}{4\sqrt{n}} \quad (1)$$

Que peut-on en déduire concernant la convergence de la suite de fonctions $(B_n(f))$?

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$. En utilisant les définitions,

$$\begin{aligned} |B_n(f(x)) - f(x)| &= \left| \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - f(x) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^n \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^n \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \left| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \quad \text{par inégalité triangulaire} \\ &\leq \sum_{k=0}^n \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad \text{par positivité de } x \text{ et } (1-x) \\ &\leq \sum_{k=0}^n L \left| \frac{k}{n} - f(x) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad \text{car } f \text{ est } L\text{-lipschitzienne} \\ &\leq L \cdot \frac{5}{4\sqrt{n}}, \text{ d'après 5.c).} \end{aligned}$$

D'après le calcul précédent, $\frac{5L}{4\sqrt{n}}$ est un majorant de $\{|B_n(f)(x) - f(x)|, x \in [0, 1]\}$. Ainsi,

$$\|B_n(f) - f\|_{\infty, [0,1]} \leq \frac{5L}{4\sqrt{n}}.$$

D'après le théorème d'encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|B_n(f) - f\|_{\infty, [0,1]} = 0$.

Ainsi, d'après la question 1.b),

$$\boxed{B_n(f) \xrightarrow{c.u.} f.}$$

d) Extension du résultat.

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et g une fonction à valeurs réelles lipschitzienne sur $[a, b]$.

Montrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales sur $[a, b]$ qui converge uniformément vers g sur $[a, b]$.

On pourra d'abord montrer qu'il existe une fonction affine φ telle que $\varphi([0, 1]) = [a, b]$ pour ensuite considérer la fonction $g \circ \varphi$.

Soit $\varphi : [0, 1] \rightarrow [a, b]$, $t \mapsto a + t(b - a)$. La fonction φ est continue et strictement monotone sur $[a, b]$ et vérifie $\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = b$. Elle réalise donc une bijection de $[0, 1]$ sur $[a, b]$.

De plus, $\varphi^{-1} : [a, b] \rightarrow [0, 1]$, $x \mapsto \frac{x - a}{b - a}$ est également affine.

On remarque également que φ est lipschitzienne et $(b - a)$ est une constante de Lipschitz (car elle est affine de pente $b - a$).

g est une fonction lipschitzienne sur $[a, b]$ donc la fonction $g \circ \varphi$ est lipschitzienne, comme composée de fonctions lipschitziennes : en notant $G \in \mathbb{R}_+$ une constante de Lipschitz de g ,

$$\forall (x, y) \in [0, 1], |g \circ \varphi(y) - g \circ \varphi(x)| \leq G|\varphi(y) - \varphi(x)| \leq G(b - a)|y - x|$$

ce qui permet, d'après la question 6.c) appliquée pour $f \leftarrow g \circ \varphi$, d'affirmer qu'il existe une suite $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de fonctions polynomiales telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|Q_n - g \circ \varphi\|_{\infty, [0, 1]} = 0.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $P_n = Q_n \circ \varphi^{-1}$.

Comme Q_n est un polynôme et φ^{-1} est une fonction affine, donc polynomiale, alors $P_n = Q_n \circ \varphi^{-1}$ est un polynôme.

Soit $y \in [a, b]$. Comme φ est bijective, il existe $t \in [0, 1]$ tel que $\varphi(t) = y$. Ainsi,

$$|P_n(y) - g(y)| = |Q_n \circ \varphi^{-1}(\varphi(t)) - g(\varphi(t))| = |Q_n(t) - g \circ \varphi(t)| \leq \|Q_n - g \circ \varphi\|_{\infty, [0, 1]}.$$

Ainsi, $\|Q_n - g \circ \varphi\|_{\infty, [0, 1]}$ est un majorant de $\{|P_n(y) - g(y)| \mid y \in [a, b]\}$, donc

$$0 \leq \|P_n - g\|_{\infty, [a, b]} \leq \|Q_n - g \circ \varphi\|_{\infty, [0, 1]}.$$

D'après le théorème d'encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|P_n - g\|_{\infty, [a, b]} = 0$.

Ainsi, d'après la question 1.b),

$$P_n \xrightarrow{c.u.} g.$$

Enfin, toute fonction lipschitzienne sur $[a, b]$ est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de polynômes.

Partie III - Approximation d'une fonction hölderienne

Soit $\alpha \in]0, 1]$.

On note p_α le prolongement par continuité sur $[0, 1]$ de la fonction définie sur $]0, 1]$ par $t \mapsto t^\alpha$.

De manière générale, on étendra la relation t^α en notant $0^\alpha = 0$.

Une fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est α -hölderienne sur $[0, 1]$ s'il existe une constante $L \in \mathbb{R}_+^*$ telle que

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2, |f(y) - f(x)| \leq L|y - x|^\alpha$$

On note $\mathcal{H}_\alpha$ l'ensemble des fonctions α -hölderiennes sur $[0, 1]$.

Les fonctions 1-hölderiennes sur $[0, 1]$ sont les fonctions lipschitziennes sur $[0, 1]$.

On note, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}^k([0, 1])$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur le segment $[0, 1]$ et de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[0, 1]$.

7. Généralités sur les fonctions hölderiennes sur $[0, 1]$.

Soit $\alpha \in]0, 1]$.

a) En effectuant une étude de fonction, montrer que, pour tout $t \in [0, 1]$, $1 - t^\alpha \leq (1 - t)^\alpha$ puis en déduire que $p_\alpha \in \mathcal{H}_\alpha$.

Lorsque $t = 0$ ou $t = 1$, l'inégalité est une égalité.

Soit $t \in]0, 1[$. Posons $\varphi : t \mapsto (1 - t)^\alpha - 1 + t^\alpha$.

La fonction φ est dérivable sur $]0, 1[$ et pour tout $t \in]0, 1[$, $\varphi'(t) = \alpha(t^{\alpha-1} - (1 - t)^{\alpha-1})$.

Ainsi, la fonction φ' est strictement décroissante comme somme de fonctions strictement décroissantes, or $\varphi'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$,

donc la fonction φ' est > 0 sur $]0, 1/2[$ et < 0 sur $]1/2, 1[$.

La fonction φ est donc croissante sur $]0, 1/2[$ et décroissante sur $]1/2, 1[$.

Comme φ est prolongeable par continuité en 0 et 1 par les valeurs $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(1) = 0$, alors φ est positive ou nulle sur $[0, 1]$.

Ainsi, $\forall t \in [0, 1], 1 - t^\alpha \leq (1 - t)^\alpha$.

Soient $x, y \in [0, 1]$. On suppose sans restriction que $x < y$. Alors,

$$\begin{aligned} |x^\alpha - y^\alpha| &= y^\alpha - x^\alpha \\ &= y^\alpha \left(1 - \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha\right) \\ &\leq y^\alpha \left(1 - \frac{x}{y}\right)^\alpha, \text{ d'après le point précédent et car } y^\alpha \geq 0 \\ &\leq (y - x)^\alpha. \end{aligned}$$

Ainsi, $p_\alpha \in \mathcal{H}_\alpha([0, 1])$.

b) Justifier que, pour tout $\beta \in]\alpha, 1]$, $p_\alpha \notin \mathcal{H}_\beta$.

Soit $\beta \in]\alpha, 1]$.

Supposons par l'absurde que $p_\alpha \in \mathcal{H}_\beta$.

Alors, il existe $L > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2, |p_\alpha(y) - p_\alpha(x)| = |y^\alpha - x^\alpha| \leq L|y - x|^\beta.$$

En particulier, $y \leftarrow 0$,

$$\forall x \in [0, 1], x^\alpha \leq Lx^\beta \quad \text{donc} \quad \forall x \in]0, 1], \frac{x^\alpha}{x^\beta} \leq L.$$

Or, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\alpha-\beta} = +\infty$ (car $\alpha < \beta$), ce qui contredit le caractère borné sur $]0, 1]$ de $x \mapsto \frac{x^\alpha}{x^\beta}$.

Ainsi, $\forall \beta \in]\alpha, 1], p_\alpha \notin \mathcal{H}_\beta$.

c) Montrer les inclusions

$$\mathcal{C}^1([0, 1]) \subset \mathcal{H}_\alpha \subset \mathcal{C}^0([0, 1])$$

et justifier qu'elles sont strictes.

Soit $f \in \mathcal{H}_\alpha$. Il existe $L > 0$, tel que

$$\forall (x, y) \in [0, 1], |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^\alpha.$$

Soit $x_0 \in [0, 1]$ fixé. On a donc

$$\forall y \in [0, 1], |f(x_0) - f(y)| \leq L|x_0 - y|^\alpha,$$

or $\alpha > 0$ donc $\lim_{y \rightarrow x_0} |x_0 - y|^\alpha = 0$, d'où, par théorème d'encadrement,

$$\lim_{y \rightarrow x_0} f(y) = f(x_0).$$

ce qui établit la continuité de f en x_0 .

Ainsi, f est continue sur $[0, 1]$ d'où

$$\mathcal{H}_\alpha \subset \mathcal{C}^0([0, 1]).$$

Posons $\gamma = \frac{\alpha}{2} \in]0, 1[$. La fonction p_γ est continue sur $[0, 1]$ comme fonction puissance prolongée par continuité en 0. De plus, d'après la question précédente, $p_\gamma \notin \mathcal{H}_\alpha$ car $\alpha \in]\gamma, 1]$.

Ainsi, l'inclusion $\mathcal{H}_\alpha \subset \mathcal{C}^0$ est stricte.

Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, 1])$. Soient $x, y \in [0, 1]$. La fonction f est

- continue sur $[0, 1]$,
- dérivable sur $]0, 1[$,
- de dérivée bornée sur $[0, 1]$ car la fonction f' est continue sur le segment $[0, 1]$.

D'après le théorème des accroissements finis, il existe $K \geq 0$ (par exemple $K = \|f'\|_{\infty, [0, 1]}$) tel que

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

Comme $x, y \in [0, 1]$, alors $|x - y| \in [0, 1]$ et comme $\alpha \in [0, 1]$, $|x - y| \leq |x - y|^\alpha$.

Finalement,

$$\forall x, y \in [0, 1], |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|^\alpha.$$

Ainsi, la fonction f est α -höldérienne d'où

$$\mathcal{C}^1 \subset \mathcal{H}_\alpha.$$

D'après la question 7.a), $p_\alpha \in \mathcal{H}_\alpha$.

Or, pour tout $x \neq 0$,

$$\frac{x^\alpha - 0}{x - 0} = x^{\alpha-1}.$$

Comme $\alpha - 1 < 0$, alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^\alpha - 0}{x - 0} = +\infty$ donc p_α n'est pas dérivable en 0, donc p_α n'est pas $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.

Ainsi, l'inclusion $\mathcal{C}^1 \subset \mathcal{H}_\alpha$ est stricte.

d) Montrer que $\mathcal{H}_\alpha$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{C}^0([0, 1])$.

— D'après la question 7.c), $\mathcal{H}_\alpha \subset \mathcal{C}^0$ et $\mathcal{C}^0$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

— La fonction nulle est α -höldérienne.

— Soient $f, g \in \mathcal{H}_\alpha$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Soient $x, y \in [0, 1]$.

Comme f est α -höldérienne, il existe $K > 0$ tel que

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|^\alpha.$$

Comme g est α -höldérienne, il existe $L > 0$ tel que

$$|g(x) - g(y)| \leq L|x - y|^\alpha.$$

Ainsi, en utilisant l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} |(f + \lambda g)(x) - (f + \lambda g)(y)| &= |f(x) - f(y) + \lambda g(x) - \lambda g(y)| \\ &\leq |f(x) - f(y)| + |\lambda| \cdot |g(x) - g(y)| \\ &\leq K|x - y|^\alpha + |\lambda| \cdot L \cdot |x - y|^\alpha \\ &\leq (K + L|\lambda|)|x - y|^\alpha. \end{aligned}$$

Ainsi, $f + \lambda g$ est α -höldérienne (car $K + L|\lambda| > 0$).

Finalemment, $\mathcal{H}_\alpha$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0$.

e) Soit $\beta \in]0, 1]$ tel que $\alpha < \beta$. Montrer que $\mathcal{H}_\beta \subset \mathcal{H}_\alpha$. Cette inclusion est-elle stricte ?

En déduire que, pour $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, l'ensemble $I(f) = \{\alpha \in]0, 1] \mid f \in \mathcal{H}_\alpha\}$ est un intervalle de $[0, 1]$.

Soit f une fonction β -hölderienne. Il existe $L > 0$ tel que

$$\forall x, y \in [0, 1], |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^\beta.$$

Comme $x, y \in [0, 1]$, alors $|x - y| \leq 1$. De plus, $\alpha < \beta$, donc $|x - y|^\beta \leq |x - y|^\alpha$.

Ainsi,

$$\forall x, y \in [0, 1], |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^\beta \leq L|x - y|^\alpha,$$

donc $f \in \mathcal{H}_\alpha$.

Finalemment, $\mathcal{H}_\beta \subset \mathcal{H}_\alpha$.

Supposons que $I(f)$ est non vide. Soient $\alpha, \beta \in I(f)$. Supposons sans restriction que $\alpha \leq \beta$.

Alors, d'après la question précédente, $[0, \beta] \in I(f)$.

Ainsi, $[\alpha, \beta] \subset I(f)$ donc $I(f)$ est un intervalle.

Remarque. Comme $I(f)$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée par 1, elle admet une borne supérieure $\gamma \in]0, 1]$ ($\gamma \leq 1$ car 1 majore $I(f)$ et $\gamma > 0$ car γ majore $I(f)$ non vide inclus dans $]0, 1]$).

Comme $I(f)$ est un intervalle, alors soit $I(f) =]0, \gamma[$, soit $I(f) = [0, \gamma]$.

Ainsi, $I(f) = \emptyset$ ou il existe $\gamma \in]0, 1]$ tel que $I(f) =]0, \gamma[$ ou $I(f) = [0, \gamma]$.

f) Exemples d'ensembles $I(f)$: les différentes formes sont possibles !

(i) Donner deux fonctions f et h définies sur $[0, 1]$ telles que $I(f) = \emptyset$ et $I(h) = \left]0, \frac{1}{2}\right]$.

Notons f la fonction définie pour $x \in]0, 1]$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ et par $f(0) = 0$.

Supposons par l'absurde qu'il existe $\alpha \in]0, 1]$ telle que f soit α -hölderienne. Alors, il existe $L > 0$ tel que

$$\forall x, y \in [0, 1], |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^\alpha.$$

En particulier, pour $y \leftarrow 0$,

$$\forall x > 0, \frac{1}{x} \leq Lx^\alpha,$$

soit

$$\forall x > 0, \frac{1}{x^{1+\alpha}} \leq L.$$

Comme $1 + \alpha > 0$, alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{1+\alpha}} = +\infty$.

On obtient ainsi une contradiction et f n'est pas α -hölderienne.

Ainsi, $I(f) = \emptyset$.

Autre argument possible.

Toute fonction α -hölderienne est continue (question 7.c)) donc $I(\delta_0) = \emptyset$ car δ_0 est discontinue en 0.

D'après les questions 7.a) et 7.b),

$$I\left(p_{\frac{1}{2}}\right) = \left]0, \frac{1}{2}\right].$$

Considérons, pour tout $\gamma \in [1, +\infty[$, la fonction g_γ définie sur $]0, 1]$ par $g_\gamma(x) = (-\sqrt{x} \ln(x))^\gamma$.

(ii) Montrer que g_γ se prolonge par continuité en 0 en une fonction notée $\tilde{g}_\gamma$ puis justifier que $\tilde{g}_1 \notin \mathcal{H}_{\frac{1}{2}}$.

D'après le théorème des croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln(x) = 0^-$.

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \exp(\gamma \ln(-\sqrt{x} \ln(x))) = 0$.

La fonction g_γ se prolonge donc (par continuité) en une fonction continue en 0 en posant $\tilde{g}_\gamma(0) = 0$.

Supposons par l'absurde que $\tilde{g}_1 \in \mathcal{H}_{\frac{1}{2}}$. Alors, il existe $L > 0$ tel que

$$\forall x, y \in [0, 1], |\tilde{g}_1(x) - \tilde{g}_1(y)| \leq L|x - y|^{1/2}.$$

En particulier pour $y \leftarrow 0$,

$$\forall x > 0, -\sqrt{x} \ln(x) \leq L\sqrt{x}.$$

soit

$$\forall x > 0, -\ln(x) \leq L.$$

Or, $\lim_{x \rightarrow 0^+} -\ln(x) = +\infty$ ce qui contredit le caractère majoré de cette fonction.

Ainsi, $\tilde{g}_1 \notin \mathcal{H}_{\frac{1}{2}}$.

(iii) Soit $\gamma > 2$. Montrer que $\tilde{g}_\gamma \in \mathcal{C}^1([0, 1])$ et en déduire $I(\tilde{g}_\gamma)$.

Soit $\gamma > 2$.

Comme les fonctions racine carrée et logarithme sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, 1]$, alors g_γ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, 1]$.

De plus, pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} g'_\gamma(x) &= -\gamma \left(\frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x} \right) (-\sqrt{x} \ln(x))^{\gamma-1} \\ &= -\gamma \frac{\ln(x) + 2}{2\sqrt{x}} (-\sqrt{x} \ln(x))^{\gamma-1} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\gamma \frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}} g_{\gamma-1}(x) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\gamma}{2} \sqrt{x}^{\gamma-2} \times (-\ln(x))^\gamma. \end{aligned}$$

Comme $\gamma - 2 > 0$, par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow 0^+} g'_\gamma(x) = 0$.

Comme $\tilde{g}_\gamma$ est continue sur $[0, 1]$, dérivable sur $]0, 1]$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} g'_\gamma(x) = 0$, d'après le théorème de prolongement de la dérivabilité, la fonction $\tilde{g}_\gamma$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et $\tilde{g}'_\gamma(0) = 0$.

D'après la question 7.c), $\mathcal{C}^1 \subset \mathcal{H}_1$ d'où

$\tilde{g}_\gamma \in \mathcal{H}_1$ si bien que $I(\tilde{g}_\gamma) =]0, 1]$.

(iv) En observant que $\tilde{g}_1 = p_{\frac{1}{\gamma}} \circ \tilde{g}_\gamma$, conclure que $I(\tilde{g}_1) = \left] 0, \frac{1}{2} \right[$.

Soit $\alpha < \frac{1}{2}$ fixé. Posons $\gamma = \frac{1}{\alpha} > 2$.

D'après la question précédente, $\tilde{g}_\gamma \in \mathcal{H}_1$. De plus, $p_\alpha \in \mathcal{H}_\alpha$. Ainsi, il existe $K, L > 0$ tels que pour tous $x, y \in [0, 1]$,

$$|\tilde{g}_1(x) - \tilde{g}_1(y)| = |p_\alpha(\tilde{g}_\gamma(x)) - p_\alpha(\tilde{g}_\gamma(y))| \leq K|\tilde{g}_\gamma(x) - \tilde{g}_\gamma(y)|^\alpha \leq KL^\alpha |x - y|^\alpha.$$

Ainsi, $\tilde{g}_1 \in \mathcal{H}_\alpha$. Finalement,

$I(\tilde{g}_1) = \left] 0, \frac{1}{2} \right[.$

8. Inégalité de Hölder.

Soient $(p, q) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Soient $n \in \mathbb{N}$, $(u_0, \dots, u_n) \in (\mathbb{R}_+)^{n+1}$ et $(v_0, \dots, v_n) \in (\mathbb{R}_+)^{n+1}$.

Le but de cette question est d'établir l'inégalité

$$\sum_{k=0}^n u_k v_k \leq \left(\sum_{k=0}^n u_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=0}^n v_k^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad (2)$$

a) Soit $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ concave. Considérons h définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$ par $h(x, y) = yg \left(\frac{x}{y} \right)$

Montrer que : $\forall (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$, $\forall (y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$, $\sum_{k=0}^n h(x_k, y_k) \leq h \left(\sum_{k=0}^n x_k, \sum_{k=0}^n y_k \right)$.

Comme la fonction g est concave, la fonction $-g$ est convexe.

Ainsi, en notant $y = \sum_{k=0}^n y_k$, donc $\sum_{k=0}^n \frac{y_k}{y} = 1$, d'après l'inégalité de Jensen (avec $\lambda_k = \frac{y_k}{y}$),

$$-\sum_{k=0}^n h(x_k, y_k) = -\sum_{k=0}^n y_k g \left(\frac{x_k}{y_k} \right) = y \sum_{k=0}^n \frac{y_k}{y} \left(-g \left(\frac{x_k}{y_k} \right) \right) \geq -yg \left(\sum_{k=0}^n \frac{y_k}{y} \times \frac{x_k}{y_k} \right)$$

Puis, par concavité de g :

$$\sum_{k=0}^n h(x_k, y_k) \leq \sum_{k=0}^n y_k g \left(\frac{\sum_{k=0}^n x_k}{\sum_{k=0}^n y_k} \right) \leq h \left(\sum_{k=0}^n x_k, \sum_{k=0}^n y_k \right).$$

b) Montrer que la fonction $c : t \mapsto t^{\frac{1}{p}}$ prolongée par continuité en 0 est concave sur $\mathbb{R}_+$ puis en déduire l'inégalité (2).

La fonction c est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $t > 0$, $c'(t) = \frac{1}{p} t^{\frac{1}{p}-1}$ et $c''(t) = \frac{1}{p} \frac{1-p}{p} t^{\frac{1}{p}-2}$.

Ainsi, $c'' \leq 0$ et la fonction c est concave.

On suppose que, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $v_k \neq 0$. On pose alors $x_k = u_k^p$ et $y_k = v_k^q$. En utilisant la question ??,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n y_k \left(\frac{x_k}{y_k} \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \sum_{k=0}^n y_k \left(\frac{\sum_{k=0}^n x_k}{\sum_{k=0}^n y_k} \right)^{\frac{1}{p}} \\ \sum_{k=0}^n v_k u_k &= \sum_{k=0}^n y_k^{1-\frac{1}{p}} x_k^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=0}^n y_k \right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=0}^n x_k \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=0}^n v_k^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=0}^n u_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Dans le cas général, en notant $I = \{k \in \llbracket 0, n \rrbracket \mid v_k \neq 0\}$, d'après le point précédent,

$$\sum_{k \in I} u_k v_k \leq \left(\sum_{k \in I} u_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k \in I} v_k^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

De plus,

$$\sum_{k \in I} u_k v_k = \sum_{k=0}^n u_k v_k, \quad \sum_{k \in I} v_k^q = \sum_{k=0}^n v_k^q, \quad \sum_{k \in I} u_k^p \leq \sum_{k=0}^n u_k^p$$

car tous les termes sont positifs.

On obtient donc bien l'inégalité souhaitée, dans tous les cas.

9. Approximation polynomiale uniforme d'une fonction höldérienne.

Soient $\alpha \in]0, 1]$ et $f \in \mathcal{H}_\alpha$. On note $L \in \mathbb{R}_+^*$ une contante telle que

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2, |f(y) - f(x)| \leq L|y - x|^\alpha$$

Considérons la suite $(B_n(f))$ de fonctions polynomiales définie dans la partie II.

a) En utilisant l'inégalité (2) de Hölder pour des valeurs à préciser des différents paramètres, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], \sum_{k=0}^n \left| \frac{k}{n} - x \right|^\alpha \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \left(\sum_{k=0}^n \left| \frac{k}{n} - x \right|^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right)^{\frac{\alpha}{2}}.$$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$.

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose

$$p = \frac{2}{\alpha}, q = \frac{\alpha - 2}{\alpha}, \quad u_k = \left| \frac{k}{n} - x \right|^\alpha \left(\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right)^{\frac{\alpha}{2}}, \quad v_k = \left(\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right)^{1 - \frac{2}{\alpha}}.$$

D'après l'inégalité de Hölder,

$$\sum_{k=0}^n \left| \frac{k}{n} - x \right|^\alpha \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^n u_k v_k \leq \left(\sum_{k=0}^n \left| \frac{k}{n} - x \right|^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right)^{\frac{\alpha}{2}} \times \underbrace{\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right)}_{=1}^{\frac{\alpha-2}{\alpha}}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^n \left| \frac{k}{n} - x \right|^\alpha \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \left(\sum_{k=0}^n \left| \frac{k}{n} - x \right|^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right)^{\frac{\alpha}{2}}}$$

b) En déduire que la suite $(B_n(f))$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$ et donner un majorant explicite de $\|B_n(f) - f\|_{\infty, [0, 1]}$ en fonction de n et L (on attend une inégalité qui généralise (1)).

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$.

En utilisant la question 6.a) et la question précédente,

$$\begin{aligned} |B_n(f)(x) - f(x)| &\leq \sum_{k=0}^n \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leq L \sum_{k=0}^n \left| \frac{k}{n} - x \right|^\alpha \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leq L \left(\sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right)^{\frac{\alpha}{2}} \\ &\leq L \left(\frac{x(1-x)}{n} \right)^{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{L}{(4n)^{\frac{\alpha}{2}}}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\|B_n(f) - f\|_{\infty, [0, 1]} \leq \frac{L}{(4n)^{\frac{\alpha}{2}}} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \|B_n(f) - f\|_{\infty, [0, 1]} = 0 \text{ donc } (B_n(f)) \xrightarrow{c.u.} f.}$$

Remarque. Dans le cas $\alpha = 1$, on retrouve le cas lipschitzien. L'inégalité de Hölder a permis de gagner un facteur $\frac{2}{5}$ par rapport à la méthode de séparation des sommes qui a mené à la question .

□

On admettra que, comme pour le cas des fonctions lipschitziennes, ce résultat s'étend aux fonctions hölderiennes sur un segment $[a, b]$.

Partie IV - Approximation simultanée d'une fonction et de sa dérivée

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on définit la fonction polynomiale $B_{k,n} : x \mapsto \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ de sorte que, pour $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, la fonction $B_n(f)$ définie dans la partie II s'écrive comme une combinaison linéaire de ces $n+1$ fonctions polynomiales :

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) B_{k,n}$$

10. Soient $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, montrer que $B'_{k,n}$ est proportionnelle à la différence de $B_{k-1,n-1}$ et de $B_{k,n-1}$ en précisant le coefficient de proportionnalité.

Exprimer  galement $B'_{0,n}$ et $B'_{n,n}$ en fonction de $B_{0,n-1}$ et $B_{n-1,n-1}$.

$B_{k,n}$ est une fonction polynomiale, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0, 1]$.

Pour tout $x \in [0, 1]$,

$$B'_{k,n}(x) = \binom{n}{k} k x^{k-1} (1-x)^{n-k} - \binom{n}{k} (n-k) x^k (1-x)^{n-k-1}$$

On applique de nouveau la relation du capitaine :

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1} \text{ et } (n-k) \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k-1)!} = n \binom{n-1}{k}$$

(formules qui restent vraies, même si $k=0$ ou $n=k$, si l'on accepte $\binom{n}{-1} = 0 = \binom{n-1}{n}$.)

On trouve alors :

$$B'_{k,n}(x) = \underbrace{n \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{(n-1)-(k-1)}}_{=B_{k-1,n-1}} - \underbrace{n \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{(n-1)-k}}_{=B_{k,n-1}}$$

$$\boxed{B'_{k,n}(x) = n B_{k-1,n-1}(x) - n B_{k,n-1}(x)}$$

(La formule étant donc vraie, même si $k=n$)

b) Justifier que $B_n(f)$ est dérivable sur $[0, 1]$ et que,

$$B_n(f)' = n \sum_{k=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) B_{k,n-1}.$$

On a alors, puisque $B_n(f)$ est elle également polynomiale donc dérivable ; pour tout $x \in [0, 1]$:

$$B_n(f)'(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) B'_{k,n} = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) [n B_{k-1,n-1}(x) - n B_{k,n-1}(x)]$$

et par linéarité,

$$\begin{aligned}
 B_n(f)'(x) &= n \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) B_{k-1,n-1}(x) - n \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) B_{k,n-1}(x) \\
 &= n \sum_{h=0}^{n-1} \overbrace{f\left(\frac{h+1}{n}\right) B_{h,n-1}(x)}^{h=k-1} - n \sum_{h=0}^{n-1} \overbrace{f\left(\frac{h}{n}\right) B_{h,n-1}(x)}^{h=k} + 0 \\
 &= n \sum_{h=0}^{n-1} \left[f\left(\frac{h+1}{n}\right) - f\left(\frac{h}{n}\right) \right] B_{h,n-1}(x) \\
 &\boxed{B_n(f)' = n \sum_{k=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) B_{k,n-1}}
 \end{aligned}$$

11. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$. Soient $a, b \in [0, 1]$ avec $a \neq b$

a) Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi : t \mapsto f(b) - f(t) - (b-t)f'(t) - \frac{M}{2}(b-t)^2$ satisfasse $\varphi(a) = 0$.

Montrer que le choix d'un tel nombre M est possible, puis qu'il existe un réel $c \in]a, b[$ (ou $]b, a[$) tel que $M = f''(c)$.

Puisque $b \neq a$, observons que

$$\varphi(a) = 0 \iff f(b) - f(a) - (b-a)f'(a) - \frac{M}{2}(b-a)^2 = 0 \iff 2 \frac{f(b) - f(a) - (b-a)f'(a)}{(b-a)^2} = M$$

si bien qu'en posant $M = 2 \frac{f(b) - f(a) - (b-a)f'(a)}{(b-a)^2}$, on obtient $\varphi(a) = 0$.

Notons alors que

- ★ $\varphi(a) = 0$ et $\varphi(b) = f(b) - f(b) - 0 + 0 = 0$,
 - ★ f est de classe $\mathcal{C}^2$ donc, f et f' sont dérivables sur $[0, 1]$, donc φ est dérivable sur $[0, 1]$ donc φ est continue sur le segment $[0, 1]$ et dérivable sur l'ouvert $]0, 1[$,
- ainsi, on peut appliquer le théorème de Rolle :

$$\exists c \in]a, b[\text{ ou }]b, a[, \quad 0 = \varphi'(c) = -f'(c) + f'(c) - (b-c)f''(c) - (-2)\frac{M}{2}(b-c)$$

Après simplification puisque $b-c \neq 0$ (car $c \in]a, b[$ ou $]b, a[$) : $M = f''(c)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, il existe un nombre } c \in]a, b[\text{ (ou }]b, a[) \text{ tel que } M = f''(c).}$$

b) Montrer alors que $f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f''(c)$.

On prolonge la réponse de la question précédente, on a $\varphi(a) = 0 = f(b) - f(a) - (b-a)f'(a) + \frac{f''(c)}{2}(b-a)^2$

$$\boxed{\forall a \neq b \in [0, 1], \exists c \in [a, b] \text{ (ou } [b, a]) \text{ tel que } f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f''(c)}$$

c) Soient $n \geq 2$ et $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Montrer que $\frac{k}{n} \leq \frac{k}{n-1} \leq \frac{k+1}{n}$.

Puisque $0 < n - 1 \leq n$ (car $n \geq 2$) et que tout est positif : $\frac{k}{n} \leq \frac{k}{n-1}$.

Puis $kn - (k+1)(n-1) = kn - kn - n + k + 1 = k + 1 - n \leq 0$,

on a donc $kn \leq (k+1)(n-1)$ et donc $\frac{k}{n-1} \leq \frac{k+1}{n}$.

$$\boxed{\frac{k}{n} \leq \frac{k}{n-1} \leq \frac{k+1}{n}}$$

d) En combinant les réponses précédentes avec $a \leftarrow \frac{k}{n-1}$, montrer que pour $n \geq 2$,

il existe $(c_{k,n}, c'_{k,n}) \in \left] \frac{k}{n}, \frac{k}{n-1} \right[\times \left] \frac{k}{n-1}, \frac{k+1}{n} \right[$ tels que

$$n \left(f \left(\frac{k+1}{n} \right) - f \left(\frac{k}{n} \right) \right) = f' \left(\frac{k}{n-1} \right) - \frac{k^2}{2n(n-1)^2} f''(c_{k,n}) + \frac{(n-k-1)^2}{2n(n-1)^2} f''(c'_{k,n})$$

On applique deux fois la formule trouvée précédemment, avec $a \leftarrow \frac{k}{n-1}$.

Une première fois avec $b \leftarrow \frac{k}{n}$, il existe $c_{k,n} \in \left] \frac{k}{n}, \frac{k}{n-1} \right[$

$$f \left(\frac{k}{n} \right) = f \left(\frac{k}{n-1} \right) + \left(\frac{k}{n} - \frac{k}{n-1} \right) f' \left(\frac{k}{n-1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{k}{n} - \frac{k}{n-1} \right)^2 f''(c_{k,n})$$

Une deuxième fois avec $b \leftarrow \frac{k+1}{n}$, il existe $c'_{k,n} \in \left] \frac{k}{n-1}, \frac{k+1}{n} \right[$

$$f \left(\frac{k+1}{n} \right) = f \left(\frac{k}{n-1} \right) + \left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n-1} \right) f' \left(\frac{k}{n-1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n-1} \right)^2 f''(c'_{k,n})$$

On peut soustraire ces deux égalités (la seconde moins la première) :

$$\begin{aligned} f \left(\frac{k+1}{n} \right) - f \left(\frac{k}{n} \right) &= \left[\left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n-1} \right) - \left(\frac{k}{n} - \frac{k}{n-1} \right) \right] f' \left(\frac{k}{n-1} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n-1} \right)^2 f''(c'_{k,n}) - \frac{1}{2} \left(\frac{k}{n} - \frac{k}{n-1} \right)^2 f''(c_{k,n}) \\ &= \left[\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} \right] f' \left(\frac{k}{n-1} \right) + \frac{(n-k-1)^2}{2n^2(n-1)^2} f''(c'_{k,n}) - \frac{k^2}{2n^2(n-1)^2} f''(c_{k,n}) \end{aligned}$$

En multipliant par n :

$$\boxed{n \left(f \left(\frac{k+1}{n} \right) - f \left(\frac{k}{n} \right) \right) = f' \left(\frac{k}{n-1} \right) - \frac{k^2}{2n(n-1)^2} f''(c_{k,n}) + \frac{(n-k-1)^2}{2n(n-1)^2} f''(c'_{k,n})}$$

e) Établir ensuite l'existence d'une constante K (dépendant de M) telle que pour tout $n \geq 2$,

$$\forall x \in [0, 1], \quad |B_n(f)'(x) - B_{n-1}(f')(x)| \leq \frac{K}{n}.$$

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$.

Elle est donc dérivable deux fois et sa dérivée seconde f'' est continue sur $[0, 1]$.

$[0, 1]$ est un segment = intervalle fermé et borné (c'est un intervalle compact), donc le théorème de

Weierstrass permet d'affirmer que f'' est bornée sur $[0, 1]$.

$$\boxed{\text{Ainsi, il existe } M > 0 \text{ tel que pour tout } x \in [0, 1], |f''(x)| \leq M.}$$

En reprenant l'expression trouvée en 12. :

$$\begin{aligned} B_n(f)' - B_{n-1}(f') &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[n \left(f \left(\frac{k+1}{n} \right) - f \left(\frac{k}{n} \right) \right) - f' \left(\frac{k}{n-1} \right) \right] B_{k,n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{(n-k-1)^2}{2n(n-1)^2} f''(c'_{k,n}) - \frac{k^2}{2n(n-1)^2} f''(c_{k,n}) \right] B_{k,n-1} \end{aligned}$$

Soit $x \in [0, 1]$. Majorons la valeur absolue de la somme en utilisant l'inégalité triangulaire deux fois :

$$\begin{aligned} |B_n(f)'(x) - B_{n-1}(f')(x)| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{(n-k-1)^2}{2n(n-1)^2} f''(c'_{k,n}) - \frac{k^2}{2n(n-1)^2} f''(c_{k,n}) \right] B_{k,n-1}(x) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{(n-k-1)^2}{2n(n-1)^2} f''(c'_{k,n}) - \frac{k^2}{2n(n-1)^2} f''(c_{k,n}) \right| \times |B_{k,n-1}(x)| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{(n-k-1)^2}{2n(n-1)^2} |f''(c'_{k,n})| + \frac{k^2}{2n(n-1)^2} |f''(c_{k,n})| \right) \times B_{k,n-1}(x) \quad \text{car } B_{k,n-1}(x) \geq 0 \\ &\quad \text{attention : l'inégalité triangulaire a transformé un } - \text{ en } + ! \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{(n-k-1)^2}{2n(n-1)^2} + \frac{k^2}{2n(n-1)^2} \right) \times M \times B_{k,n-1}(x) \\ &\leq \frac{M}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{(n-k-1)^2}{(n-1)^2} + \frac{k^2}{(n-1)^2} \right) \times B_{k,n-1}(x) \quad \text{car } n \geq 1 \\ &\leq \frac{M}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} 2B_{k,n-1}(x) \quad \text{car } 0 \leq \frac{n-k-1}{n-1} \leq 1 \text{ et } 0 \leq \frac{k}{n-1} \leq 1 \\ &\leq \frac{M}{n} \quad \text{car } \sum_{k=0}^{n-1} B_{k,n-1}(x) = 1. \end{aligned}$$

Ainsi, en prenant $K = M$,

$$\boxed{\text{pour tout } x \in [0, 1], |B_n(f)'(x) - B_{n-1}(f')(x)| \leq \frac{K}{n}.}$$

f) Conclure que $B_n(f)' \xrightarrow{c.u.} f'$ sur $[0, 1]$.

Soit $\varepsilon > 0$.

Il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \geq N, \frac{K}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que $\forall x \in [0, 1], |B_n(f')(x) - f'(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ d'après la fin de la partie II.

Et ainsi, pour tout $n \geq \max(N, N' + 1)$: pour tout $x \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} |B_n(f)'(x) - f'(x)| &= |B_n(f)'(x) - B_{n-1}(f')(x) + B_{n-1}(f')(x) - f'(x)| \\ &\leq |B_n(f)'(x) - B_{n-1}(f')(x)| + |B_{n-1}(f')(x) - f'(x)| \\ &\leq \frac{K}{n+1} + \frac{\varepsilon}{2} \leq 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

La majoration est uniforme en x .

$$\boxed{\text{On peut affirmer que, si } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } [0, 1], B_n(f)' \text{ converge uniformément vers } f' \text{ sur } [0, 1].}$$