

DEVOIR SURVEILLÉ N°6

Sujet donné le samedi 14 février 2026, 4h.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

La notation tiendra particulièrement compte de la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées. Les réponses aux questions seront numérotées et séparées par un trait horizontal. Les résultats essentiels devront être encadrés ou soulignés.

BON TRAVAIL

DIFFÉRENTS MODES DE CONVERGENCE D'UNE SUITE DE FONCTIONS ET APPLICATION À L'APPROXIMATION POLYNOMIALE

Dans ce problème on s'intéresse à des suites de fonctions (φ_n) . On définit deux types de convergence.

— La **convergence simple** de la suite (φ_n) vers φ sur l'intervalle I , notée $(\varphi_n) \xrightarrow{c.s.} \varphi$ si :

$$\forall x \in I, (\varphi_n(x)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \varphi(x) \text{ i.e. } \forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon,$$

— La **convergence uniforme** de la suite (φ_n) vers φ sur l'intervalle I , notée $(\varphi_n) \xrightarrow{c.u.} \varphi$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, \forall x \in I, |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon.$$

Si f est une fonction bornée sur l'intervalle I , on note $\|f\|_{\infty, I} = \sup\{|f(x)|, x \in I\}$. Cette notation permet de reformuler la définition de la convergence uniforme, ce qui est l'objet de la question ??.

La Partie **I** est dévolue à l'étude des modes de convergences, notamment à l'étude d'exemples et de contre-exemples. Dans la Partie **II**, on démontre que toute fonction lipschitzienne sur un segment est limite uniforme d'une suite de polynômes.

Dans la Partie **III**, on définit et étudie la notion de fonction höldérienne, puis on étend les résultats de la Partie **II** à cette classe de fonctions.

Dans la Partie **IV** on montre qu'il est possible, pour une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, d'approcher de manière uniforme, simultanément la fonction et sa dérivée.

Partie I - Convergence d'une suite de fonctions

1. Dans cette question, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et φ sont des fonctions définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

a) Montrer que si $(\varphi_n) \xrightarrow{c.u.} \varphi$, alors $(\varphi_n) \xrightarrow{c.s.} \varphi$.

b) Montrer que $(\varphi_n) \xrightarrow{c.u.} \varphi$ si et seulement s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\varphi_n - \varphi$ est bornée sur I et $(\|\varphi_n - \varphi\|_{\infty, I})_{n \geq N} \rightarrow 0$.

2. **Exemple 1.** On considère la suite de fonctions (f_n) définie sur $\mathbb{R}$, par $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = x \arctan(nx)$.

a) Montrer que $(f_n) \xrightarrow{c.s.} f$ où $f : x \mapsto \frac{\pi}{2}|x|$.

b) Montrer que, pour tout $u > 0$, $\frac{\pi}{2} - \arctan u = \arctan \frac{1}{u}$.

c) Après avoir étudié $\psi : u \mapsto u \left(\frac{\pi}{2} - \arctan u \right)$ sur $\mathbb{R}_+$, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}$. En déduire que la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

3. **Exemple 2.** On considère la suite de fonctions (g_n) définie sur $\mathbb{R}$, par $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, g_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2 x^2}$.

a) Soit $x_0 \in \mathbb{R}^*$ fixé. On note $u_n = g_n(x_0)$. Donner un développement limité à l'ordre 5 de (u_n) pour $n \rightarrow +\infty$. En déduire que (g_n) converge simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction g à préciser.

b) Évaluer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n \left(\frac{1}{n} \right)$.

c) Déterminer si la suite (g_n) converge uniformément sur $[0, 1]$ vers g .

Partie II - Approximation d'une fonction lipschitzienne

4. Calculs préliminaires.

Soient $x \in [0, 1]$ et n un entier naturel.

Établir les égalités suivantes.

a) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1$, $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx$ et $\sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2$.

b) Dédire des calculs précédents la valeur de $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$.

c) En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $\sum_{k=0}^n \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}$.

5. Majoration d'une suite de fonctions.

Pour tout entier naturel non nul n , notons S_n la fonction polynomiale définie pour tout $x \in [0, 1]$ par

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n \left| x - \frac{k}{n} \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Le but de cette partie est de majorer $S_n(x)$ en fonction de n et x .

Soient $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $V_{n,x} = \left\{ k \in [0, n] \mid \left| x - \frac{k}{n} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \right\}$ et $W_{n,x} = [0, n] \setminus V_{n,x}$, son complémentaire.

a) Montrer qu'il existe une constante $a \in \mathbb{R}_+$ à préciser et indépendante de n et x telle que

$$\sum_{k \in V_{n,x}} \left| x - \frac{k}{n} \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{a}{\sqrt{n}}.$$

b) En comparant, pour tout $k \in W_{n,x}$, le réel $\sqrt{n} \left| x - \frac{k}{n} \right|$ à son carré, montrer que

$$\sum_{k \in W_{n,x}} \left| x - \frac{k}{n} \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{x(1-x)}{\sqrt{n}}.$$

c) Conclure que $S_n(x) \leq \frac{5}{4\sqrt{n}}$.

6. Approximation polynomiale uniforme d'une fonction lipschitzienne.

Soit f une fonction réelle définie sur le segment $[0, 1]$.

Pour tout entier naturel non nul n , notons $B_n(f)$ la fonction polynomiale définie pour tout $x \in [0, 1]$ par

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Le but de cette question est d'établir la convergence uniforme sur $[0, 1]$ de la suite de fonctions $(B_n(f))$ vers f lorsque f est lipschitzienne sur $[0, 1]$ puis d'étendre le résultat à toute fonction lipschitzienne sur un segment.

a) **Exemple 1.** Soit $f : x \in [0, 1] \mapsto x^2$.

Pour tout n entier naturel, calculer explicitement la fonction $B_n(f)$ en fonction de f , puis $\|B_n(f) - f\|_{\infty, [0, 1]}$.

Cet exemple illustre-t-il le résultat à atteindre ?

b) **Exemple 2.** Notons $\delta_0 : x \in [0, 1] \mapsto \delta_{0,x} = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0, \\ 0 & \text{si } x \in]0, 1]. \end{cases}$

Pour tout n entier naturel non nul, calculer explicitement la fonction $B_n(\delta_0)$ puis $\|B_n(\delta_0) - \delta_0\|_{\infty, [0, 1]}$.

Cet exemple est-il en contradiction avec le résultat à atteindre ?

c) Soient $L \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction L -lipschitzienne sur $[0, 1]$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall x \in [0, 1], |B_n(f)(x) - f(x)| \leq \frac{5L}{4\sqrt{n}} \quad (1)$$

Que peut-on en déduire concernant la convergence de la suite de fonctions $(B_n(f))$?

d) **Extension du résultat.**

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et g une fonction à valeurs réelles lipschitzienne sur $[a, b]$.

Montrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales sur $[a, b]$ qui converge uniformément vers g sur $[a, b]$.

On pourra d'abord montrer qu'il existe une fonction affine φ telle que $\varphi([0, 1]) = [a, b]$ pour ensuite considérer la fonction $g \circ \varphi$.

Partie III - Approximation d'une fonction hölderienne

Soit $\alpha \in]0, 1]$.

On note p_α le prolongement par continuité sur $[0, 1]$ de la fonction définie sur $]0, 1]$ par $t \mapsto t^\alpha$.

De manière générale, on étendra la relation t^α en notant $0^\alpha = 0$.

Une fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est α -hölderienne sur $[0, 1]$ s'il existe une constante $L \in \mathbb{R}_+^*$ telle que

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2, |f(y) - f(x)| \leq L|y - x|^\alpha$$

On note $\mathcal{H}_\alpha$ l'ensemble des fonctions α -hölderiennes sur $[0, 1]$.

Les fonctions 1-hölderiennes sur $[0, 1]$ sont les fonctions lipschitziennes sur $[0, 1]$.

On note, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}^k([0, 1])$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur le segment $[0, 1]$ et de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[0, 1]$.

7. Généralités sur les fonctions hölderiennes sur $[0, 1]$.

Soit $\alpha \in]0, 1]$.

a) En effectuant une étude de fonction, montrer que, pour tout $t \in [0, 1]$, $1 - t^\alpha \leq (1 - t)^\alpha$ puis en déduire que $p_\alpha \in \mathcal{H}_\alpha$.

b) Justifier que, pour tout $\beta \in]\alpha, 1]$, $p_\alpha \notin \mathcal{H}_\beta$.

c) Montrer les inclusions

$$\mathcal{C}^1([0, 1]) \subset \mathcal{H}_\alpha \subset \mathcal{C}^0([0, 1])$$

et justifier qu'elles sont strictes.

d) Montrer que $\mathcal{H}_\alpha$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{C}^0([0, 1])$.

e) Soit $\beta \in]0, 1]$ tel que $\alpha < \beta$. Montrer que $\mathcal{H}_\beta \subset \mathcal{H}_\alpha$. Cette inclusion est-elle stricte?

En déduire que, pour $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, l'ensemble $I(f) = \{\alpha \in]0, 1] \mid f \in \mathcal{H}_\alpha\}$ est un intervalle de $[0, 1]$.

f) **Exemples d'ensembles $I(f)$: les différentes formes sont possibles !**

(i) Donner deux fonctions f et h définies sur $[0, 1]$ telles que $I(f) = \emptyset$ et $I(h) = \left]0, \frac{1}{2}\right]$.

Considérons, pour tout $\gamma \in [1, +\infty[$, la fonction g_γ définie sur $]0, 1]$ par $g_\gamma(x) = (-\sqrt{x} \ln(x))^\gamma$.

(ii) Montrer que g_γ se prolonge par continuité en 0 en une fonction notée $\tilde{g}_\gamma$ puis justifier que $\tilde{g}_1 \notin \mathcal{H}_{\frac{1}{2}}$.

(iii) Soit $\gamma > 2$. Montrer que $\tilde{g}_\gamma \in \mathcal{C}^1([0, 1])$ et en déduire $I(\tilde{g}_\gamma)$.

(iv) En observant que $\tilde{g}_1 = p_{\frac{1}{\gamma}} \circ \tilde{g}_\gamma$, conclure que $I(\tilde{g}_1) = \left]0, \frac{1}{2}\right]$.

8. Inégalité de Hölder.

Soient $(p, q) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Soient $n \in \mathbb{N}$, $(u_0, \dots, u_n) \in (\mathbb{R}_+)^{n+1}$ et $(v_0, \dots, v_n) \in (\mathbb{R}_+)^{n+1}$.

Le but de cette question est d'établir l'inégalité

$$\sum_{k=0}^n u_k v_k \leq \left(\sum_{k=0}^n u_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=0}^n v_k^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad (2)$$

a) Soit $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ concave. Considérons la fonction h définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$ par $h(x, y) = yg\left(\frac{x}{y}\right)$.

Montrer que : $\forall (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^{n+1}, \forall (y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{R}_+^{n+1}, \sum_{k=0}^n h(x_k, y_k) \leq h\left(\sum_{k=0}^n x_k, \sum_{k=0}^n y_k\right)$.

b) Montrer que la fonction $c : t \mapsto t^{\frac{1}{p}}$ prolongée par continuité en 0 est concave sur $\mathbb{R}_+$ puis en déduire l'inégalité (2).

9. Approximation polynomiale uniforme d'une fonction hölderienne.

Soient $\alpha \in]0, 1]$ et $f \in \mathcal{H}_\alpha$. On note $L \in \mathbb{R}_+^*$ une constante telle que

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2, |f(y) - f(x)| \leq L|y - x|^\alpha$$

Considérons la suite $(B_n(f))$ de fonctions polynomiales définie dans la partie II.

a) En utilisant l'inégalité (2) de Hölder pour des valeurs à préciser des différents paramètres, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], \sum_{k=0}^n \left| \frac{k}{n} - x \right|^\alpha \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \left(\sum_{k=0}^n \left| \frac{k}{n} - x \right|^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right)^{\frac{\alpha}{2}}.$$

b) En déduire que la suite $(B_n(f))$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$ et donner un majorant explicite de $\|B_n(f) - f\|_{\infty, [0, 1]}$ en fonction de n et L (on attend une inégalité qui généralise (1)).
On admettra que, comme pour le cas des fonctions lipschitziennes, ce résultat s'étend aux fonctions hôlderiennes sur un segment $[a, b]$.

Partie IV - Approximation simultanée d'une fonction et de sa dérivée

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on définit la fonction polynomiale $B_{k,n} : x \mapsto \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ de sorte que, pour $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, la fonction $B_n(f)$ définie dans la partie II s'écrit comme une combinaison linéaire de ces $n+1$ fonctions polynomiales :

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) B_{k,n}$$

10. Soient $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, montrer que $B'_{k,n-1}$ est proportionnelle à la différence de $B_{k-1,n-1}$ et de $B_{k,n-1}$ en précisant le coefficient de proportionnalité.

Exprimer également $B'_{0,n}$ et $B'_{n,n}$ en fonction de $B_{0,n-1}$ et $B_{n-1,n-1}$.

b) Justifier que $B_n(f)$ est dérivable sur $[0, 1]$ et que,

$$B_n(f)' = n \sum_{k=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) B_{k,n-1}.$$

11. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$. Soient $a, b \in [0, 1]$ avec $a \neq b$

a) Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi : t \mapsto f(b) - f(t) - (b-t)f'(t) - \frac{M}{2}(b-t)^2$ satisfasse $\varphi(a) = 0$.

Montrer que le choix d'un tel nombre M est possible, puis qu'il existe un réel $c \in]a, b[$ (ou $]b, a[$) tel que $M = f''(c)$.

b) Montrer alors que $f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f''(c)$.

c) Soient $n \geq 2$ et $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Montrer que $\frac{k}{n} \leq \frac{k}{n-1} \leq \frac{k+1}{n}$.

d) En combinant les réponses précédentes avec $a \leftarrow \frac{k}{n-1}$, montrer que pour $n \geq 2$,

il existe $(c_{k,n}, c'_{k,n}) \in \left] \frac{k}{n}, \frac{k}{n-1} \right[\times \left] \frac{k}{n-1}, \frac{k+1}{n} \right[$ tels que

$$n \left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) = f'\left(\frac{k}{n-1}\right) - \frac{k^2}{2n(n-1)^2} f''(c_{k,n}) + \frac{(n-k-1)^2}{2n(n-1)^2} f''(c'_{k,n})$$

e) Établir ensuite l'existence d'une constante K (dépendant de M) telle que pour tout $n \geq 2$,

$$\forall x \in [0, 1], |B_n(f)'(x) - B_{n-1}(f')(x)| \leq \frac{K}{n}.$$

f) Conclure que $B_n(f)' \xrightarrow{c.u.} f'$ sur $[0, 1]$.