

DEVOIR SURVEILLÉ N°7
CORRECTION

Sujet donné le mercredi 18 mars 2026, 3h.

INTERPOLATION DE HERMITE ET POLYNÔMES ORTHOGONAUX

Dans la Partie **I**, on reprend les polynômes d'interpolation de LAGRANGE. On exploite cette base pour donner une formule de quadrature d'une intégrale.

Dans la Partie **II**, on étend l'interpolation à celle associée à HERMITE. Elle permet d'interpoler P et ses dérivées en des points particuliers. On n'a pas besoin d'explicitier la base des polynômes obtenues, seules les méthodes d'algèbre sont exploitées.

Dans la Partie **III**, on revient sur le calcul intégral de la première partie afin d'exploiter des méthodes d'algèbre bilinéaire.

Partie I - Interpolation de Lagrange et applications aux formules de quadrature

Soit $I = [-1, 1]$. On fixe un entier $n \geq 2$ pour toute cette partie.

Soit $f : I \rightarrow]0, +\infty[$ une fonction continue, strictement positive.

Soit $D \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme ayant n racines réelles distinctes $r_1 < \dots < r_n$ dans I .

On suppose, de plus, que D vérifie la propriété. :

$$\forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \int_{-1}^1 Q(x)D(x)f(x) \, dx = 0$$

1. Base de Lagrange

a) Quelle est la dimension de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$? On n'attend pas de démonstration

C'est un résultat du cours,

$$\dim(\mathbb{R}_{n-1}[X]) = n$$

Une base (dite canonique) est $(1, X, \dots, X^{n-1})$ composée de n vecteurs.

b) Montrer qu'il existe une base $(L_1, \dots, L_n)$ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ telle que pour tout entier $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $L_i(r_j) = \delta_{i,j}$.

Plusieurs façons pour répondre à cette question :

— On peut exhiber la base en question (c'est ce que nous allons faire ici)

— On peut montrer que $\Phi : \mathbb{R}_{n-1}[X] \rightarrow \mathbb{R}^n, P \mapsto (P(r_1), P(r_2), \dots, P(r_n))$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels,

pour des raisons de dimension et car Φ est injective, vu que $\text{Ker} \Phi = \{0\}$.

C'est la méthode exploitée en question truc.

— On peut montrer que $(L_i)_{1 \leq i \leq n}$ est la base duale de

$$\text{Posons, pour tout } i \in \mathbb{N}_n, L_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{X - r_j}{r_i - r_j}.$$

Nous définissons ainsi n polynômes de degré $n-1$, donc vecteurs de l'espace $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ de dimension n .
Evaluons pour tout $j \in \mathbb{N}_n$,

$$L_i(r_j) = \prod_{\substack{h=1 \\ h \neq i}}^n \frac{r_j - r_h}{r_i - r_h} = \begin{cases} 0 & \text{si } \exists h \in \mathbb{N}_n \setminus \{i\} \mid r_j = r_h \\ \prod_{\substack{h=1 \\ h \neq i}}^n \frac{r_j - r_h}{r_i - r_h} & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ 1 & \text{si } j = i \end{cases}$$

Montrons que $(L_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille libre.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i L_i = \tilde{0}$ (polynôme nul).

En affectant la valeur r_j à ce polynôme, on trouve :

$$0 = \tilde{0}(r_j) = \sum_{i=1}^n L_i(r_j) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n 0 + \lambda_j \underbrace{1}_{i=j} = \lambda_j$$

Ainsi, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_j = 0$.

Ainsi, on a trouvé explicitement une famille libre de n vecteurs de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, c'en est une base.

Il existe une base $(L_1, \dots, L_n)$ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ telle que pour tout entier $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $L_i(r_j) = \delta_{i,j}$.

On a exploité la force de l'algèbre linéaire et tout particulièrement de la dimension finie.

Mais on aurait également pu montrer que la famille (L_i) est génératrice.

Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $T = P - \sum_{i=1}^n P(r_i) L_i$.

Alors pour tout $j \in \mathbb{N}_n$, $T(r_j) = P(r_j) - \sum_{i=1}^n P(r_i) L_i(r_j) = P(r_j) - \sum_{i=1}^n P(r_i) \delta_{i,j} = P(r_j) - P(r_j) = 0$.

Donc T admet au moins n racines, mais T est de degré au plus $n-1$; donc $T = 0$.

Ainsi $P = \sum_{i=1}^n P(r_i) L_i$.

2. Une première application. Elargie à $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$

a) Montrer, en exploitant la base $(L_1, \dots, L_n)$, qu'il existe des nombres réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \int_{-1}^1 P(x) f(x) dx = \sum_{i=1}^n \lambda_i P(r_i)$$

Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Ecrivons P sur la base $(L_i)_{1 \leq i \leq n}$: il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ tel que $P = \sum_{i=1}^n \alpha_i L_i$.

Par linéarité de l'intégration :

$$\int_{-1}^1 P(t) f(t) dt = \int_{-1}^1 \sum_{i=1}^n \alpha_i L_i(t) f(t) dt = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_{-1}^1 L_i(t) f(t) dt$$

Pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, le nombre $\int_{-1}^1 L_i(t) f(t) dt$ est indépendant de P , notons le λ_i .

Par ailleurs, pour tout $j \in \mathbb{N}_n$,

$$P(r_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_i L_i(r_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{i,j} = \alpha_j$$

Donc

$$\int_{-1}^1 P(t) f(t) dt = \sum_{i=1}^n \lambda_i P(r_i) \text{ avec } \lambda_i = \int_{-1}^1 L_i(t) f(t) dt$$

b) Montrer que si $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, on a

$$\int_{-1}^1 P(x) f(x) dx = \sum_{i=1}^n \lambda_i P(r_i) \tag{1}$$

On pourra considérer la division euclidienne de P par D .

Soit $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$.

Effectuons la division euclidienne de P par D : il existe $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = QD + R$ avec $\deg R < \deg D = n$.

Notons que $QD = P - R$, donc $\deg QD = \deg Q + \deg D \leq \max(\deg P, \deg R) \leq \deg P$ (ou bien $\deg P \geq n$ et donc $\deg P > \deg R$, ou bien $\deg P \leq n-1$ et alors $Q = 0$, $P = R$ et donc $\deg R = \deg P$).
Donc $\deg Q \leq \deg P - \deg D \leq 2n-1-n = n-1$. Par linéarité :

$$\int_{-1}^1 P(x)f(x) dx = \int_{-1}^1 Q(x)P(x)f(x) dx + \int_{-1}^1 R(x)f(x) dx = 0 + \int_{-1}^1 R(x)f(x) dx$$

Or $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on peut donc appliquer le résultat de la question précédente :

$$\int_{-1}^1 R(x)f(x) dx = \sum_{i=1}^n \lambda_i R(r_i)$$

Or $R = P - QD$, donc pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $R(r_i) = P(r_i) - Q(r_i)D(r_i) = P(r_i)$ car r_i est une racine de D .
Ainsi :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X], \int_{-1}^1 P(x)f(x) dx = \int_{-1}^1 R(x)f(x) dx = \sum_{i=1}^n \lambda_i R(r_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i P(r_i)$$

c) Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. En évaluant l'égalité (1) sur le polynôme $T_i := \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (X - r_j)^2$, montrer que $\lambda_i \geq 0$.

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\deg T_i = 2(n-1)$, donc $T_i \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$.

Ainsi, on a bien $\int_{-1}^1 T_i(x)f(x) dx = \sum_{h=1}^n \lambda_h T_i(r_h)$. Or $T_i(r_h) = \begin{cases} 0 & \text{si } h \neq i \\ \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (r_i - r_j)^2 & \text{si } h = i \end{cases}$

$$\text{Donc } \int_{-1}^1 T_i(x)f(x) dx = \lambda_i \prod_{j \neq i} (r_i - r_j)^2.$$

De plus, pour tout $x \in [-1, 1]$, $f(x) \geq 0$, $T_i(x) = \prod_{j \neq i} (x - r_j)^2 \geq 0$, donc $\int_{-1}^1 T_i(x)f(x) dx \geq 0$;

$$\text{alors que } \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (r_i - r_j)^2 \geq 0.$$

$$\text{Donc, nécessairement, } \lambda_i \geq 0$$

3. Soit g une fonction continue et positive définie sur $I = [-1, 1]$. On suppose que $\int_{-1}^1 g(t) dt = 0$.

a) Etudier les variations de $G : x \mapsto \int_{-1}^x g(t) dt$. Montrer que G puis g sont nulles.

g est continue, donc elle admet une primitive G . Celle-ci est de classe $\mathcal{C}^1$.

On a alors, $\forall x \in [-1, 1]$, $G'(x) = g(x) \geq 0$, donc G est croissante sur $[-1, 1]$.

Ainsi, pour tout $x \in [-1, 1]$: $G(-1) \leq G(x) \leq G(1)$. Or $G(-1) = 0$ et $G(1) = \int_{-1}^1 g(t) dt = 0$.

$$\text{Donc } G \text{ est nulle sur } [-1, 1] \text{ et donc } g = G' = 0 \text{ également.}$$

b) Application : montrer que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_i > 0$.

Soit $i \in \mathbb{N}_n$.

Reprenons le résultat du calcul de la question précédente : $\int_{-1}^1 T_i(x)f(x) dx = \lambda_i \prod_{j \neq i} (r_i - r_j)^2$.

On sait que $\lambda_i \geq 0$. Supposons par l'absurde que $\lambda_i = 0$. Alors $\int_{-1}^1 T_i(x)f(x) dx = 0$.

Or $x \mapsto T_i(x)f(x)$ est continue et positive (par produit) sur $[-1, 1]$.

Donc d'après la question précédente : $\forall x \in [-1, 1]$, $T_i(x)f(x) = 0$.

Or par hypothèse : f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, donc jamais nulle, et $\forall x \in [-1, 1]$, $T_i(x) = 0$. Absurde.

Nécessairement, $\forall i \in \mathbb{N}_n$, $\lambda_i > 0$.

Partie II - Interpolation de Hermite

Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$. Soit h une fonction $\mathcal{C}^\infty$ de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On fixe un entier $N \geq 1$.

On dit que h s'annule à l'ordre N dans $[a, b]$ s'il existe un entier $m \leq N$, des nombres $c_1, c_2, \dots, c_m$ tels que $a \leq c_1 < c_2 < \dots < c_m \leq b$ et des entiers strictement positifs $k_1, \dots, k_m$ tels que $\sum_{i=1}^m k_i = N$ et, pour tout

entier $1 \leq i \leq m$ et tout entier $0 \leq k < k_i$, on a $h^{(k)}(c_i) = 0$.

On dit que h s'annule exactement à l'ordre N dans $[a, b]$ si h s'annule à l'ordre N dans $[a, b]$, mais ne s'annule pas à l'ordre $N + 1$ dans $[a, b]$.

On notera que h n'est pas nécessairement une fonction polynomiale.

4. Quelques exemples

a) Que dire d'une fonction polynomiale h qui s'annule à l'ordre $N (\geq 1)$ dans $[a, b]$ et qui n'admet qu'une racine c dans $[a, b]$?

Nécessairement, on a $h^{(k)}(c) = 0$ pour tout $k < N$. Ainsi c est une racine d'ordre (au moins) N de $[a, b]$. La réciproque est vraie.

h qui s'annule à l'ordre $N (\geq 1)$ dans $[a, b]$ avec une unique racine c dans $[a, b]$
si et seulement si $h(x) = (x - c)^M T(x)$ avec $M \geq N$ et pour tout $x \in [a, b]$, $T(x) \neq 0$.

b) Donner l'exemple d'une fonction polynomiale h qui s'annule à l'ordre 5 dans $[0, 1]$ et qui admet exactement trois racines dans $[0, 1]$.

On peut prendre $h_1(x) = (x - a)(x - b)(x - c)^3$ ou $h_2(x) = (x - a)(x - b)^2(x - c)^2$ avec $a, b, c \in [0, 1]$.

En effet, $h_1(a) = 0$, $h_1(b) = 0$ et $h_1(c) = h_1'(c) = h_1''(c) = 0$, donc on a les entiers associés respectivement qui valent 1, 1, 3, de somme égale à 5.

En effet, $h_2(a) = 0$, $h_2(b) = h_2'(b) = 0$ et $h_2(c) = h_2'(c) = 0$, donc on a les entiers associés respectivement qui valent 1, 2, 2, de somme égale à 5.

Concrètement, on peut prendre $h_1 = \left(x - \frac{1}{4}\right) \left(x - \frac{1}{2}\right)^3 \left(x - \frac{3}{4}\right)$ ou $h_2 = \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 \left(x - \frac{1}{2}\right) \left(x - \frac{3}{4}\right)^2$.

c) On considère $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin^2 x \cos^3 x$. Pour quel entier N , peut-on dire que f s'annule exactement à l'ordre N dans $[-\pi, \pi]$?

On explicitera une stratégie en deux temps pour résoudre cette question.

On note que f est bien de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-\pi, \pi]$.

1. Il faut d'abord chercher les racines (ou les zéros) de f . Pour tout $x \in [-\pi, \pi]$

$$f(x) = 0 \iff \sin(x) = 0 \text{ ou } \cos x = 0 \iff x \in \{-\pi, 0, \pi\} \text{ ou } x \in \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$$

Ici on a les nombres $c_1 = -\pi$, $c_2 = -\frac{\pi}{2}$, $c_3 = 0$, $c_4 = \frac{\pi}{2}$ et $c_5 = \pi$.

2. Il reste ensuite à voir si ces nombres sont racines de f' , et si oui de f'' ...

$$\forall x \in [-\pi, \pi],$$

$$f'(x) = 2 \sin x \cos^4 x - 3 \sin^3 x \cos^2 x = \sin x \cos x \times (2 \cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x),$$

donc, pour tout $i \in \mathbb{N}_5$, $f'(c_i) = 0$.

$$\forall x \in [-\pi, \pi],$$

$$f''(x) = 2 \cos^5 x - 8 \sin^2 x \cos^3 x - 9 \sin^2 x \cos^3 x + 6 \sin^4 x \cos x = 2 \cos^5 x - 17 \sin^2 x \cos^3 x + 6 \sin^4 x \cos x.$$

Et donc $f''(-\pi) = f''(\pi) = -2$, $f''(0) = 2$, alors que $f''(c_2) = f''(c_4) = 0$.

$$\forall x \in [-\pi, \pi],$$

$$f'''(x) = -44 \sin x \cos^4 x + 75 \sin^3 x \cos^2 x + 24 \sin^3 x \cos^2 x - 6 \sin^5 x,$$

et donc $f'''(c_2) = 6$ et $f'''(c_4) = -6$.

Ainsi, aux nombres c_i définis précédemment, on associe exactement (et respectivement) $k_1 = 2$, $k_2 = 3$, $k_3 = 2$, $k_4 = 3$ et $k_5 = 2$.

$f \text{ s'annule exactement à l'ordre } 2 + 3 + 2 + 3 + 2 = 12 \text{ dans } [-\pi, \pi].$

5. Hérédité

a) Montrer que si h s'annule à l'ordre $N + 1$ dans $[a, b]$, alors h' s'annule à l'ordre N dans $[a, b]$.

On conserve les notations de l'énoncé : on note $c_1, \dots, c_m$, les racines données par ordre croissant. de h

et respectivement k_i leur ordre (au moins). On sait que $\sum_{i=1}^m k_i = N + 1$.

• Soit $i \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$, h est continue sur $[c_i, c_{i+1}]$, dérivable sur $]c_i, c_{i+1}[$ et $h(c_i) = h(c_{i+1}) = 0$

On peut donc appliquer le théorème de Rolle : $\exists d_i \in]c_i, c_{i+1}[$ tel que $h'(d_i) = 0$.

On associe alors à chacun des $m-1$ nombre d_j , l'entier $h_j = 1$.

• Soit $i \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$, et $k \in \mathbb{N}$, alors $(h')^{(k)}(c_i) = h^{(k+1)}(c_i) = 0$ si $k+1 < k_i$.

Donc si $k_i > 1$, alors c_i est racine de h' et on peut lui associer l'entier $k'_i = k_i - 1$.

Pour faciliter la synthèse, notons $I = \{i \in \mathbb{N}_m \mid k_i > 1\}$, ensemble qui peut être vide.

Finalement, on a trouvé $m-1 + \text{card}(I)$ racines de h' , auxquelles on peut associer le nombre :

$$N' = \sum_{j=1}^{m-1} h_j + \sum_{i \in I} k'_i = \sum_{j=1}^{m-1} 1 + \sum_{i \in I} (k_i - 1) = m - 1 + \sum_{i \in I} (k_i - 1)$$

Notons que si $i \notin I$, alors $k_i = 1$, donc $k_i - 1 = 0$, ainsi

$$\sum_{i \in I} (k_i - 1) + 0 = \sum_{i \in I} (k_i - 1) + \sum_{i \notin I} (k_i - 1) = \sum_{i=1}^m (k_i - 1) = \sum_{i=1}^m k_i - \sum_{i=1}^m 1 = N + 1 - m$$

Ainsi $N' = m - 1 + N + 1 - m = N$.

$\text{Si } h \text{ s'annule à l'ordre } N + 1 \text{ dans } [a, b], \text{ alors } h' \text{ s'annule à l'ordre } N \text{ dans } [a, b].$

b) Montrer que si h s'annule à l'ordre $N + 1$ dans $[a, b]$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $h^{(N)}(c) = 0$.
 On pourra démontrer par récurrence que $h^{(k)}$ s'annule à l'ordre $N - k + 1$.

Soit h qui s'annule à l'ordre $N + 1$ dans $[a, b]$. Posons pour tout $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$, $\mathcal{P}_k : \ll h^{(k)} \text{ s'annule à l'ordre } N - k + 1 \text{ dans } [a, b] \gg$

— $\mathcal{P}_0$ est vraie.

— ($\mathcal{P}_1$ est vraie d'après la question précédente.)

— Soit $k \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket$. Supposons que $\mathcal{P}_k$ est vraie.

Alors $h^{(k)}$ s'annule à l'ordre $N - k + 1 \leq N - (N - 1) + 1 = 2$ dans $[a, b]$.

On peut alors appliquer le résultat de la question précédente à $\bar{h} \leftarrow h^{(k)}$
 qui s'annule à l'ordre $\bar{N} + 1 = (N - k) + 1$ avec $\bar{N} \geq 1$.

Donc $\bar{h}' = h^{(k+1)}$ s'annule à l'ordre $\bar{N} = N - k = N - (k + 1) + 1$ dans $[a, b]$.

Ainsi $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

On a donc démontré le résultat attendu par récurrence, et en particulier $\mathcal{P}_N$ est vraie.

Donc $h^{(N)}$ s'annule à l'ordre $N - N + 1 = 1$ dans $[a, b]$, h admet donc une racine dans $[a, b]$.

Si h s'annule à l'ordre $N + 1$ dans $[a, b]$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $h^{(N)}(c) = 0$.

On fixe, pour le reste de cette partie, f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

6. Interpolation d'HERMITE

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non nul, scindé dans $\mathbb{R}$ et dont toutes les racines sont dans $]a, b[$.

On note $(a <) t_1 < \dots < t_m (< b)$ les racines de P et, pour tout entier $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, on note k_i le plus petit entier tel que $P^{(k_i)}(t_i) \neq 0$.

a) Montrer que si $Q \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme tel que $\deg Q < \deg P$ et, pour tout entier $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ et tout entier $k \in \llbracket 0, k_i - 1 \rrbracket$, $Q^{(k)}(t_i) = 0$, alors $P|Q$ puis $Q = 0$.

Soit $i \in \mathbb{N}_m$.

On sait que pour tout $k < k_i$, $Q^{(k)}(t_i) = 0$. Donc t_i est racine d'ordre de multiplicité au moins égale à k_i .
 Ainsi (cours) : $(X - t_i)^{k_i} | Q$ (divise).

Et par ailleurs, pour tout $i \neq j \in \mathbb{N}_m$ avec $(X - t_i) - (X - t_j) = t_j - t_i \in \mathbb{R}^*$, donc $(X - t_i) \wedge (X - t_j) = 1$.

Ainsi, d'après le lemme de Gauss : $(X - t_i)^{k_i} \wedge (X - t_j) = 1$ et de nouveau : $(X - t_i)^{k_i} \wedge (X - t_j)^{k_j} = 1$.

Ainsi, d'après le lemme divisibilité par des polynômes premiers entre eux : $\prod_{i=1}^m (X - t_i)^{k_i} | Q$.

Mais on a reconnu à gauche, le polynôme P de l'énoncé (à une constante multiplicative non connue).

Par conséquent, il existe $T \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q = T \times P$. En terme de degré : $\deg Q = \deg T + \deg P$.

Or $\deg Q < \deg P$, donc $\deg T < 0$, donc $T = 0$ et

$$Q = 0.$$

b) On note $d = \sum_{i=1}^m k_i$, le degré de P . Montrer que

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}_{d-1}[X] &\longrightarrow \mathbb{R}^d \\ H &\longmapsto (H(t_1), \dots, H^{(k_1-1)}(t_1), H(t_2), \dots, H^{(k_2-1)}(t_2), \dots, H(t_m), \dots, H^{(k_m-1)}(t_m)) \end{aligned}$$

est une application linéaire injective.

- Φ est bien linéaire :

En effet, la dérivation k -ième est linéaire, ainsi que l'affectation en t_i .

Ainsi : $(\lambda H + \mu L)^{(k)} = \lambda H^{(k)} + \mu L^{(k)}$ puis $(\lambda H + \mu L)^{(k)}(t_i) = \lambda H^{(k)}(t_i) + \mu L^{(k)}(t_i)$

Enfin

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda H + \mu L) &= (\lambda H + \mu L(t_1), \dots, \lambda H^{(k_1-1)}(t_1) + \mu L^{(k_1-1)}(t_1), \dots, \lambda H(t_m) + \mu L(t_m), \dots, \lambda H^{(k_m-1)}(t_m) + \mu L^{(k_m-1)}(t_m)) \\ &= \lambda(H(t_1), \dots, H^{(k_1-1)}(t_1), \dots, H(t_m), \dots, H^{(k_m-1)}(t_m)) + \mu(L(t_1), \dots, L^{(k_1-1)}(t_1), \dots, L^{(k_m-1)}(t_m)) \\ &= \lambda\Phi(H) + \mu\Phi(L)\end{aligned}$$

- Φ est injective :

Soit $Q \in \text{Ker}\Phi$, alors Q vérifie exactement les conditions demandées dans la question précédente.

Donc $Q = 0$. Ainsi $\text{Ker}\Phi \subset \{0\}$. L'inclusion réciproque est vraie.

Donc $\text{Ker}\Phi = \{0\}$ et donc Φ est injective.

Φ est une application linéaire injective de $\mathbb{R}_{d-1}[X]$ sur $\mathbb{R}^d$.

c) Grâce au théorème du rang, on peut affirmer que Φ est un isomorphisme (i.e. bijectif).

En déduire qu'il existe un unique polynôme $H(f, P) \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\deg(H(f, P)) < \deg P$ et tel que, pour tout entier $1 \leq i \leq m$, et tout entier $0 \leq k < k_i$,

$$(H(f, P))^{(k)}(t_i) = f^{(k)}(t_i)$$

Les espaces vectoriels $\mathbb{R}_{d-1}[X]$ et $\mathbb{R}^d$ sont des $\mathbb{R}$ -ev de même dimension : égale à d .

Donc Φ est en réalité un isomorphisme.

Ainsi, pour toute application f , il existe un unique polynôme H de degré $< d = \deg P$, antécédent du d -uplet $(f(t_1), \dots, f^{(k_1-1)}(t_1), f(t_2), \dots, f^{(k_2-1)}(t_2), \dots, f(t_m), \dots, f^{(k_m-1)}(t_m))$.

Il existe un unique polynôme $H(f, P) \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\deg(H(f, P)) < \deg P$ et tel que, pour tout entier $1 \leq i \leq m$, et tout entier $0 \leq k < k_i$, $(H(f, P))^{(k)}(t_i) = f^{(k)}(t_i)$.

Remarque :

On a exploité ici la force de l'algèbre linéaire et de la dimension finie. Cela donne une démonstration efficace et donc esthétique.

Mais c'est frustrant car on ne sait rien du polynôme H ...

On serait plus « rassuré » si on connaissait explicitement H_k , l'antécédent de $e_k = (\underbrace{0, \dots, 0}_{k-1 \text{ termes}}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{N-k-1 \text{ termes}})$.

Pour $t \in [a, b] \setminus \{t_1, \dots, t_m\}$, on pose

$$Q(f, P)(t) = \frac{f(t) - H(f, P)(t)}{(t - t_1)^{k_1} \dots (t - t_m)^{k_m}}$$

On peut démontrer que Q est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a, b]$.

7.a) Soit $s_0 \in [a, b]$ et soit un entier $n \geq 1$. Montrer que

$$Q(f, (X - s_0)^n)(s_0) = \frac{f^{(n)}(s_0)}{n!}$$

On exploitera la formule de Taylor-Young.

Ici, $P = (X - s_0)^n$ et donc il n'y a qu'une racine $t_1 = s_0$ d'ordre $k_1 = n$.

Or $T = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(s_0)}{k!} (X - s_0)^k$ est un polynôme de degré $n - 1 < n = \deg P$ vérifiant $\forall k < n, T^{(k)}(s_0) = f^{(k)}(s_0)$.

Par unicité, de H , on peut donc identifier : $T = H(f, P)$.

On a donc $g = f - H(f, P) = f - T$:

$$\forall x \in [a, b], \quad g(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(s_0)}{k!} (x - s_0)^k$$

Or f (et g) est de classe $\mathcal{C}^\infty$, donc on peut appliquer la formule de Taylor-Young, f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de s_0 :

$$f(x) \underset{x \rightarrow s_0}{=} f(s_0) + f'(s_0)(x - s_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(s_0)}{n!} (x - s_0)^n + o((x - s_0)^n) = T(x) + \frac{f^{(n)}(s_0)}{n!} (x - s_0)^n + o((x - s_0)^n)$$

Ainsi,

$$g(x) = f(x) - T(x) \underset{x \rightarrow s_0}{=} \frac{f^{(n)}(s_0)}{n!} (x - s_0)^n + o((x - s_0)^n)$$

$$Q(f, P)(x) = \frac{g(x)}{(x - s_0)^n} \underset{x \rightarrow s_0}{=} \frac{f^{(n)}(s_0)}{n!} + o(1)$$

La limite existe pour $x \rightarrow s_0$:

$$Q(f, (X - s_0)^n)(s_0) = \frac{f^{(n)}(s_0)}{n!}$$

b) Montrer que si P est unitaire : $P \times Q(f, P) = f - H(f, P)$

Notons que, puisque P est unitaire et que toutes les racines de P sont dans $]a, b[$, alors (en conservant les mêmes notations) : $P = \prod_{i=1}^m (X - t_i)^{k_i}$.

Et on retrouve P au dénominateur de la fraction qui définit Q .

Ainsi

$$P \times Q(f, P) = f - H(f, P)$$

c) Soient $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[X]$ deux polynômes unitaires et scindés dans $]a, b[$. Montrer que

$$H(f, P_1 P_2) = H(f, P_1) + P_1 H(Q(f, P_1), P_2) \text{ puis que } Q(f, P_1 P_2) = Q(Q(f, P_1), P_2).$$

Les racines de $P = P_1 P_2$ sont des racines de P_1 et/ou de P_2 .

Soit t une racine de P , supposons qu'elle est d'ordre h_1 de P_1 et d'ordre h_2 de P_2 .

Ainsi, pour tout $h < h_1 + h_2$, $H(f, P_1 P_2)^{(h)}(t) = f^{(h)}(t)$. Ce qui caractérise le polynôme $H(f, P_1 P_2)$.

Par ailleurs, notons $T = H(f, P_1) + P_1 H(Q(f, P_1), P_2)$.

Soit $h < h_1 + h_2$.

$$T^{(h)}(t) = [H(f, P_1) + P_1 H(Q(f, P_1), P_2)]^{(h)}(t) = H(f, P_1)^{(h)}(t) + \sum_{i=0}^h \binom{h}{i} P_1^{(i)}(t) H(Q(f, P_1), P_2)^{(h-i)}(t)$$

où l'on a exploité la linéarité et la formule de Leibniz.

- Si $h < h_1$,

alors $H(f, P_1)^{(h)}(t) = f^{(h)}(t)$

et pour tout $i \leq h$, $P_1^{(i)}(t) = 0$, car t est racine d'ordre $h_1 > h$.

Par conséquent $T^{(h)}(t) = f^{(h)}(t)$.

- Si $h \geq h_1$,

Puisque P_1 est unitaire : $P_1 \times Q(f, P_1) = f - H(f, P_1)$

$$\text{donc } H(f, P_1)^{(h)}(t) = f^{(h)}(t) - \sum_{i=0}^h \binom{h}{i} P_1^{(i)}(t) \times Q(f, P_1)^{(h-i)}(t).$$

$$\text{Donc } T^{(h)}(t) = f^{(h)}(t) + \sum_{i=0}^h \binom{h}{i} P_1^{(i)}(t) \left(H(Q(f, P_1), P_2)^{(h-i)}(t) - Q(f, P_1)^{(h-i)}(t) \right).$$

Par ailleurs, t est racine d'ordre h_1 de P_1 , donc pour $i < h_1$, $P_1^{(i)}(t) = 0$.

$$\text{Donc } T^{(h)}(t) = f^{(h)}(t) + \sum_{i=h_1}^h \binom{h}{i} P_1^{(i)}(t) \left(H(Q(f, P_1), P_2)^{(h-i)}(t) - Q(f, P_1)^{(h-i)}(t) \right).$$

Puis, pour $i \in \llbracket h_1, h \rrbracket$, $h - i \leq h - h_1 < h_1 + h_2 - h_1 = h_2$ (rappel : $h < h_1 + h_2$),

Donc $H(Q(f, P_1), P_2)^{(h-i)}(t) = Q(f, P_1)^{(h-i)}(t)$ par définition de H .

Ainsi dans ce cas là également : $T^{(h)}(t) = f^{(h)}(t)$.

Enfin, notons que

$$\begin{aligned} \deg T &\leq \max(\deg H(f, P_1), \deg(P_1 H(Q(f, P_1), P_2))) \\ &< \max(\deg P_1, \deg P_1 + \deg P_2) = \deg P_1 + \deg P_2 = \deg(P_1 P_2) \end{aligned}$$

Et par unicité de l'existence de H , on peut donc identifier :

$$\boxed{H(f, P_1 P_2) = T = H(f, P_1) + P_1 H(Q(f, P_1), P_2)}$$

On a ensuite, puisque P_1 , P_2 et $P_1 P_2$ sont unitaires :

$$P_1 P_2 Q(f, P_1 P_2) = f - H(f, P_1 P_2) = f - H(f, P_1) + P_1 H(Q(f, P_1), P_2) = P_1 \times (Q(f, P_1) + H(Q(f, P_1), P_2)) = P_1 P_2 \times Q(f, P_1)$$

Ce résultat algébrique, est vraie en tout $t \in [a, b]$. Et donc en tout t non racine de P_1 et de P_2 :

$$Q(f, P_1 P_2)(t) = Q(Q(f, P_1), P_2)(t)$$

On peut enfin prolonger la relation par continuité en chacune des racines de P_1 et de P_2 :

$$\boxed{Q(f, P_1 P_2) = Q(Q(f, P_1), P_2)}$$

On fixe $t \in [a, b] \setminus \{t_1, \dots, t_m\}$. Pour tout $s \in [a, b]$, on pose

$$Q_t(s) = f(s) - H(f, P)(s) - Q(f, P)(t) \times \prod_{i=1}^m (s - t_i)^{k_i}$$

8. On conserve les même notations concernant le polynôme P et ses racines.

a) Montrer que la fonction Q_t s'annule à l'ordre $\deg(P) + 1$ dans l'intervalle $[\min(t, t_1), \max(t, t_m)]$.

Pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ et tout $k < k_i$

— $Q(f, P)(t)$ est une constante, et t_i est donc une racine d'ordre de multiplicité k_i du polynôme $Q(f, P)(t) \prod_{i=1}^m (X - t_i)^{k_i}$.

$$\text{Donc } \left[Q(f, P)(t) \prod_{i=1}^m (X - t_i)^{k_i} \right]^{(k)}(t_i) = 0$$

— Puis $f^{(k)}(t_i) = H(f, P)^{(k)}(t_i)$

Ainsi, par linéarité de la dérivation d'ordre k :

$$Q_t^{(k)}(t_i) = f^{(k)}(t_i) - H(f, P)^{(k)}(t_i) - 0 = 0$$

Par ailleurs,

$$Q_t(t) = f(t) - H(f, P)(t) - Q(f, P)(t) \prod_{i=1}^m (t - t_i)^k = 0$$

d'après la définition de $Q(f, P)(t)$.

Ainsi, Q_t s'annule à l'ordre $k_1 + k_2 + \dots + k_m + 1 = \deg P + 1$ dans $[\min(t, t_1), \max(t, t_m)]$.

b) En déduire que si P est unitaire, il existe $\xi \in [\min(t, t_1), \max(t, t_m)]$ tel que

$$f(t) - H(f, P)(t) = \frac{f^{(\deg P)}(\xi)}{(\deg P)!} P(t)$$

D'après la question 5.b), puisque Q_t s'annule à l'ordre $\deg P + 1$ dans $[\min(t, t_1), \max(t, t_m)]$, il existe $\xi \in [\min(t, t_1), \max(t, t_m)]$ tel que $Q_t^{(\deg P)}(\xi) = 0$. Or

$$Q_t^{(\deg P)}(s) = f^{(\deg P)}(s) - H(f, P)^{(\deg P)}(s) - Q(f, P)(t) \times \left(\prod_{i=1}^m (X - t_i)^{k_i} \right)^{(\deg P)}(s)$$

Mais $H(f, P)$ et $\prod_{i=1}^m (X - t_i)^{k_i}$ sont des polynômes de degré $< \deg P$ et $= \deg P$ respectivement.

Donc

$$Q_t^{(\deg P)}(s) = f^{(\deg P)}(s) - Q(f, P)(t) \times (\deg P)!$$

En $s \leftarrow \xi$: $0 = f^{(\deg P)}(\xi) - Q(f, P)(t) \times (\deg P)!$ et donc $Q(f, P)(t) = \frac{f^{(\deg P)}(\xi)}{(\deg P)!}$.

Enfin, comme $Q_t(t) = 0$, d'après la question précédente, on trouve :

$$f(t) - H(f, P)(t) = \frac{f^{(\deg P)}(\xi)}{(\deg P)!} \prod_{i=1}^m (t - t_i)^{k_i} = \frac{f^{(\deg P)}(\xi)}{(\deg P)!} P$$

car P est unitaire.

On notera que ce résultat est vraie pour tout t (mais ξ dépend de t).

Partie III - Produit scalaire et polynômes orthogonaux

On dit qu'une application $\Psi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ est un produit scalaire sur l'espace vectoriel E si :

- Ψ est à valeurs dans $\mathbb{R}$
- Ψ est symétrique, i.e. : $\forall X, Y \in E, \Psi(X, Y) = \Psi(Y, X)$
- Ψ est bilinéaire, i.e. : $\forall X, Y \in E$, les applications $Z \mapsto \Psi(X, Z)$ et $Z \mapsto \Psi(Z, Y)$ sont linéaires.
- Ψ est positive, i.e. : $\forall X \in E, \Psi(X, X) \geq 0$
- Ψ est définie, i.e. : $\forall X \in E, \Psi(X, X) = 0 \Rightarrow X = 0$

On notera que ces quatre adjectifs sont employés dans un sens très précis.

On reprend les notations de la première partie.

Soit $I = [-1, 1]$. On fixe un entier $n \geq 2$ pour toute cette partie.

Soit $f : I \rightarrow]0, +\infty[$ une fonction continue.

9. Montrer que l'on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$, en posant pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$,

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(x)Q(x) dx$$

Pour démontrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est défini, on exploitera 3.a)

- Le calcul intégral renvoie bien un nombre (réel), donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien à valeur dans $\mathbb{R}$.
- Pour tout $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, $P \times Q = Q \times P$, donc $\langle P, Q \rangle = \langle Q, P \rangle$. Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien symétrique.
- Soient $P_1, P_2, Q \in \mathbb{R}[X]$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \langle \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2, Q \rangle &= \int_{-1}^1 (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(x)Q(x)f(x) dx = \int_{-1}^1 (\lambda_1 P_1(x)Q(x)f(x) + \lambda_2 P_2(x)Q(x)f(x)) dx \\ &= \lambda_1 \int_{-1}^1 P_1(x)Q(x)f(x) dx + \lambda_2 \int_{-1}^1 P_2(x)Q(x)f(x) dx = \lambda_1 \langle P_1, Q \rangle + \lambda_2 \langle P_2, Q \rangle \end{aligned}$$

Ainsi $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à gauche. Comme $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est également symétrique, nécessairement $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à droite.

Et donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire.

- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Pour tout $x \in [-1, 1]$, $P^2(x)f(x) \geq 0$.

Nécessairement : $\langle P, P \rangle = \int_{-1}^1 P^2(x)f(x) dx \geq 0$. Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est positive.

- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Supposons que $\langle P, P \rangle = 0 = \int_{-1}^1 P^2(x)f(x) dx$.

Alors on $x \mapsto P^2(x)f(x)$ continue, positive, d'intégrale nulle ; donc d'après 3.a) pour tout $x \in [-1, 1]$, $P^2(x)f(x) = 0$.

Or $f(x) > 0$, donc $P(x) = 0$ et P admet une infinité de racine, donc $P = 0$.

Ainsi $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie.

$\langle \cdot, \cdot \rangle \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}[X].$

On rappelle que l'on a défini $D \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme ayant n racines réelles distinctes $r_1 < \dots < r_n$ dans I , vérifiant la propriété :

$$\forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \int_{-1}^1 Q(x)D(x)f(x) dx = 0$$

Puis, on a démontré qu'il existe des nombres réels strictement positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que,

$$\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X], \quad \int_{-1}^1 P(x)f(x) dx = \sum_{i=1}^n \lambda_i P(r_i)$$

On note, $F_0 = 1$ et pour tout $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $F_j = \prod_{i=1}^j (r_{n-i+1} - X) = \prod_{h=n-j+1}^n (r_h - X)$.

Pour $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose

$$\langle P, Q \rangle_j = \langle P, QF_j \rangle$$

10. Montrer que, pour tout $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_j$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_{n-j-1}[X]$.

On reprend la même méthode mais les arguments sont différents :

- Le calcul intégral renvoie bien un nombre (réel), donc $\langle \cdot, \cdot \rangle_j$ est bien à valeur dans $\mathbb{R}$.
- Pour tout $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, $P \times Q = Q \times P$, donc

$$\langle P, Q \rangle_j = \int_{-1}^1 P(x)Q(x)F_j(x)f(x) dx = \int_{-1}^1 Q(x)P(x)F_j(x)f(x) dx = \langle Q, P \rangle_j$$

Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle_j$ est bien symétrique.

— Soient $P_1, P_2, Q \in \mathbb{R}[X]$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\langle \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2, Q \rangle_j &= \langle \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2, Q F_j \rangle = \lambda_1 \langle P_1, Q F_j \rangle + \lambda_2 \langle P_2, Q F_j \rangle \\ &= \lambda_1 \langle P_1, Q \rangle_j + \lambda_2 \langle P_2, Q \rangle_j\end{aligned}$$

Ainsi $\langle \cdot, \cdot \rangle_j$ est linéaire à gauche. Comme $\langle \cdot, \cdot \rangle_j$ est également symétrique, nécessairement $\langle \cdot, \cdot \rangle_j$ est linéaire à droite.

Et donc $\langle \cdot, \cdot \rangle_j$ est bilinéaire.

Pour les deux points suivants, il faut changer de stratégie.

— Soit $P \in \mathbb{R}_{n-j-1}[X]$. on a d'après la formule 1 :

$$\langle P, P \rangle_j = \int_{-1}^1 P^2(x) F_j(x) f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i P^2(r_i) F_j(r_i)$$

car $\deg P^2 F_j = 2 \deg P + \deg F_j \leq 2(n-j-1) + j = 2n-j-2 \leq 2n-1$.

Or $F_j(r_i) = 0$, pour tout $i \in \llbracket n-j+1, n \rrbracket$, donc $\langle P, P \rangle_j = \sum_{i=1}^{n-j} \lambda_i P^2(r_i) F_j(r_i)$.

et $\lambda_i > 0$, $P^2(r_i) = (P(r_i))^2 \geq 0$ et $F_j(r_i) = \prod_{h=n-j}^n (r_h - r_i) > 0$ car $r_1 < r_2 < \dots < r_n$.

Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle_j$ est positive.

— Soit $P \in \mathbb{R}_{n-j-1}[X]$. Supposons que $\langle P, P \rangle_j = 0$.

Donc, d'après le calcul précédent, la somme de nombres positifs : $\sum_{i=1}^{n-j} \lambda_i P^2(r_i) F_j(r_i) = 0$.

ainsi, pour tout $i \in \llbracket 1, n-j \rrbracket$, $\lambda_i P^2(r_i) F_j(r_i) = 0$.

Or $\lambda_i > 0$, $F_j(r_i) = \prod_{h=n-j}^n (r_h - r_i) > 0$, donc nécessairement $P^2(r_i) = 0$.

Par conséquent, P admet $r_1, r_2, \dots, r_{n-j}$ comme racines distinctes, mais $\deg P \leq n-j-1$. Ainsi $P = 0$. Ainsi $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie.

$\langle \cdot, \cdot \rangle_j \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}_{n-j-1}[X].$

11. On fixe pour les questions suivantes un entier naturel $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

a) Montrer qu'il existe une unique famille $(q_0, q_1, \dots, q_{n-j-1})$ de polynômes unitaires de $\mathbb{R}[X]$ telle que pour tout $i \in \llbracket 0, n-j-1 \rrbracket$, $\deg(q_i) = i$ et pour tous $i, i' \in \llbracket 0, n-j-1 \rrbracket$,

$$\langle q_i, q_{i'} \rangle_j = 0$$

On procédera par récurrence.

On va démontrer le résultat par récurrence sur i .

Notons, pour tout $i \in \llbracket 0, n-j-1 \rrbracket$, $\mathcal{P}_i$, la proposition :

$$\ll \exists !(q_0, q_1, \dots, q_i) \in \mathbb{R}[X]^{i+1} \text{ telle que } \forall h \in \llbracket 0, i \rrbracket, \deg q_h = h, [q_h]_h = 1 \text{ et } \forall h' \neq h : \langle q_h, q_{h'} \rangle = 0 \gg$$

— $\mathcal{P}_0$ est vraie, avec $q_0 = 1$, nécessairement.

— Soit $i \in \llbracket 0, n-j-2 \rrbracket$ tel que $\mathcal{P}_i$ est vraie.

On va raisonner par analyse-synthèse, pour avoir l'unicité et l'existence.

ANALYSE :

Supposons donc que la famille $(q_0, q_1, \dots, q_i, q_{i+1}) \in \mathbb{R}[X]^{i+2}$ vérifie les critères,

alors la sous-famille $(q_0, q_1, \dots, q_i)$ vérifie les conditions de $\mathcal{P}_i$, dont on sait qu'elle est vraie.

Les vecteurs $q_0, q_1, \dots, q_i$ sont donc uniques.

Par ailleurs, q_{i+1} est unitaire de degré $i+1$, donc $q_{i+1} - X^{i+1} \in \mathbb{R}_i[X]$.

Or la famille $(q_0, \dots, q_i)$ est une famille de degré échelonné, donc libre, constituée de $i+1$ vecteurs

de $\mathbb{R}_i[X]$,

c'est donc une base de $\mathbb{R}_i[X]$ et ainsi, il existe $(\beta_h)_{0 \leq h \leq i}$ telle que $q_{i+1} - X^{i+1} = \sum_{h=0}^i \beta_h q_h$.

On a ensuite nécessairement pour tout $h' \in \llbracket 0, i \rrbracket$,

$$\langle q_{i+1} - X^{i+1}, q_{h'} \rangle = \sum_{h=0}^i \beta_h \langle q_h, q_{h'} \rangle = \beta_{h'} \underbrace{\langle q_{h'}, q_{h'} \rangle}_{\neq 0}$$

Donc nécessairement $\beta_h = \frac{\langle q_{i+1} - X^{i+1}, q_h \rangle}{\langle q_h, q_h \rangle} = -\frac{\langle X^{i+1}, q_h \rangle}{\langle q_h, q_h \rangle}$ car $\langle q_{i+1}, q_h \rangle = 0$

Ainsi, nécessairement : $q_{i+1} = X^{i+1} - \sum_{h=0}^i \frac{\langle X^{i+1}, q_h \rangle}{\langle q_h, q_h \rangle} q_h$.

SYNTHESE :

Considérons la famille $(q_0, q_1, \dots, q_i)$ définie avec $\mathcal{P}_i$, puis $q_{i+1} = X^{i+1} + \sum_{h=0}^i \frac{\langle q_{i+1} - X^{i+1}, q_h \rangle}{\langle q_h, q_h \rangle} q_h$.

Alors pour tout $h \leq i+1$, q_h est unitaire et de degré h .

Nécessairement si $h, h' < i+1$, $\langle q_h, q_{h'} \rangle = 0$ d'après $\mathcal{P}_i$. Enfin, pour tout $h < i+1$, par linéarité :

$$\langle q_h, q_{i+1} \rangle = \langle q_h, X^{i+1} \rangle - \sum_{\ell=0}^i \frac{\langle X^{i+1}, q_\ell \rangle}{\langle q_\ell, q_\ell \rangle} \langle q_h, q_\ell \rangle = \langle q_h, X^{i+1} \rangle - \frac{\langle X^{i+1}, q_h \rangle}{\langle q_h, q_h \rangle} \langle q_h, q_h \rangle = 0$$

car $\langle q_h, q_\ell \rangle = 0$ dès que $\ell \neq h$. Donc $\mathcal{P}_{i+1}$ est vraie.

Le résultat est en particulier vraie pour $i = n - j - 1$,

il existe une unique famille $(q_0, q_1, \dots, q_{n-j-1})$ de polynômes unitaires de $\mathbb{R}[X]$ telle que pour tout $i \in \llbracket 0, n - j - 1 \rrbracket$, $\deg(q_i) = i$ et pour tous $i, i' \in \llbracket 0, n - j - 1 \rrbracket$, $\langle q_i, q_{i'} \rangle_j = 0$.

Remarque - Existence de D

C'est avec une méthode comparable qu'on crée une famille de polynôme D_i unitaires, de degré i , orthogonaux les uns aux autres : $\langle D_i, D_j \rangle = 0$ si $i \neq j$.

On montre ensuite que D_i est orthogonal à tout polynôme de degré $< i$ (comme en question (c)) Et enfin que toutes les racines de D_i sont dans $[a, b]$ (comme en question (g)).

Le polynôme D est en fait colinéaire à D_n (ie. associé ici). Il est unique d'une certaine façon

b) Montrer que pour tout $i \leq n - j - 1$, $(q_0, \dots, q_i)$ est une base de $\mathbb{R}_i[X]$.

La famille $(q_0, q_1, \dots, q_i)$ est une famille de polynômes de degrés échelonnés, elle est donc libre.

Elle est constituée de $i + 1$ polynômes de $\mathbb{R}_i[X]$, de dimension $i + 1$.

Ainsi la famille $(q_0, q_1, \dots, q_i)$ est une base de $\mathbb{R}_i[X]$.

c) On considère, en outre, $q_{n-j} = \prod_{i=1}^{n-j} (X - r_i)$.

Montrer que q_{n-j} est l'unique polynôme unitaire de degré $n - j$ vérifiant, pour tout $i \in \llbracket 0, n - j - 1 \rrbracket$:

$$\langle q_i, q_{n-j} \rangle_j = 0$$

Pour l'unicité, on pourra supposer que T_1 et T_2 sont solutions du problème, écrire $T_1 - T_2$ sur la base $(q_0, \dots, q_{n-j-1})$ et calculer pour tout $h \leq n - j - 1$, $\langle T_1 - T_2, q_h \rangle_j$.

q_{n-j} est un produit de $n - j$ monôme de degré 1 unitaire, donc

$$\deg q_{n-j} = n - j \text{ et } q_{n-j} \text{ est unitaire.}$$

$$q_{n-j} \times F_j = \prod_{i=1}^{n-j} (X - r_i) \times \prod_{h=n-j+1}^n (r_h - X) = (-1)^{n-(n-j+1)+1} \prod_{h=1}^n (X - r_h) = (-1)^j \lambda D$$

où λ est le coefficient dominant de D (on connaît les n racines de $D \in \mathbb{R}_n[X]$, mais il n'est pas unitaire a priori).

Soit $i \in \llbracket 0, n - j - 1 \rrbracket$, comme $q_i \in \mathbb{R}_i[X] \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$:

$$\langle q_i, q_{n-j} \rangle_j = \lambda \langle q_i, D \rangle = 0$$

Reste à montrer l'unicité. Supposons que T vérifie les mêmes conditions.

Alors T est unitaire de degré $n - j$, donc $[q_{n-j} - T]_{n-j} = [q_{n-j}]_{n-j} - [T]_{n-j} = 1 - 1 = 0$.

Et comme $\deg(q_{n-j} - T) \leq n - j$, on peut affirmer que $q_{n-j} - T \in \mathbb{R}_{n-j-1}[X]$.

Donc il existe $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-j-1} \in \mathbb{R}$ tel que $q_{n-j} - T = \sum_{h=0}^{n-j-1} \alpha_h q_h$.

On a alors pour $h' \leq n - j - 1$, par linéarité :

$$\langle q_{n-j} - T, q_{h'} \rangle_j = \langle q_{n-j}, q_{h'} \rangle_j - \langle T, q_{h'} \rangle_j = 0 - 0 = 0$$

mais également

$$\langle q_{n-j} - T, q_{h'} \rangle_j = \sum_{h=0}^{n-j-1} \alpha_h \langle q_h, q_{h'} \rangle_j = \alpha_{h'} \langle q_{h'}, q_{h'} \rangle_j$$

car $\langle q_h, q_{h'} \rangle_j = 0$ si $h \neq h'$.

Or $\langle q_{h'}, q_{h'} \rangle_j \neq 0$, sinon $q_{h'} = 0$, donc nécessairement $\alpha_{h'} = 0$.

Ainsi $q_{n-j} - T = 0$ et donc

$$q_{n-j} \text{ est unique.}$$

d) Montrer que pour $i \in \llbracket 1, n - j \rrbracket$, pour tout $R \in \mathbb{R}_{i-1}[X]$, $\langle q_i, R \rangle_j = 0$.

La famille $(q_0, q_1, \dots, q_{i-1})$ est une famille de polynômes de degrés échelonnés, elle est donc libre.

Elle est constituée de i polynômes de $\mathbb{R}_{i-1}[X]$, de dimension i .

Ainsi la famille $(q_0, q_1, \dots, q_{i-1})$ est une base de $\mathbb{R}_{i-1}[X]$.

Soit $R \in \mathbb{R}_{i-1}[X]$. Alors il existe $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{i-1} \in \mathbb{R}$ tels que $R = \sum_{h=0}^{i-1} \alpha_h q_h$.

Puis, par la linéarité (à droite) du produit scalaire :

$$\langle q_i, R \rangle_j = \langle q_i, \sum_{h=0}^{i-1} \alpha_h q_h \rangle_j = \sum_{h=0}^{i-1} \alpha_h \langle q_i, q_h \rangle_j = \sum_{h=0}^{i-1} \alpha_h \times 0 = 0$$

$$\text{Pour tout } i \in \llbracket 1, n - j \rrbracket, \text{ pour tout } R \in \mathbb{R}_{i-1}[X], \langle q_i, R \rangle_j = 0.$$

e) Soit $i \in \llbracket 2, n - j \rrbracket$. Montrer qu'il existe des nombres réels a_i et b_i tels que :

$$q_i - X q_{i-1} = a_i q_{i-1} + b_i q_{i-2}$$

Les polynômes q_i et q_{i-1} sont unitaire et de degré $\leq i$. Donc $\deg(q_i - Xq_{i-1}) \leq i$.

Par ailleurs : $[Xq_{i-1}]_i = [q_{i-1}]_{i-1} = 1$ et donc $[q_i - Xq_{i-1}]_i = 0$. Donc $\deg(q_i - Xq_{i-1}) \leq i - 1$.
On a vu que $(q_0, \dots, q_{i-1})$ est une base de $\mathbb{R}_{i-1}[X]$. Donc il existe $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{i-1} \in \mathbb{R}$ tels que

$$q_i - Xq_{i-1} = \sum_{h=0}^{i-1} \alpha_h q_h$$

On a alors, pour tout $h' \in \llbracket 0, i-3 \rrbracket$:

$$\langle q_i - Xq_{i-1}, q_{h'} \rangle_j = \langle q_i, q_{h'} \rangle_j - \langle Xq_{i-1}, q_{h'} \rangle_j = 0 - \langle Xq_{i-1}, q_{h'} \rangle_j$$

car si $h' < i$ (même pour $i = n - j$) : $\langle q_i, q_{h'} \rangle_j = 0$

et puisque $\langle Xq_{i-1}, q_{h'} \rangle_j = \langle q_{i-1}, \underbrace{Xq_{h'}}_{\in \mathbb{R}_{i-2}[X]} \rangle_j = 0$.

Et en même temps, toujours par linéarité

$$\left\langle \sum_{h=0}^{i-1} \alpha_h q_h, q_{h'} \right\rangle_j = \sum_{h=0}^{i-1} \alpha_h \langle q_h, q_{h'} \rangle_j = \alpha_{h'} \langle q_{h'}, q_{h'} \rangle_j$$

car $\langle q_h, q_{h'} \rangle_j = 0$ si $h, h' \in \llbracket 0, n - j - 1 \rrbracket$ et $h \neq h'$. Ainsi, $\alpha_{h'} \langle q_{h'}, q_{h'} \rangle_j = 0$.

Or, par contraposée, comme $q_{h'} \neq 0$, on a $\langle q_{h'}, q_{h'} \rangle_j \neq 0$ et donc $\alpha_{h'} = 0$.

Et donc

Pour $i \in \llbracket 2, n - j \rrbracket$, il existe $a_i (= \alpha_{i-1})$ et $b_i (= \alpha_{i-2})$ tels que $q_i - Xq_{i-1} = a_i q_{i-1} + b_i q_{i-2}$.

f) Soit $i \in \llbracket 2, n - j \rrbracket$. Montrer que

$$b_i \langle q_{i-2}, q_{i-2} \rangle_j = -\langle Xq_{i-1}, q_{i-2} \rangle_j$$

En déduire que $b_i < 0$

On reprend le calcul précédent, avec $h' = i - 2$:

$$\langle q_i - Xq_{i-1}, q_{i-2} \rangle_j = \underbrace{\langle q_i, q_{i-2} \rangle_j}_{=0} - \langle Xq_{i-1}, q_{i-2} \rangle_j = a_i \underbrace{\langle q_{i-1}, q_{i-2} \rangle_j}_{=0} + b_i \langle q_{i-2}, q_{i-2} \rangle_j$$

$$b_i \langle q_{i-2}, q_{i-2} \rangle_j = -\langle Xq_{i-1}, q_{i-2} \rangle_j$$

Par ailleurs, puisque le produit scalaire est positif : $\langle q_{i-2}, q_{i-2} \rangle_j > 0$ ($q_{i-2} \neq 0$).

et $\langle Xq_{i-1}, q_{i-2} \rangle_j = \langle q_{i-1}, Xq_{i-2} \rangle_j$.

Or q_{i-2} a pour terme dominant X^{i-2} , donc Xq_{i-2} a pour terme dominant X^{i-1} , comme q_{i-1} , donc $Xq_{i-2} - q_{i-1} \in \mathbb{R}_{i-2}[X]$ et donc $0 = \langle Xq_{i-2} - q_{i-1}, q_{i-1} \rangle_j = \langle Xq_{i-2}, q_{i-1} \rangle_j - \langle q_{i-1}, q_{i-1} \rangle_j$.
Ainsi, $\langle Xq_{i-2}, q_{i-1} \rangle_j = \langle q_{i-1}, q_{i-1} \rangle_j > 0$ ($q_{i-1} \neq 0$).

$$\text{Alors } b_i = -\frac{\langle q_{i-2}, q_{i-2} \rangle_j}{\langle q_{i-1}, q_{i-1} \rangle_j} < 0.$$

g) Pour $i \in \{0, 1\}$, montrer que le polynôme q_i a exactement i racine dans $\mathbb{R}$.

$q_0 = 1$ a 0 racine dans $\mathbb{R}$.

$q_1 = X + \alpha \in \mathbb{R}[X]$, puisque $\deg q_1 = 1$ et q_1 unitaire. Donc q_1 a une racine $(-\alpha)$ dans $\mathbb{R}$.

Pour $i \in \{0, 1\}$, montrer que le polynôme q_i a exactement i racine dans $\mathbb{R}$.

h) Soit $i \in \llbracket 1, n-j \rrbracket$. Montrer que le polynôme q_i a exactement i racines réelles distinctes, que ces racines sont simples.

On note $\mathcal{Z}_I = \{z \in [-1, 1] \mid q_i(z) = 0 \text{ et } \mu(z, q_i) \equiv 1[2]\}$, l'ensemble des racines de q_i dans I d'ordre de multiplicité impair.

On démontre que le cardinal de $\mathcal{Z}_I$ est égal à n en raisonnant par l'absurde en exploitant $S = \prod_{z \in \mathcal{Z}_I} (X - z)$.

On rappelle que $q_i \in \mathbb{R}_i[X]$, donc admet au plus i racines distinctes.

Notons $\{x_1, x_2, \dots, x_r\} = \mathcal{Z}_I$, l'ensemble des racines de q_i de $[-1, 1]$ d'ordre de multiplicité impair.

Remarquons que cet ensemble peut-être vide et nécessairement $r \leq i$.

Notons $S = \prod_{\ell=1}^r (X - x_\ell) \in \mathbb{R}_r[X]$.

$q_i \times S$ n'admet que des racines d'ordre de multiplicité pair sur $[-1, 1]$,
par produit $q_i \times S$ est un unitaire, donc $q_i S$ est le carré d'un polynôme.

Ainsi, pour tout $x \in [-1, 1]$, $q_i(x)S(x)f(x) \geq 0$.

Si $r < i$, alors $\int_{-1}^1 q_i(x)S(x)f(x) dx = 0$ et donc d'après **3.a)**, $\forall x \in [-1, 1]$, $q_i(x)S(x) = 0$.

Donc $q_i S$ admet une infinité de racines. Impossible. Donc $r = i$.

q_i admet exactement i racines distinctes dans $[-1, 1]$. Elles sont simples.

12. On fixe, toujours, pour les questions suivantes un entier naturel $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

On note, pour tout $i \in \llbracket 0, n-j-1 \rrbracket$, $n_i = \sqrt{\langle q_i, q_i \rangle_j} \in \mathbb{R}$ puis $r_i = \frac{q_i}{n_i} \in \mathbb{R}_i[X]$.

Les polynômes r_i forme la base orthonormale, pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_j$ de la base orthogonale (q_i) .

a) Montrer que pour tout $i \in \llbracket 2, n-j \rrbracket$,

$$\frac{n_i}{n_{i-1}} r_i = (X + a_i) r_{i-1} - \frac{n_{i-1}}{n_{i-2}} r_{i-2}$$

On commencera par démontrer que $b_i = -\left(\frac{n_{i-1}}{n_{i-2}}\right)^2$.

Soit $i \in \llbracket 2, n-j \rrbracket$. D'après la question **11.e)**,

$$n_i r_i = q_i = (X + a_i) q_{i-1} + b_i q_{i-2} = (X + a_i) n_{i-1} r_{i-1} + b_i n_{i-2} r_{i-2}$$

Et d'après **11.f)**,

$$b_i \langle q_{i-2}, q_{i-2} \rangle_j = b_i (n_{i-2})^2 = -\langle X q_{i-1}, q_{i-2} \rangle_j = -\int_{-1}^1 x q_{i-1}(x) q_{i-2}(x) f_j(x) dx = -\langle q_{i-1}, X q_{i-2} \rangle_j$$

Or $q X_{i-2} - q_{i-1} \in \mathbb{R}_{i-2}[X]$, donc

$$0 = \langle q X_{i-2} - q_{i-1}, q_{i-1} \rangle_j = \langle X q_{i-2}, q_{i-1} \rangle_j - \langle q_{i-1}, q_{i-1} \rangle_j = \langle q_{i-1}, X q_{i-2} \rangle_j - (n_{i-1})^2$$

Donc

$$b_i (n_{i-2})^2 = -\langle q_{i-1}, X q_{i-2} \rangle_j = -(n_{i-1})^2$$

Et ainsi :

$$\frac{n_i}{n_{i-1}} r_i = (X + a_i) r_{i-1} - \frac{n_{i-1}}{n_{i-2}} r_{i-2}$$

b) Montrer que pour tout $m \in \llbracket 1, n - j - 1 \rrbracket$, pour tout $x, y \in [-1, 1]$,

$$(x - y) \sum_{i=0}^m r_i(x) r_i(y) = \frac{n_{m+1}}{n_m} (r_m(y) r_{m+1}(x) - r_m(x) r_{m+1}(y))$$

Soient $x, y \in I$.

On applique la relation trouvée précédemment en x et en y pour $i \in \llbracket 1, n - j - 1 \rrbracket$ (décalage d'indice) :

$$\begin{cases} \frac{n_{i+1}}{n_i} r_{i+1}(x) = (x + a_{i+1}) r_i(x) - \frac{n_i}{n_{i-1}} r_{i-1}(x) & L_1 \\ \frac{n_{i+1}}{n_i} r_{i+1}(y) = (y + a_{i+1}) r_i(y) - \frac{n_i}{n_{i-1}} r_{i-1}(y) & L_2 \end{cases}$$

On fait ensuite $r_i(y)L_1 - r_i(x)L_2$

$$\frac{n_{i+1}}{n_i} (r_i(y) r_{i+1}(x) - r_i(x) r_{i+1}(y)) = (x - y) r_i(x) r_i(y) + a_{i+1} (r_i(x) r_i(y) - r_i(x) r_i(y)) + \frac{n_i}{n_{i-1}} (r_{i-1}(y) r_i(x) - r_{i-1}(x) r_i(y))$$

Ainsi, en sommant pour i de 1 à $m < n - j$

$$(x - y) \sum_{i=1}^m r_i(x) r_i(y) = \sum_{i=1}^m \left[\frac{n_{i+1}}{n_i} (r_i(y) r_{i+1}(x) - r_i(x) r_{i+1}(y)) - \frac{n_i}{n_{i-1}} (r_{i-1}(y) r_i(x) - r_{i-1}(x) r_i(y)) \right]$$

On reconnait un télescope :

$$(x - y) \sum_{i=1}^m r_i(x) r_i(y) = \frac{n_{m+1}}{n_m} (r_m(y) r_{m+1}(x) - r_m(x) r_{m+1}(y)) - \frac{n_1}{n_0} (r_0(y) r_1(x) - r_0(x) r_1(y))$$

Or $q_0 = 1$, donc $r_0 = \frac{1}{n_0}$ et $q_1 = X + \alpha$, donc $r_1(x) = \frac{x + \alpha}{n_1}$.

$$\text{ainsi : } \frac{n_1}{n_0} (r_0(y) r_1(x) - r_0(x) r_1(y)) = \frac{1}{n_0^2} (1 \times (x + \alpha) - 1(y + \alpha)) = \frac{x - y}{n_0^2} = (x - y) r_0(x) r_0(y).$$

Donc, on peut le basculer « à gauche » :

(et par ailleurs, on constate également que le résultat est vraie pour $m = 0$.)

$$\forall m \in \llbracket 0, n - j - 1 \rrbracket, \quad (x - y) \sum_{i=0}^m r_i(x) r_i(y) = \frac{n_{m+1}}{n_m} (r_m(y) r_{m+1}(x) - r_m(x) r_{m+1}(y))$$

c) Montrer alors, pour tout $m \in \llbracket 0, n - j - 1 \rrbracket$, pour tout $x \in I$:

$$q'_{m+1}(x) q_m(x) - q'_m(x) q_{m+1}(x) = n_m^2 \sum_{i=0}^m r_i^2(x)$$

Soit $m \in \llbracket 0, n - j - 1 \rrbracket$. Soit $x_0 \in I$. Considérons la relation précédent, pour $y \leftarrow x_0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n_m^2} (q_m(x_0) q_{m+1}(x) - q_m(x) q_{m+1}(x_0)) &= \frac{1}{n_m^2} (n_m r_m(x_0) n_{m+1} r_{m+1}(x) - n_m r_m(x) n_{m+1} r_{m+1}(x_0)) \\ &= (x - x_0) \sum_{i=0}^m r_i(x) r_i(x_0) \end{aligned}$$

Donc pour $x \neq x_0$:

$$\frac{1}{x - x_0} (q_m(x_0) q_{m+1}(x) - q_m(x) q_{m+1}(x_0)) = n_m^2 \sum_{i=0}^m r_i(x) r_i(x_0)$$

En retranchant et ajoutant $q_m(x_0)q_{m+1}(x_0)$, au numérateur à gauche :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-x_0} (q_m(x_0)q_{m+1}(x) - q_m(x)q_{m+1}(x_0)) &= \frac{q_m(x_0)q_{m+1}(x) - q_m(x_0)q_{m+1}(x_0)}{x-x_0} + \frac{q_m(x_0)q_{m+1}(x_0) - q_m(x)q_{m+1}(x_0)}{x-x_0} \\ &= q_m(x_0) \frac{q_{m+1}(x) - q_{m+1}(x_0)}{x-x_0} - q_{m+1}(x_0) \frac{q_m(x) - q_m(x_0)}{x-x_0} \end{aligned}$$

Comme, les fonctions sont dérivables, on peut passer à la limite pour $x \leftarrow x_0$ et on trouve :

$$q_m(x_0)q'_{m+1}(x_0) - q_{m+1}(x_0)q'_m(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} n_m^2 \sum_{i=0}^m r_i(x)r_i(x_0) = n_m^2 \sum_{i=0}^m r_i^2(x_0)$$

d) Soit $i \in \llbracket 1, n-j \rrbracket$ et $x_1 < x_2$ sont deux racines consécutives de q_i . Montrer qu'il existe une unique racine de q_{i-1} dans l'intervalle $]x_1, x_2[$.

On va d'abord montrer l'existence. Puis en exploitant le nombre de racines, on en déduira l'unicité. On a pour tout $x \in I$, d'après la question précédente :

$$q'_i(x)q_{i-1}(x) - q'_{i-1}(x)q_i(x) = n_m^2 \sum_{i=0}^m r_i^2(x) \geq 0$$

Donc $q'_i(x)q_{i-1}(x) \geq q'_{i-1}(x)q_i(x)$. Ainsi, en $x \leftarrow x_1$ et $x \leftarrow x_2$: $q'_i(x_1)q_{i-1}(x_1) \geq 0$ et $q'_i(x_2)q_{i-1}(x_2) \geq 0$.

Or comme x_1 et x_2 sont deux racines consécutives et simples du polynôme q_i , d'ordre 1,

alors nécessairement $q'_i(x_1)$ et $q'_i(x_2)$ sont de signe contraire (sinon contradiction avec le TVI).

(Si $q'_i(x_1) > 0$, alors q_i croissante en x_1 , donc positive sur $[x_1, x_2]$ donc $q'_i(x_2) < 0 \dots$).

Donc $q_{i-1}(x_1)$ et $q_{i-1}(x_2)$ sont de signe contraire, et d'après le théorème des valeurs intermédiaires,

$$q_{i-1} \text{ s'annule au moins une fois entre } x_1 \text{ et } x_2.$$

On a donc au moins une racine de q_{i-1} entre chaque couple de racines de q_i .

Or q_i admet exactement i racines distinctes dans I (d'après 11.h),

On a donc localisé au moins $i-1$ racines de q_{i-1} , donc toutes les racines de q_{i-1} .

$$\text{Il n'y a au plus qu'une racine de } q_{i-1} \text{ entre } x_1 \text{ et } x_2.$$

Ce sujet, haché en de trop petits morceaux, est extrait du sujet Maths B concours de X-ENS en MP2025. Pour mesurer la finalité de ces questions, le mieux est de s'attaquer au vrai sujet...