

## DEVOIR SURVEILLÉ N°7

Sujet donné le mercredi 18 mars 2026, 3h.

**L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.**

La notation tiendra particulièrement compte de la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées. Les réponses aux questions seront numérotées et séparées par un trait horizontal. Les résultats essentiels devront être encadrés ou soulignés.

BON TRAVAIL

### INTERPOLATION DE HERMITE ET POLYNÔMES ORTHOGONAUX

Dans la Partie **I**, on reprend les polynômes d'interpolation de LAGRANGE. On exploite cette base pour donner une formule de quadrature d'une intégrale.

Dans la Partie **II**, on étend l'interpolation à celle associée à HERMITE. Elle permet d'interpoler  $P$  et ses dérivées en des points particuliers. On n'a pas besoin d'explicitier la base des polynômes obtenues, seules les méthodes d'algèbre sont exploitées.

Dans la Partie **III**, on revient sur le calcul intégral de la première partie afin d'exploiter des méthodes d'algèbre bilinéaire.

## Partie I - Interpolation de Lagrange et applications aux formules de quadrature

Soit  $I = [-1, 1]$ . On fixe un entier  $n \geq 2$  pour toute cette partie.

Soit  $f : I \rightarrow ]0, +\infty[$  une fonction continue, strictement positive.

Soit  $D \in \mathbb{R}_n[X]$  un polynôme ayant  $n$  racines réelles distinctes  $r_1 < \dots < r_n$  dans  $I$ .

On suppose, de plus, que  $D$  vérifie la propriété. :

$$\forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \int_{-1}^1 Q(x)D(x)f(x) dx = 0$$

#### 1. Base de Lagrange

a) Quelle est la dimension de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ ? On n'attend pas de démonstration

b) Montrer qu'il existe une base  $(L_1, \dots, L_n)$  de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$  telle que pour tout entier  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $L_i(r_j) = \delta_{i,j}$ .

#### 2. Une première application. Elargie à $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$

a) Montrer, en exploitant la base  $(L_1, \dots, L_n)$ , qu'il existe des nombres réels  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  tels que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \int_{-1}^1 P(x)f(x) dx = \sum_{i=1}^n \lambda_i P(r_i)$$

b) Montrer que si  $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ , on a

$$\int_{-1}^1 P(x)f(x) dx = \sum_{i=1}^n \lambda_i P(r_i) \tag{1}$$

On pourra considérer la division euclidienne de  $P$  par  $D$ .

c) Soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . En évaluant l'égalité (1) sur le polynôme  $T_i := \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (X - r_j)^2$ , montrer que  $\lambda_i \geq 0$ .

#### 3. Soit $g$ une fonction continue et positive définie sur $I = [-1, 1]$ . On suppose que $\int_{-1}^1 g(t) dt = 0$ .

a) Etudier les variations de  $G : x \mapsto \int_{-1}^x g(t) dt$ . Montrer que  $G$  puis  $g$  sont nulles.

b) Application : montrer que pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\lambda_i > 0$ .

## Partie II - Interpolation de Hermite

Soit  $a$  et  $b$  deux nombres réels tels que  $a < b$ . Soit  $h$  une fonction  $\mathcal{C}^\infty$  de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ . On fixe un entier  $N \geq 1$ .

On dit que  $h$  s'annule à l'ordre  $N$  dans  $[a, b]$  s'il existe un entier  $m \leq N$ , des nombres  $c_1, c_2, \dots, c_m$  tels que  $a \leq c_1 < c_2 < \dots < c_m \leq b$  et des entiers strictement positifs  $k_1, \dots, k_m$  tels que  $\sum_{i=1}^m k_i = N$  et, pour tout entier  $1 \leq i \leq m$  et

tout entier  $0 \leq k < k_i$ , on a  $h^{(k)}(c_i) = 0$ .

On dit que  $h$  s'annule exactement à l'ordre  $N$  dans  $[a, b]$  si  $h$  s'annule à l'ordre  $N$  dans  $[a, b]$ , mais ne s'annule pas à l'ordre  $N + 1$  dans  $[a, b]$ .

On notera que  $h$  n'est pas nécessairement une fonction polynomiale.

### 4. Quelques exemples

a) Que dire d'une fonction polynomiale  $h$  qui s'annule à l'ordre  $N (\geq 1)$  dans  $[a, b]$  et qui n'admet qu'une racine  $c$  dans  $[a, b]$  ?

b) Donner l'exemple d'une fonction polynomiale  $h$  qui s'annule à l'ordre 5 dans  $[0, 1]$  et qui admet exactement trois racines dans  $[0, 1]$ .

c) On considère  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin^2 x \cos^3 x$ . Pour quel entier  $N$ , peut-on dire que  $f$  s'annule exactement à l'ordre  $N$  dans  $[-\pi, \pi]$  ?

*On explicitera une stratégie en deux temps pour résoudre cette question.*

### 5. Hérédité

a) Montrer que si  $h$  s'annule à l'ordre  $N + 1$  dans  $[a, b]$ , alors  $h'$  s'annule à l'ordre  $N$  dans  $[a, b]$ .

b) Montrer que si  $h$  s'annule à l'ordre  $N + 1$  dans  $[a, b]$ , il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $h^{(N)}(c) = 0$ .

*On pourra démontrer par récurrence que  $h^{(k)}$  s'annule à l'ordre  $N - k + 1$ .*

On fixe, pour le reste de cette partie,  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ .

### 6. Interpolation d'HERMITE

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  un polynôme non nul, scindé dans  $\mathbb{R}$  et dont toutes les racines sont dans  $]a, b[$ .

On note  $(a <) t_1 < \dots < t_m (< b)$  les racines de  $P$  et, pour tout entier  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ , on note  $k_i$  le plus petit entier tel que  $P^{(k_i)}(t_i) \neq 0$ .

a) Montrer que si  $Q \in \mathbb{R}[X]$  est un polynôme tel que  $\deg Q < \deg P$  et, pour tout entier  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$  et tout entier  $k \in \llbracket 0, k_i - 1 \rrbracket$ ,  $Q^{(k)}(t_i) = 0$ , alors  $P|Q$  puis  $Q = 0$ .

b) On note  $d = \sum_{i=1}^m k_i$ , le degré de  $P$ . Montrer que

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}_{d-1}[X] &\longrightarrow \mathbb{R}^d \\ H &\longmapsto (H(t_1), \dots, H^{(k_1-1)}(t_1), H(t_2), \dots, H^{(k_2-1)}(t_2), \dots, H(t_m), \dots, H^{(k_m-1)}(t_m)) \end{aligned}$$

est une application linéaire injective.

c) Grâce au théorème du rang, on peut affirmer que  $\Phi$  est un isomorphisme (i.e. bijectif).

En déduire qu'il existe un unique polynôme  $H(f, P) \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $\deg(H(f, P)) < \deg P$  et tel que, pour tout entier  $1 \leq i \leq m$ , et tout entier  $0 \leq k < k_i$ ,

$$(H(f, P))^{(k)}(t_i) = f^{(k)}(t_i)$$

Pour  $t \in [a, b] \setminus \{t_1, \dots, t_m\}$ , on pose

$$Q(f, P)(t) = \frac{f(t) - H(f, P)(t)}{(t - t_1)^{k_1} \dots (t - t_m)^{k_m}}$$

On peut démontrer que  $Q$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $[a, b]$ .

**7.a)** Soit  $s_0 \in [a, b]$  et soit un entier  $n \geq 1$ . Montrer que

$$Q(f, (X - s_0)^n)(s_0) = \frac{f^{(n)}(s_0)}{n!}$$

*On exploitera la formule de Taylor-Young.*

b) Montrer que si  $P$  est unitaire :  $P \times Q(f, P) = f - H(f, P)$

c) Soient  $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[X]$  deux polynômes unitaires et scindés dans  $]a, b[$ . Montrer que

$$H(f, P_1 P_2) = H(f, P_1) + P_1 H(Q(f, P_1), P_2) \text{ puis que } Q(f, P_1 P_2) = Q(Q(f, P_1), P_2).$$

On fixe  $t \in [a, b] \setminus \{t_1, \dots, t_m\}$ . Pour tout  $s \in [a, b]$ , on pose

$$Q_t(s) = f(s) - H(f, P)(s) - Q(f, P)(t) \times \prod_{i=1}^m (s - t_i)^{k_i}$$

8. On conserve les même notations concernant le polynôme  $P$  et ses racines.

a) Montrer que la fonction  $Q_t$  s'annule à l'ordre  $\deg(P) + 1$  dans l'intervalle  $[\min(t, t_1), \max(t, t_m)]$ .

b) En déduire que si  $P$  est unitaire, il existe  $\xi \in [\min(t, t_1), \max(t, t_m)]$  tel que

$$f(t) - H(f, P)(t) = \frac{f^{(\deg(P))}(\xi)}{(\deg P)!} P(t)$$

## Partie III - Produit scalaire et polynômes orthogonaux

On dit qu'une application  $\Psi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  est un produit scalaire sur l'espace vectoriel  $E$  si :

- $\Psi$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}$
- $\Psi$  est symétrique, i.e. :  $\forall X, Y \in E, \Psi(X, Y) = \Psi(Y, X)$
- $\Psi$  est bilinéaire, i.e. :  $\forall X, Y \in E$ , les applications  $Z \mapsto \Psi(X, Z)$  et  $Z \mapsto \Psi(Z, Y)$  sont linéaires.
- $\Psi$  est positive, i.e. :  $\forall X \in E, \Psi(X, X) \geq 0$
- $\Psi$  est définie, i.e. :  $\forall X \in E, \Psi(X, X) = 0 \Rightarrow X = 0$

On notera que ces quatre adjectifs sont employés dans un sens très précis.

On reprend les notations de la première partie.

Soit  $I = [-1, 1]$ . On fixe un entier  $n \geq 2$  pour toute cette partie.

Soit  $f : I \rightarrow ]0, +\infty[$  une fonction continue.

9. Montrer que l'on définit un produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$  noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , en posant pour tous  $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ ,

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(x)Q(x) dx$$

Pour démontrer que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est défini, on exploitera 3.a)

On rappelle que l'on a défini  $D \in \mathbb{R}_n[X]$  un polynôme ayant  $n$  racines réelles distinctes  $r_1 < \dots < r_n$  dans  $I$ , vérifiant la propriété. :

$$\forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \int_{-1}^1 Q(x)D(x)f(x) dx = 0$$

Puis, on a démontré qu'il existe des nombres réels strictement positifs  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  tels que,

$$\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X], \quad \int_{-1}^1 P(x)f(x) dx = \sum_{i=1}^n \lambda_i P(r_i)$$

On note,  $F_0 = 1$  et pour tout  $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ ,  $F_j = \prod_{i=1}^j (r_{n-i+1} - X) = \prod_{h=n-j+1}^n (r_h - X)$ .

Pour  $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ , on pose

$$\langle P, Q \rangle_j = \langle P, QF_j \rangle$$

10. Montrer que, pour tout  $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle_j$  définit un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_{n-j-1}[X]$ .

11. On fixe pour les questions suivantes un entier naturel  $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ .

a) Montrer qu'il existe une unique famille  $(q_0, q_1, \dots, q_{n-j-1})$  de polynômes unitaires de  $\mathbb{R}[X]$  telle que pour tout  $i \in \llbracket 0, n-j-1 \rrbracket$ ,  $\deg(q_i) = i$  et pour tous  $i, i' \in \llbracket 0, n-j-1 \rrbracket$ ,

$$\langle q_i, q_{i'} \rangle_j = 0$$

On procédera par récurrence.

b) Montrer que pour tout  $i \leq n-j-1$ ,  $(q_0, \dots, q_i)$  est une base de  $\mathbb{R}_i[X]$ .

c) On considère, en outre,  $q_{n-j} = \prod_{i=1}^{n-j} (X - r_i)$ .

Montrer que  $q_{n-j}$  est l'unique polynôme unitaire de degré  $n - j$  vérifiant, pour tout  $i \in \llbracket 0, n - j - 1 \rrbracket$  :

$$\langle q_i, q_{n-j} \rangle_j = 0$$

Pour l'unicité, on pourra supposer que  $T_1$  et  $T_2$  sont solutions du problème, écrire  $T_1 - T_2$  sur la base  $(q_0, \dots, q_{n-j-1})$  et calculer pour tout  $h \leq n - j - 1$ ,  $\langle T_1 - T_2, q_h \rangle_j$ .

d) Montrer que pour  $i \in \llbracket 1, n - j \rrbracket$ , pour tout  $R \in \mathbb{R}_{i-1}[X]$ ,  $\langle q_i, R \rangle_j = 0$ .

e) Soit  $i \in \llbracket 2, n - j \rrbracket$ . Montrer qu'il existe des nombres réels  $a_i$  et  $b_i$  tels que :

$$q_i - Xq_{i-1} = a_i q_{i-1} + b_i q_{i-2}$$

f) Soit  $i \in \llbracket 2, n - j \rrbracket$ . Montrer que

$$b_i \langle q_{i-2}, q_{i-2} \rangle_j = -\langle Xq_{i-1}, q_{i-2} \rangle_j$$

En déduire que  $b_i < 0$

g) Pour  $i \in \{0, 1\}$ , montrer que le polynôme  $q_i$  a exactement  $i$  racine dans  $\mathbb{R}$ .

h) Soit  $i \in \llbracket 1, n - j \rrbracket$ . Montrer que le polynôme  $q_i$  a exactement  $i$  racines réelles distinctes, que ces racines sont simples .

On note  $\mathcal{Z}_I = \{z \in [-1, 1] \mid q_i(z) = 0 \text{ et } \mu(z, q_i) \equiv 1[2]\}$ , l'ensemble des racines de  $q_i$  dans  $I$  d'ordre de multiplicité impair.

On démontre que le cardinal de  $\mathcal{Z}_I$  est égal à  $n$  en raisonnant par l'absurde en exploitant  $S = \prod_{z \in \mathcal{Z}_I} (X - z)$ .

**12.** On fixe, toujours, pour les questions suivantes un entier naturel  $j \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$ .

On note, pour tout  $i \in \llbracket 0, n - j - 1 \rrbracket$ ,  $n_i = \sqrt{\langle q_i, q_i \rangle_j} \in \mathbb{R}$  puis  $r_i = \frac{q_i}{n_i} \in \mathbb{R}_i[X]$ .

Les polynômes  $r_i$  forme la base orthonormale, pour le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_j$  de la base orthogonale  $(q_i)$ .

a) Montrer que pour tout  $i \in \llbracket 2, n - j \rrbracket$ ,

$$\frac{n_i}{n_{i-1}} r_i = (X + a_i) r_{i-1} - \frac{n_{i-1}}{n_{i-2}} r_{i-2}$$

On commencera par démontrer que  $b_i = -\left(\frac{n_{i-1}}{n_{i-2}}\right)^2$ .

b) Montrer que pour tout  $m \in \llbracket 1, n - j - 1 \rrbracket$ , pour tout  $x, y \in [-1, 1]$ ,

$$(x - y) \sum_{i=0}^m r_i(x) r_i(y) = \frac{n_{m+1}}{n_m} (r_m(y) r_{m+1}(x) - r_m(x) r_{m+1}(y))$$

c) Montrer alors, pour tout  $m \in \llbracket 0, n - j - 1 \rrbracket$ , pour tout  $x \in I$  :

$$q'_{m+1}(x) q_m(x) - q'_m(x) q_{m+1}(x) = n_m^2 \sum_{i=0}^m r_i^2(x)$$

d) Soit  $i \in \llbracket 1, n - j \rrbracket$  et  $x_1 < x_2$  sont deux racines consécutives de  $q_i$ . Montrer qu'il existe une unique racine de  $q_{i-1}$  dans l'intervalle  $]x_1, x_2[$ .

Ce sujet, haché en de trop petits morceaux, est extrait du sujet Maths B concours de X-ENS en MP2025.

Pour mesurer la finalité de ces questions, le mieux est de s'attaquer au vrai sujet...