

DEVOIR SURVEILLÉ N°8
CORRECTION

Sujet donné le samedi 4 avril 2026, 4h.

TRANSLATIONS ET DÉCALAGE

Dans tout ce problème,

- $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels,
- $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels,
- n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1 et
- $\mathbb{R}_n[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus n .
- Pour $a < b$ dans $\mathbb{Z}$, on note $\llbracket a, b \rrbracket$ l'ensemble $[a, b] \cap \mathbb{Z}$.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note P_k le polynôme X^{k-1} .
On rappelle que $\mathbb{R}_n[X]$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension $n+1$ dont la famille $(P_k)_{k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket}$ est une base.
- Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on note $\deg(P)$ le degré de P .
- Lorsque P est non nul, $\text{coef}(P)$ désigne le coefficient dominant de P , c'est-à-dire le coefficient du monôme $X^{\deg(P)}$ ou encore : $\text{coef}(P) = [P]_{\deg P}$.
- Pour $k \in \mathbb{N}$ et $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$, on note $\binom{k}{j}$ le coefficient binomial qui vaut $\frac{k!}{j!(k-j)!}$.
- Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles de taille p .
- Pour un ensemble E et $f : E \rightarrow E$, on définit l'application $f^k : E \rightarrow E$ par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ de la façon suivante :

$$f^0 = \text{Id}_E \text{ et } f^{k+1} = f \circ f^k.$$

Si f est bijective, on note f^{-1} la réciproque de f et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $f^{-k} = (f^{-1})^k$.

Dans la **première partie**, nous étudions l'application de translation τ définie sur l'espace vectoriel de dimension finie $\mathbb{R}_n[X]$. Nous écrivons sa matrice dans la base canonique, ainsi que celle de sa réciproque, nous en déduisons une expression combinatoire. Elle nous permet de dénombrer, en **deuxième partie**, le nombre de surjections de $\llbracket 0, p \rrbracket$ dans $\llbracket 0, k \rrbracket$. En **troisième partie**, nous étudions l'opérateur de différence δ sur $\mathbb{R}_n[X]$, c'est application nilpotente, elle n'admet pas de racine carrée. La base de Hilbert est naturellement associée à cet opérateur (base presque propre), elle est étudiée en **quatrième partie**. Pour finir, en **cinquième partie**, nous écrivons δ comme un polynôme en la dérivation D , que nous inversons.

Partie I - Opérateur de translation

L'opérateur de translation est l'endomorphisme τ de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$\begin{aligned} \tau : \mathbb{R}_n[X] &\rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) &\mapsto P(X+1) \end{aligned}.$$

1. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme non nul. Exprimer $\deg(\tau(P))$ et $\text{coef}(\tau(P))$ à l'aide de $\deg(P)$ et $\text{coef}(P)$.

Soit $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ un polynôme non nul de $\mathbb{R}_n[X]$, de degré d . Ainsi, $a_d \neq 0$.

D'après la définition, puis la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned} P(X+1) &= \sum_{k=0}^d a_k (X+1)^k = a_d (X+1)^d + \sum_{k=0}^{d-1} a_k (X+1)^k \\ &= a_d X^d + \underbrace{a_d \sum_{j=0}^{d-1} \binom{d}{j} X^j + \sum_{k=0}^{d-1} a_k (X+1)^k}_{\in \mathbb{R}_{d-1}[X]}. \end{aligned}$$

Comme $a_d \neq 0$,

$$\deg(\tau(P)) = \deg(P) \text{ et } \text{coef}(\tau(P)) = \text{coef}(P).$$

2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, donner l'expression de $\tau^k(P)$ en fonction de P et de k . Votre réponse devra être détaillée.

On raisonne par récurrence sur k . $\mathcal{H}_k : \ll \tau^k(P) = P(X+k) \gg$

Initialisation. Lorsque $n = 0$, alors $\tau^0 = \text{Id}$. Ainsi, $\tau^0(P) = P$.

Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $\tau^k(P) = P(X+k)$. Alors,

$$\tau^{k+1}(P) = \tau(\tau^k(P)) = \tau(P(X+k)) = P(X+(k+1)).$$

Ainsi,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \tau(P) = P(X+k).$$

3. Donner la matrice $M = (M_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n+1}$ de τ dans la base $(P_k)_{k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket}$. On exprimera, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2$, chacun des coefficients $M_{i,j}$ en fonction de i et j .

Soit $j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$. D'après la formule du binôme de Newton,

$$\tau(P_j) = (X+1)^{j-1} = \sum_{h=0}^{j-1} \binom{j-1}{h} X^h = \sum_{i=1}^j \binom{j-1}{i-1} P_i.$$

La matrice M est donc triangulaire supérieure et les coefficients de M vérifient

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, m_{i,j} = \begin{cases} \binom{j-1}{i-1} & , \text{ si } i \leq j \\ 0 & , \text{ sinon.} \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} n-1 \\ 0 \\ 1 \\ n-1 \end{pmatrix} \\ 0 & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 \\ n-1 \end{pmatrix} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \begin{pmatrix} n-2 \\ n-1 \end{pmatrix} \\ 0 & \cdots & 0 & \begin{pmatrix} n-1 \\ n-1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & & n-1 \\ \vdots & \ddots & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & n-1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ transposée du triangle de Pascal}$$

4.a) Déterminer les réels λ pour lesquels $(\lambda I_{n+1} - M)$ n'est pas inversible.

La matrice $\lambda I_{n+1} - M$ est triangulaire supérieure. Ainsi, elle est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.

Comme les coefficients diagonaux de $\lambda I_{n+1} - M$ sont tous égaux à $1 - \lambda$,

$$\lambda I_{n+1} - M \text{ n'est pas inversible} \Leftrightarrow \lambda = 1.$$

b) On suppose qu'il existe un polynôme non nul P et un réel λ tels que $\tau(P) = \lambda P$. Montrer que $\lambda = 1$.

Comme il existe $P \neq 0_{\mathbb{R}_n[X]}$ tel que $\lambda P - \tau(P) \neq 0$, alors $\text{Ker}(\lambda \text{Id} - \tau) \neq \{0\}$.

Ainsi, $\lambda I_n - M$ n'est pas inversible.

D'après la question précédente, $\lambda = 1$. Ainsi,

$$\exists P \neq 0 \text{ t.q. } \tau(P) = \lambda P \Rightarrow \lambda = 1.$$

c) En considérant les propriétés de l'endomorphisme τ , montrer que la matrice M ne peut pas être semblable à une matrice diagonale.

Supposons par l'absurde que M soit semblable à une matrice diagonale $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Alors, il existe une base $\mathcal{B} = (Q_0, \dots, Q_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que la matrice de τ dans $\mathcal{B}$ soit D .

Alors, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\tau(Q_i) = \lambda_i Q_i$.

Comme les éléments d'une base sont tous non nuls, d'après la question précédente, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_i = 1$ et $\tau(Q_i) = Q_i$. Comme une application linéaire est déterminée de manière unique par l'image des vecteurs d'une base, alors $\tau = \text{Id}$.

Or, $\tau(X) = 1 \neq X$ donc $\tau \neq \text{Id}$. On obtient ainsi une contradiction et

$$M \text{ n'est pas semblable à une matrice diagonale.}$$

5. Étude de τ^{-1} .

a) Montrer que l'application τ est bijective et préciser τ^{-1} .

Soit $\phi : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$, $P \mapsto P(X - 1)$.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

$$(\phi \circ \tau)(P) = \phi(P(X + 1)) = P(X + 1 - 1) = P,$$

$$(\tau \circ \phi)(P) = \tau(P(X - 1)) = P(X - 1 + 1) = P.$$

Ainsi, $\phi \circ \tau = \tau \circ \phi = \text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$.

L'endomorphisme τ est donc inversible et

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \tau^{-1}(P) = P(X - 1).$$

b) L'expression de τ^j trouvée à la question 2 pour $j \in \mathbb{N}$ est-elle encore valable pour $j \in \mathbb{Z}$?

Comme pour la question 2, on montre par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\tau^{-k}(P)(X) = P(X - k)$. Ainsi, la formule est toujours vraie :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \tau(P)(X) = P(X + k).$$

c) Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket^2$, déterminer le coefficient $(M^{-1})_{i,j}$ de la matrice M^{-1} en fonction de i et j .

D'après l'expression de τ^{-1} , pour tout $j \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$, d'après la formule du binôme de Newton,

$$\tau^{-1}(P_j)(X) = (X-1)^{j-1} = \sum_{h=0}^{j-1} \binom{j-1}{h} (-1)^{j-1-h} X^h = \sum_{i=1}^j (-1)^{j-i} \binom{j-1}{i-1} P_i.$$

Ainsi,

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2, (M^{-1})_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{j-i} \binom{j-1}{i-1} & \text{pour } i \leq j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

6. Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On définit, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,

$$v_k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} u_j. \quad (1)$$

a) Déterminer une matrice $Q \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

On exprimera Q en fonction de M .

On note $V = \begin{pmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$.

Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. La $(k+1)$ -ème ligne du produit matriciel $V = QU$ donne

$$v_k = \sum_{j=1}^{n+1} Q_{k+1,j} u_{j-1} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} u_j.$$

Ainsi,

$$Q_{k,j} = \begin{cases} \binom{k-1}{j-1} & , \text{ pour } j \leq k \\ 0 & , \text{ sinon.} \end{cases}$$

Finalement,

$$Q = M^T.$$

b) En déduire la formule d'inversion :

$$\forall k \in \mathbb{N}, u_k = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j \quad (2)$$

Soit $k \in \mathbb{N}$ et $n \geq k$. On utilise les notations des questions précédentes.

M est inversible, donc $Q = M^T$ l'est également et $Q^{-1} = (M^T)^{-1} = (M^{-1})^T$. Ainsi,

$$U = Q^{-1}V = (M^{-1})^T V.$$

D'après l'expression de M^{-1} obtenue à la question 5.c),

$$u_k = \sum_{j=1}^{n+1} [(M^{-1})^T]_{k+1,j} v_{j-1} = \sum_{j=1}^{n+1} [(M^{-1})]_{j,k+1} v_{j-1} = \sum_{j=0}^n [(M^{-1})]_{j+1,k+1} v_j.$$

Ainsi,

$$\forall k \in \mathbb{N}, u_k = \sum_{j=0}^n ((M^{-1}))_{j+1,k+1} v_j.$$

c) On considère un réel λ et la suite $u = (\lambda^k)_{k \in \mathbb{N}}$. Quelle est la suite $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par la formule (1)? Vérifier alors la formule (2).

Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après la définition de la suite u et la formule du binôme de Newton,

$$v_k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \lambda^j = (\lambda + 1)^k.$$

Ainsi, toujours d'après la formule du binôme de Newton,

$$\sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (\lambda + 1)^j (-1)^{k-j} = ((\lambda + 1) - 1)^k = u_k.$$

On retrouve ainsi la formule annoncée :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j = u_k.$$

Partie II - Applications en combinatoire

Pour tout couple (p, k) d'entiers naturels non nuls, on note $S(p, k)$ le nombre de surjections de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, k \rrbracket$. De façon cohérente, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $S(p, 0) = 0$.

7. Quelques cas particuliers.

a) Que vaut $S(p, n)$ pour $p < n$?

Si f est une surjection de E sur F , alors $|F| \leq |E|$. Ainsi,

$$\text{si } n > p, \text{ alors } S(p, n) = 0.$$

b) Déterminer $S(n, n)$.

Entre deux ensembles de cardinal n , une application est surjective si et seulement si elle est bijective. Comme le nombre de bijections de $\llbracket 1, n \rrbracket$ est $n!$, alors

$$S(n, n) = n!.$$

c) Déterminer $S(n + 1, n)$.

Les surjections de $\llbracket 1, n + 1 \rrbracket$ sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ sont déterminées de manière unique par :

- le choix de deux éléments de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ qui auront la même image : $\binom{n+1}{2}$ possibilités ;
 - la distribution des n éléments de l'ensemble d'arrivée avec les n éléments de l'ensemble de départ (un de ces éléments étant double) : $n!$ possibilités.
- Ainsi,

$$S(n+1, n) = \binom{n+1}{2} n! = \frac{n \times (n+1)!}{2}.$$

8. Recherche d'une expression générale.

a) Combien y a-t-il d'applications de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$?

Une application de $E = \llbracket 1, p \rrbracket$ dans un ensemble $F = \llbracket 1, n \rrbracket$ est définie de manière unique par la donnée, pour chacun des p éléments de E , d'un unique élément de F . Donc pour chacun des p éléments de E , il y a n possibilités.

Ainsi, le nombre d'applications de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ est

$$|F^E| = n \times n \cdots \times n = n^p.$$

b) Pour $p \geq n$, établir la formule

$$n^p = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S(p, k). \quad (3)$$

Notons $I_k = \{\phi : \llbracket 1, p \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket \mid |\phi(\llbracket 1, p \rrbracket)| = k\}$.

La famille $(I_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ forme une partition de F^E . Ainsi,

$$n^p = \sum_{k=1}^n |I_k|.$$

Or les applications ϕ de I_k sont déterminées de manière unique par :

- le choix de k éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$ qui forment $\phi(\llbracket 1, p \rrbracket)$: $\binom{n}{k}$ possibilités ;
 - le choix de surjections de $\llbracket 1, p \rrbracket$ sur l'ensemble $\phi(\llbracket 1, p \rrbracket)$ à k éléments : $S(p, k)$ possibilités.
- Finalement ($S(p, 0) = 0$),

$$n^p = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} S(p, k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S(p, k).$$

c) En déduire une expression de $S(p, n)$ pour $p \geq n$.

D'après la formule d'inversion de la question 6.b), avec $(v_n) = (n^p)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_k) = (S(p, k))_{k \in \mathbb{N}}$,

$$\forall p \geq n, S(p, n) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p.$$

d) En exploitant le résultat de la question 14, commenter la cohérence de cette expression pour $p < n$.

Soit $p < n$. Le polynôme $P = X^p$ appartient à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc d'après les questions précédentes,

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} P(k) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p = 0 = S(p, n).$$

9. Simplifier autant que possible les expressions suivantes :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^{n+1}.$$

D'après les questions précédentes,

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n = S(n, n) = n!$$

et

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^{n+1} = S(n+1, n) = \frac{n \times (n+1)!}{2}.$$

Ainsi,

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n = n! \text{ et } \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^{n+1} = \frac{n \times (n+1)!}{2}.$$

Partie III - Opérateur de différence

L'opérateur de différence est l'endomorphisme δ de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $\delta = \tau - \text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$, i.e.

$$\begin{aligned} \delta : \mathbb{R}_n[X] &\rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) &\mapsto P(X+1) - P(X) \end{aligned}$$

10. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme non constant. Exprimer $\deg(\delta(P))$ et $\text{coef}(\delta(P))$ à l'aide de $\deg(P)$ et $\text{coef}(P)$.

Notons que δ est bien linéaire. On exploitera le résultat trouvé pour la base P_k .

$$\delta(P_{k+1}) = (X+1)^k - X^k = kX^{k-1} + \underbrace{\sum_{i=0}^{k-2} \binom{k}{i} X^i}_{\in \mathbb{R}_{k-2}[X]}$$

Donc $\deg(\delta(P_{k+1})) = k-1$ et $\text{coef}(P_k) = k = \deg(P_{k+1})$.

Soit $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k = \sum_{k=0}^d a_k P_{k+1}$, un polynôme de degré $d \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Par linéarité de δ , $\delta(P) = \sum_{k=0}^d a_k \delta(P_{k+1})$.

Enfin, pour tout $k \in \llbracket 0, d \rrbracket$, $\deg a_k \delta(P_{k+1}) = k$,

or lorsque les degrés sont différents, le degré d'une somme de polynôme est égal au maximum des degrés.

Donc comme $a_d \neq 0$, $\deg(\delta(P)) = \deg \delta(P_{d+1}) = d-1 = \deg P - 1$.

Puis $\text{coef}(\delta(P))$ est associé au polynôme dont est ici le degré : $\text{coef}(\delta(P)) = a_d \text{coef}(\delta(P_{d+1})) = da_d$.

$$\deg(\delta(P)) = \deg(P) - 1 \text{ et } \text{coef}(\delta(P)) = \deg(P) \cdot \text{coef}(P).$$

11. En déduire le noyau $\text{Ker}(\delta)$ et l'image $\text{Im}(\delta)$ de l'endomorphisme δ .

D'après la question précédente, si P n'est pas constant, alors $\deg(P) \geq 1$ et $\deg(\delta(P)) \geq 0$. Ainsi, $\delta(P)$ n'est pas nul et $P \notin \text{Ker}(\delta)$.

Et « réciproquement », De plus, si $\delta(P) = 0$, alors P est constant et $\delta(P) = 0$. Finalement,

$$\boxed{\text{Ker}(\delta) = \mathbb{R}_0[X].}$$

D'après la question précédente, $\text{Im}(\delta) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

D'après le théorème du rang,

$$\dim(\text{Im}(\delta)) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) - \dim(\text{Ker}(\delta)) = n + 1 - 1 = n = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X]).$$

Ainsi, $\text{Im}(\delta) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et leurs dimensions sont égales, donc

$$\boxed{\text{Im}(\delta) = \mathbb{R}_{n-1}[X].}$$

12. Plus généralement, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, montrer que :

$$\text{Ker}(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X] \text{ et } \text{Im}(\delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[X] \quad (4)$$

On raisonne par récurrence sur j , avec $\mathcal{H}_j : \ll \text{Ker}(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X] \text{ et } \text{Im}(\delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[X]. \gg$

Initialisation. Effectuée à la question précédente.

Hérédité. Soit $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. On suppose que $\text{Ker}(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X]$ et $\text{Im}(\delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[X]$.

— D'une part,

$$P \in \text{Ker}(\delta^{j+1}) \Leftrightarrow \delta^{j+1}(P) = 0 \Leftrightarrow \delta^j(\delta(P)) = 0 \Leftrightarrow \delta(P) \in \mathbb{R}_{j-1}[X].$$

Or, d'après la question 10,

$$\deg(\delta(P)) \leq j-1 \Leftrightarrow \deg(P) - 1 \leq j-1 \Leftrightarrow \deg(P) \leq j \Leftrightarrow P \in \mathbb{R}_j[X].$$

Ainsi, $\text{Ker}(\delta^{j+1}) = \mathbb{R}_j[X]$.

— D'autre part, soit $P \in \text{Im}(\delta^{j+1})$. Il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = \delta^{j+1}(Q)$.

Comme $\delta^j(Q) \in \text{Im}(\delta^j)$, alors $Q \in \mathbb{R}_{n-j}[X]$.

Ainsi, d'après la question 10, $P = \delta(\delta^j(Q)) \in \mathbb{R}_{n-j-1}[X]$.

De plus, d'après le théorème du rang,

$$\dim(\text{Im}(\delta^{j+1})) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) - \dim(\text{Ker}(\delta^{j+1})) = n + 1 - (j + 1) = n - j.$$

Ainsi, par inclusion et égalité des dimensions,

$$\text{Im}(\delta^{j+1}) = \mathbb{R}_{n-j}[X].$$

Finalement, d'après le principe de récurrence,

$$\boxed{\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{Ker}(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X] \text{ et } \text{Im}(\delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[X].}$$

13. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que $\delta^k(P) = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \tau^j(P)$.

Comme les endomorphismes Id et τ commutent, pour tout k entier naturel,

$$\delta^k = (\tau - \text{Id})^k = \sum_{j=0}^k (-1)^{n-j} \binom{k}{j} \tau^j.$$

Ainsi,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall P \in \mathbb{R}_n[X], \delta^k(P) = \sum_{j=0}^k (-1)^{n-j} \binom{k}{j} \tau^j(P).$$

14. Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Montrer que :

$$\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(j) = 0 \quad (5)$$

Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. D'après la question 12, $P \in \text{Ker}(\delta^n)$. Ainsi, $\delta^n(P) = 0$ et, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \tau^j(P) \\ &= \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(X+j). \end{aligned}$$

En particulier, en évaluant les fonctions polynomiales associées en 0,

$$\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(j) = 0.$$

15. Dans cette question, on veut montrer qu'il n'existe pas d'application linéaire $u : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$ telle que $u \circ u = \delta$. On suppose, par l'absurde, qu'une telle application u existe.

a) Montrer que u et δ^2 commutent.

D'après les définitions,

$$u \circ \delta^2 = u \circ (u \circ u) = u^5 = (u \circ u)^2 \circ u = \delta^2 \circ u.$$

Ainsi,

$$u \text{ et } \delta^2 \text{ commutent.}$$

b) En déduire que $\mathbb{R}_1[X]$ est stable par l'application u .

D'après la question 12, $\mathbb{R}_1[X] = \text{Ker}(\delta^2)$.

Soit $P \in \mathbb{R}_1[X]$. Montrons que $u(P) \in \mathbb{R}_1[X] = \text{Ker}(\delta^2)$. En effet,

$$\delta^2(u(P)) = u(\delta^2(P)) = u(0) = 0.$$

Ainsi,

$$\mathbb{R}_1[X] \text{ est stable par } u.$$

c) Montrer qu'il n'existe pas de matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Supposons par l'absurde qu'il existe $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\text{Alors, } A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'une part, $c(a+d) = 0$. Ainsi, soit $c = 0$, soit $a = -d$.

— Si $c = 0$. Alors, $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & b(a+d) \\ 0 & d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

En étudiant les coefficients diagonaux, $a = d = 0$, ce qui est impossible car $b(a+d) = 1$.

— Si $a = -d$. Ceci est impossible car $b(a+d) = 1$.

On obtient ainsi une contradiction et

$$\forall A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), A^2 \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

d) Conclure.

Comme $\mathbb{R}_1[X]$ est stable par u , notons $\tilde{u} : \mathbb{R}_1[X] \rightarrow \mathbb{R}_1[X]$, $P \mapsto u(P)$.

Notons A la matrice de $\tilde{u}$ dans la base canonique (P_1, P_2) de $\mathbb{R}_1[X]$.

Alors,

$$\begin{aligned} \tilde{u}^2(P_1) &= u(u(P_1)) = \delta(P_1) = 1 - 1 = 0, \\ \tilde{u}^2(P_2) &= u(u(P_2)) = \delta(P_2) = (X+1) - X = P_1. \end{aligned}$$

Ainsi, $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ceci est impossible d'après la question précédente.

$$\forall u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X]), u^2 \neq \delta.$$

16. Dans cette question, on cherche tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_n[X]$ stables par l'application δ .

a) Soit P un polynôme non nul de degré $d \leq n$. Montrer que la famille $(P, \delta(P), \dots, \delta^d(P))$ est libre. Quel est l'espace vectoriel engendré par cette famille ?

D'après la question 10, pour tout $i \in \llbracket 0, d \rrbracket$, $\deg(\delta^i(P)) = d - i$. Ainsi, la famille $(P, \delta(P), \dots, \delta^d(P))$ est une famille de polynômes non nuls à degrés étagés.

Il s'agit donc d'une famille libre.

De plus, pour tout $i \in \llbracket 0, d \rrbracket$, $\delta^i(P) \in \mathbb{R}_d[X]$.

Ainsi, la famille $(P, \delta(P), \dots, \delta^d(P))$ est une famille libre) $(d+1)$ éléments de $\mathbb{R}_d[X]$, espace vectoriel de dimension d , donc c'est une base de $\mathbb{R}_d[X]$ et

$$\text{Vect} \{P, \delta(P), \dots, \delta^d(P)\} = \mathbb{R}_d[X].$$

b) En déduire que, si V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ stable par δ et non réduit à $\{0\}$, alors il existe un entier $d \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tel que $V = \mathbb{R}_d[X]$.

Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ non réduit à $\{0\}$ et stable par δ .

Notons $I = \{\deg(P), P \in V \setminus \{0\}\}$.

— $I \subset \mathbb{N}$ car il ne contient pas le degré du polynôme nul,

— $I \neq \emptyset$ car V contient un polynôme non nul,

— I est majoré par n car $V \subset \mathbb{R}_n[X]$.

Ainsi, I possède un élément maximal. Notons $d = \max(I)$.

— D'une part, tout polynôme de V est de degré au plus d , donc $V \subset \mathbb{R}_d[X]$.

— D'autre part, V est stable par δ , donc

$$\text{Vect} \{P, \delta(P), \dots, \delta^d(P)\} \subset V.$$

Ainsi, d'après la question précédente, $\mathbb{R}_d[X] \subset V$.

Finalement,

$$\boxed{\exists d \in \mathbb{N} \text{ tel que } V = \mathbb{R}_d[X].}$$

Partie IV - Étude d'une famille de polynômes

On considère la famille de polynômes

$$\begin{cases} H_0 = 1, \\ H_k = \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (X - j) \quad , \text{ pour tout } k \in \llbracket 1, n \rrbracket. \end{cases}$$

17. Montrer que la famille $(H_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\deg(H_k) = k$. Ainsi, la famille $(H_0, H_1, \dots, H_n)$ est une famille de polynômes non nuls de degrés étagés, donc c'est une famille libre.

De plus, cette famille est une famille de $(n+1)$ polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$, espace vectoriel de dimension $n+1$, donc

$$\boxed{(H_0, H_1, \dots, H_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X].}$$

18. Calculer $\delta(H_0)$ et, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, exprimer $\delta(H_k)$ à l'aide de H_{k-1} .

D'après la définition de l'opérateur de différence, $\delta(H_0) = 1 - 1 = 0$.

Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

$$\begin{aligned} \delta(H_k) &= H_k(X+1) - H_k(X) \\ &= \frac{1}{k!} \left(\prod_{j=0}^{k-1} (X+1-j) - \prod_{j=0}^{k-1} (X-j) \right) \\ &= \frac{1}{k!} \left((X+1) \prod_{j=0}^{k-2} (X-j) - (X-k+1) \prod_{j=0}^{k-2} (X-j) \right) \\ &= H_{k-1}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\delta(H_0) = 0 \text{ et } \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \delta(H_k) = H_{k-1}.}$$

19. On note M' de taille $n+1$ donnée par

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que la matrice M' et la matrice M définie à la question **I.3.** sont semblables.

Comme $\delta = \tau - \text{Id}$, d'après la question précédente,

$$\tau(H_0) = \delta(H_0) + H_0 = H_0 \text{ et } \forall, k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \tau(H_k) = \delta(H_k) + H_k = H_k + H_{k-1}.$$

Ainsi, en notant $\mathcal{H} = (H_0, \dots, H_n)$, alors M' est la matrice de τ dans la base $\mathcal{H}$.

Comme M est la matrice de τ dans la base canonique, alors M et M' sont les matrices d'un même endomorphisme.

Donc,

M et M' sont semblables.

20. Montrer que, pour tous $k, \ell \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\delta^k(H_\ell)(0) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } k = \ell \\ 0 & , \text{ si } k \neq \ell \end{cases}$.

Pour tout $(k, \ell) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$, on montre par récurrence sur $\ell \geq k$ que

$$\delta^k(H_\ell) = \delta^{k-1}(H_{\ell-1}) = \begin{cases} H_{\ell-k} & \text{ si } \ell \geq k \\ 0 & \text{ sinon.} \end{cases}$$

De plus, si $h \neq 0$, alors $H_h(0) = 0$ et $H_0(0) = 1$.

Par conséquent,

$$\delta^k(H_\ell)(0) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } \ell = k \\ 0 & , \text{ sinon.} \end{cases}$$

21. En déduire que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $P = \sum_{k=0}^n (\delta^k(P))(0) H_k$.

Puisque $(H_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$P = \sum_{\ell=0}^n a_\ell H_\ell.$$

La fonction δ étant linéaire, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\delta^k P(0) = \sum_{\ell}^n a_\ell \delta^k(H_\ell)(0) = a_k.$$

Donc,

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], P = \sum_{k=0}^n \delta^k(P)(0) H_k.$$

Remarque :

En fait la famille $(P \mapsto \delta^k(P)(0))_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est la base duale associée à $(H_0, \dots, H_n)$.

22. Étude d'un exemple.

a) Donner les coordonnées du polynôme $X^3 + 2X^2 + 5X + 7$ dans la base (H_0, H_1, H_2, H_3) de $\mathbb{R}_3[X]$.

Notons $T(X) = X^3 + 2X^2 + 5X + 7$. Alors,

$$\begin{aligned}\delta(T)(X) &= 3X^2 + 7X + 8, \\ \delta^2(T)(X) &= 6X + 10, \\ \delta^3(T)(X) &= 6.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$T = 6H_3 + 10H_2 + 8H_1 + 7H_0.$$

b) En déduire un polynôme $P \in \mathbb{R}_5[X]$ tel que

$$\delta^2(P) = X^3 + 2X^2 + 5X + 7.$$

Comme $\delta^2(H_k) = H_{k-2}$, notons $P = 6H_5 + 10H_4 + 8H_3 + 7H_2$. Alors,

$$\delta^2(P) = 6H_3 + 10H_2 + 8H_1 + 7H_0 = T.$$

Ainsi,

$$P = 6H_5 + 10H_4 + 8H_3 + 7H_2.$$

c) Déterminer l'ensemble des suites réelles $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telles que

$$\forall k \in \mathbb{N}, u_{k+2} - 2u_{k+1} + u_k = k^3 + 2k^2 + 5k + 7.$$

Notons $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites à valeurs réelles, $d = (k^3 + 2k^2 + 5k + 7)_{k \in \mathbb{N}}$ et

$$\begin{aligned}\phi : \mathcal{S}(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}) \\ u &\mapsto (u_{k+2} - 2u_{k+1} + u_k)_{k \in \mathbb{N}}\end{aligned}$$

Alors, l'application ϕ est linéaire et l'équation $\phi(u) = d$ est une équation affine.

— D'une part, on résout l'équation homogène $\phi(u) = 0$.

L'équation caractéristique associée est $r^2 - 2r + 1 = 0$, dont la racine double est 1.

Ainsi, $\text{Ker}(\phi) = \{(a + bk)_{k \in \mathbb{N}}, a, b \in \mathbb{R}\}$.

— Soit $p = (p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels, solution particulière de l'équation.

D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}\delta^2(P) &= P(X+2) - 2P(X+1) + P(X) \\ X^3 + 2X^2 + 5X + 7 &= P(X+2) - 2P(X+1) + P(X) \\ k^3 + 2k^2 + 5k + 7 &= P(k+2) - 2P(k+1) + P(k).\end{aligned}$$

Ainsi, en posant $p = (P(n))_{n \in \mathbb{N}}$, alors p est une solution particulière. Alors, en utilisant la convention

$$\binom{k}{j} = 0 \text{ si } j > k,$$

$$\forall, n \in \mathbb{N}, p_n = 6H_5(k) + 10H_4(k) + 8H_3(k) + 7H_2(k) = 6\binom{k}{5} + 10\binom{k}{4} + 8\binom{k}{3} + 7\binom{k}{2}.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation linéaire est le sous-espace affine :

$$\left\{ \left(a + \underline{k} + 6\binom{k}{5} + 10\binom{k}{4} + 8\binom{k}{3} + 7\binom{k}{2} \right)_{k \in \mathbb{N}}, a, b \in \mathbb{R} \right\} = (p_n)_n + \text{vect}((1)_n, (n)_n).$$

23. Polynômes à valeurs entières.

a) Soit $k \in \mathbb{Z}$. Calculer $H_n(k)$. On distinguera trois cas : $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $k \geq n$ et $k < 0$. Pour ce dernier cas, on posera $k = -p$.

— Si $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, alors

$$H_n(k) = \frac{1}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (k-j) = 0.$$

— Si $k \geq n$, alors

$$H_n(k) = \frac{1}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (k-j) = \frac{1}{n!} \prod_{j=k-n+1}^k j = \binom{k}{n}.$$

— Si $k < 0$, en notant $p = -k$,

$$\begin{aligned} H_n(k) &= \frac{1}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (k-j) \\ &= \frac{1}{n!} (-1)^n \prod_{j=0}^{n-1} (p+j) \\ &= (-1)^n \frac{p(p+1) \cdots (p+n-1)}{n!} \\ &= (-1)^n \binom{p+n-1}{n}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$H_n(k) = \begin{cases} \binom{k}{n} & \text{si } k \geq n \\ 0 & \text{si } k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket. \\ (-1)^n \binom{n-1-k}{n} & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

b) En déduire que $H_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$, c'est-à-dire que H_n est à valeurs entières sur les entiers.

Les coefficients binomiaux sont entiers (ce sont des cardinaux d'ensembles), donc pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $H_n(k) \in \mathbb{Z}$. Ainsi,

$$H_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}.$$

c) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ à valeurs entières sur les entiers. Montrer que $\delta(P)$ est aussi à valeurs entières sur les entiers.

Soient P tel que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{Z}$.

Alors, $\delta(P)(k) = P(k+1) - P(k)$. Ainsi,

$$P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z} \Rightarrow \delta(P)(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}.$$

d) Montrer que $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est à valeurs entières sur les entiers si et seulement si ses coordonnées dans la base $(H_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ sont entières.

— Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

En utilisant la question précédente, on montre par récurrence que

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \delta^k(P)(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}.$$

En particulier,

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \delta^k(P)(0) \in \mathbb{Z}.$$

Or, d'après la question 21, $P = \sum_{k=0}^n \delta^k(P)(0)H_k$ est donc à coordonnées entières.

— Réciproquement, si les coordonnées de P dans la base (H_k) sont des entiers, il existe $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ tels que $P = \sum_{i=0}^n a_i H_i$.

Alors, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $P(k) = \sum_{i=0}^n a_i H_i(k) \in \mathbb{Z}$.

Ainsi, $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

Finalement,

P est à valeurs entières sur les entiers si et seulement si ses coordonnées dans (H_k) sont entières.

e) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $d \in \mathbb{N}$. Montrer que si P est à valeurs entières sur les entiers alors $d!P$ est un polynôme à coefficients entiers. Étudier la réciproque.

— Soit P , de degré d , tel que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

D'après les questions précédentes, il existe $a_0, a_1, \dots, a_d \in \mathbb{Z}$ tels que $P = \sum_{i=0}^d a_i H_i$. Alors,

$$d!P = \sum_{i=0}^d a_i \times d!H_i = \sum_{i=0}^d \left(a_i \times d(d-1) \dots (i+1) \times \prod_{j=0}^{i-1} (X-j) \right) \in \mathbb{Z}[X]$$

$d!P$ est bien à coefficients entiers.

— Soit $P = \frac{1}{2}X^2$ un polynôme de degré 2.

D'une part, $2!P = X^2$ est bien à coefficients entiers.

Cependant, $P(1) = \frac{1}{2}$, donc $P(\mathbb{Z}) \not\subset \mathbb{Z}$.

La réciproque est donc fausse.

Partie V - Opérateur δ et opérateur dérivation

24. Soient $p \in \mathbb{N}^*$, I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ contenant 0.

Soit $\phi : I \rightarrow J$ une bijection telle que $\phi(0) = 0$. On suppose que ϕ et ϕ^{-1} admettent les DL à l'ordre $p-1$ en 0 suivants :

$$\begin{aligned} \phi(x) &= A(x) + o(x^{p-1}) \\ \phi^{-1}(x) &= B(x) + o(x^{p-1}) \end{aligned} \quad \text{à } x \rightarrow 0$$

où $(A, B) \in \mathbb{R}_{p-1}[X]^2$.

En calculant le DL à l'ordre $p - 1$ en 0 de $\phi \circ \phi^{-1}$, montrer que X^p divise $A(B(X)) - X$.

D'après le théorème sur l'existence d'un $DL_{p-1}(0)$ pour une composée de fonctions admettant un $DL_{p-1}(0)$, sous les hypothèses de l'énoncé, $\phi \circ \phi^{-1}$ admet un $DL_{p-1}(0)$ dont la partie régulière est obtenu par troncature du polynôme $A(B(X))$ pour ne conserver que les termes de degré $\leq p - 1$, ce qui revient à considérer le reste de la division euclidienne de $A(B(X))$ par X^p :

$$(\phi \circ \phi^{-1})(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} R(x) + o(x^{p-1})$$

où R est le reste de la division euclidienne de $A(B(X))$ par X^p :

$$\exists!(S, R) \in \mathbb{R}[X]^2 : A(B(X)) = X^p S(X) + R(X) \quad \text{et} \quad \deg R \leq p - 1$$

Par ailleurs, $\phi \circ \phi^{-1} = \text{Id}_J$ donc

$$(\phi \circ \phi^{-1})(x) = x \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x^{p-1})$$

donc, par unicité de la partie régulière d'un DL :

$$R = X$$

donc $A(B(X)) = X^p S(X) + X$ si bien que

$$A(B(X)) - X = X^p S(X) \text{ donc } X^p \mid A(B(X)) - X.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On considère l'endomorphisme dérivation sur $\mathbb{R}_n[X]$ que l'on note D .

On notera -en particulier pour bien comprendre la question **25.b)** - la relation algébrique :

$$P_k \circ D = X^{k-1} \circ D = D^{k-1} \quad \text{donc} \quad \forall P \in \mathbb{R}[X], (P_k \circ D)(P) = P^{(k-1)}$$

25.a) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que

$$\forall a \in \mathbb{R}, P(a+1) = P(a) + \sum_{k=1}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!}$$

Appliquons la formule de Taylor en a pour le polynôme P de degré $\leq n$ ($P \in \mathbb{R}_n[X]$)

$$P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k = P(a) + \sum_{k=1}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k$$

si bien qu'en prenant l'image de cette relation par le morphisme d'évaluation en $a + 1$:

$$P(a+1) = P(a) + \sum_{k=1}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (a+1 - a)^k = P(a) + \sum_{k=1}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!}$$

$$\text{Ainsi, } P(a+1) = P(a) + \sum_{k=1}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!}.$$

b) En déduire l'existence de $Q_1 \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $Q_1(D) = \delta$ (δ : endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ des parties **III** et **IV**).

La formule établie dans la question précédente donne :

$$\begin{aligned} \forall P \in \mathbb{R}_n[X], \forall a \in \mathbb{R}, \underbrace{P(a+1) - P(a)}_{= (\delta(P))(a)} &= \sum_{k=1}^n \underbrace{\frac{P^{(k)}(a)}{k!}}_{= \frac{1}{k!} D^k(P)(a)} \\ &= \frac{1}{k!} D^k(P)(a) \end{aligned}$$

donc

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \forall a \in \mathbb{R}, (\delta(P))(a) = \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} D^k(P) \right] (a)$$

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ fixé quelconque. La relation ci-dessus montre que le polynôme $\delta(P) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} D^k(P)$ possède une infinité de racines donc c'est le polynôme nul donc

$$\delta(P) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} D^k(P)$$

Remarque : un autre argument possible consiste à dire que $\mathbb{R}$ étant un corps de cardinal infini, le morphisme qui à tout polynôme fait correspondre la fonction polynomiale associée est injectif, or les fonctions polynomiales $a \mapsto (\delta(P))(a)$ et $a \mapsto \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} D^k(P) \right] (a)$ coïncident sur $\mathbb{R}$, donc, par injectivité, les polynômes correspondants sont égaux.

Posons $Q_1 = \sum_{k=1}^n \frac{X^k}{k!}$.

Nous venons de prouver que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \delta(P) = Q_1(D)(P)$$

donc $\delta = Q_1(D)$ où $Q_1 = \sum_{k=1}^n \frac{X^k}{k!}$.

26. En appliquant la question 24 à la fonction $\phi(x) = \ln(1+x)$ (on précisera alors soigneusement les valeurs choisies pour les différents objets mathématiques mis en jeu : $p, I, J, \dots$), montrer que

$$D = \delta - \frac{1}{2}\delta^2 + \frac{1}{3}\delta^3 + \dots + \frac{(-1)^n}{n}\delta^n$$

Soit $\phi \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \ln(1+x) \end{array} \right.$
 $\phi(0) = 0$ et ϕ admet le $DL_n(0)$:

$$\phi(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + o(x^n)$$

ϕ est bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$, $\phi^{-1} \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & e^x - 1 \end{array} \right.$ et ϕ^{-1} admet le $DL_n(0)$:

$$\phi^{-1}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

La première question de la partie **IV** s'applique pour $I = J = \mathbb{R}_+$, pour la fonction ϕ ci-dessus, $p \leftarrow n+1$,

$$A \leftarrow \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} X^k}{k}, \quad B \leftarrow Q_1 = \sum_{k=1}^n \frac{X^k}{k!}.$$

La conclusion est que $X^{n+1} \mid A \circ B(X) - X$:

$$\exists C \in \mathbb{R}[X] : A \circ Q_1(X) = X + X^{n+1}C(X)$$

Évaluons cette identité en l'endomorphisme nilpotent D de $\mathbb{R}_n[X]$ ce qui donne

$$A(Q_1(D)) = D + D^{n+1} \circ C(D)$$

or $Q_1(D) = \delta$ et $D^{n+1} = 0$ (la dérivée $(n+1)$ -ème d'un polynôme de degré $\leq n$ est le polynôme nul), donc $A(\delta) = D$.

$$\text{Ainsi, } D = \delta - \frac{1}{2}\delta^2 + \frac{1}{3}\delta^3 + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\delta^n.$$

27.a) Établir l'existence de constantes $(c_k)_{k \in [1, n]} \in \mathbb{R}^n$ telles que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad P'(X) = - \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) P(X) + \sum_{k=1}^n c_k P(X+k)$$

On pourra utiliser la question **13**.

Soit $P \in E$ fixé quelconque.

Reprenons la formule établie dans la question précédente

$$P'(X) = D(P) = \sum_{m=1}^n \frac{(-1)^{m-1}}{m} \delta^m(P)$$

et remplaçons, avec le résultat de la question **13** l'expression de $\delta^m(P)$:

$$\begin{aligned} P'(X) &= \sum_{m=1}^n \frac{(-1)^{m-1}}{m} \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} P(X+k) \\ &= \sum_{m=1}^n \frac{(-1)^{m-1}}{m} \left[(-1)^m P(X) + \sum_{k=1}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} P(X+k) \right] \\ &= - \left(\sum_{m=1}^n \frac{(-1)^{2m}}{m} \right) P(X) - \sum_{1 \leq k \leq m \leq n} \frac{(-1)^{2m-k}}{m} \binom{m}{k} P(X+k) \\ &= - \left(\sum_{m=1}^n \frac{1}{m} \right) P(X) + \sum_{k=1}^n \left(- \sum_{m=k}^n \frac{(-1)^{2m-k}}{m} \binom{m}{k} \right) P(X+k) \end{aligned}$$

Posons, pour tout $k \in [1, n]$, $c_k = - \sum_{m=k}^n \frac{(-1)^k}{m} \binom{m}{k}$ (on a utilisé que $(-1)^{-k} = (-1)^k$).

Par conséquent, en posant pour tout $k \in [1, n]$, $c_k = - \sum_{m=k}^n \frac{(-1)^k}{m} \binom{m}{k}$,

on a, $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad P'(X) = - \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) P(X) + \sum_{k=1}^n c_k P(X+k).$

b) En déduire que $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

En particulierisant la relation ci-dessus pour $P \leftarrow X^0$ (polynôme constant égal à 1), on obtient

$$0 = - \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) + \sum_{k=1}^n c_k$$

Observons que, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\frac{1}{m} \binom{m}{k} = \frac{1}{k} \binom{m-1}{k-1}$ donc

$$c_k = -\frac{(-1)^k}{k} \underbrace{\sum_{m=k}^n \binom{m-1}{k-1}}_{\text{somme des coeff binomiaux sur la colonne } k-1 \text{ de la ligne } k-1 \text{ à la ligne } n-1} = -\frac{(-1)^k}{k} \binom{n}{k}$$

Ainsi $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n c_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.
