

DEVOIR SURVEILLÉ N°8

Sujet donné le samedi 4 avril 2026, 4h.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

La notation tiendra particulièrement compte de la **qualité de la rédaction**, la **précision des raisonnements** et l'**énoncé des formules utilisées**. Les réponses aux questions seront numérotées et séparées par un trait horizontal. Les résultats essentiels devront être encadrés ou soulignés.

BON TRAVAIL

TRANSLATIONS ET DÉCALAGE

Dans tout ce problème,

- $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels,
- $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels,
- n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1 et
- $\mathbb{R}_n[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus n .
- Pour $a < b$ dans $\mathbb{Z}$, on note $\llbracket a, b \rrbracket$ l'ensemble $[a, b] \cap \mathbb{Z}$.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note P_k le polynôme X^{k-1} .
On rappelle que $\mathbb{R}_n[X]$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension $n+1$ dont la famille $(P_k)_{k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket}$ est une base.
- Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on note $\deg(P)$ le degré de P .
- Lorsque P est non nul, $\text{coef}(P)$ désigne le coefficient dominant de P , c'est-à-dire le coefficient du monôme $X^{\deg(P)}$ ou encore : $\text{coef}(P) = [P]_{\deg P}$.
- Pour $k \in \mathbb{N}$ et $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$, on note $\binom{k}{j}$ le coefficient binomial qui vaut $\frac{k!}{j!(k-j)!}$.
- Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles de taille p .
- Pour un ensemble E et $f : E \rightarrow E$, on définit l'application $f^k : E \rightarrow E$ par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ de la façon suivante :

$$f^0 = \text{Id}_E \text{ et } f^{k+1} = f \circ f^k.$$

Si f est bijective, on note f^{-1} la réciproque de f et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $f^{-k} = (f^{-1})^k$.

Dans la **première partie**, nous étudions l'application de translation τ définie sur l'espace vectoriel de dimension finie $\mathbb{R}_n[X]$. Nous écrivons sa matrice dans la base canonique, ainsi que celle de sa réciproque, nous en déduisons une expression combinatoire. Elle nous permet de dénombrer, en **deuxième partie**, le nombre de surjections de $\llbracket 0, p \rrbracket$ dans $\llbracket 0, k \rrbracket$. En **troisième partie**, nous étudions l'opérateur de différence δ sur $\mathbb{R}_n[X]$, c'est application nilpotente, elle n'admet pas de racine carrée. La base de Hilbert est naturellement associée à cet opérateur (base presque propre), elle est étudiée en **quatrième partie**. Pour finir, en **cinquième partie**, nous écrivons δ comme un polynôme en la dérivation D , que nous inversons.

Partie I - Opérateur de translation

L'opérateur de translation est l'endomorphisme τ de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$\begin{array}{ccc} \tau : & \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ & P(X) & \mapsto P(X+1) \end{array}.$$

1. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme non nul. Exprimer $\deg(\tau(P))$ et $\text{coef}(\tau(P))$ à l'aide de $\deg(P)$ et $\text{coef}(P)$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, donner l'expression de $\tau^k(P)$ en fonction de P et de k . Votre réponse devra être détaillée.
3. Donner la matrice $M = (M_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n+1}$ de τ dans la base $(P_k)_{k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket}$. On exprimera, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2$, chacun des coefficients $M_{i,j}$ en fonction de i et j .

- 4.a) Déterminer les réels λ pour lesquels $(\lambda I_{n+1} - M)$ n'est pas inversible.
- b) On suppose qu'il existe un polynôme non nul P et un réel λ tels que $\tau(P) = \lambda P$. Montrer que $\lambda = 1$.
- c) En considérant les propriétés de l'endomorphisme τ , montrer que la matrice M ne peut pas être semblable à une matrice diagonale.
5. Étude de τ^{-1} .
- a) Montrer que l'application τ est bijective et préciser τ^{-1} .
- b) L'expression de τ^j trouvée à la question 2 pour $j \in \mathbb{N}$ est-elle encore valable pour $j \in \mathbb{Z}$?
- c) Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2$, déterminer le coefficient $(M^{-1})_{i,j}$ de la matrice M^{-1} en fonction de i et j .
6. Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On définit, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,

$$v_k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} u_j. \quad (1)$$

- a) Déterminer une matrice $Q \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

On exprimera Q en fonction de M .

- b) En déduire la formule d'inversion :

$$\forall k \in \mathbb{N}, u_k = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j \quad (2)$$

- c) On considère un réel λ et la suite $u = (\lambda^k)_{k \in \mathbb{N}}$. Quelle est la suite $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par la formule (1)? Vérifier alors la formule (2).

Partie II - Applications en combinatoire

Pour tout couple (p, k) d'entiers naturels non nuls, on note $S(p, k)$ le nombre de surjections de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, k \rrbracket$. De façon cohérente, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $S(p, 0) = 0$.

7. Quelques cas particuliers.

- a) Que vaut $S(p, n)$ pour $p < n$?
- b) Déterminer $S(n, n)$.
- c) Déterminer $S(n+1, n)$.

8. Recherche d'une expression générale.

- a) Combien y a-t-il d'applications de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$?
- b) Pour $p \geq n$, établir la formule

$$n^p = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S(p, k). \quad (3)$$

- c) En déduire une expression de $S(p, n)$ pour $p \geq n$.
- d) En exploitant le résultat de la question 14, commenter la cohérence de cette expression pour $p < n$.

9. Simplifier autant que possible les expressions suivantes :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^{n+1}.$$

Partie III - Opérateur de différence

L'opérateur de différence est l'endomorphisme δ de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $\delta = \tau - \text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$, i.e.

$$\begin{aligned} \delta : \quad \mathbb{R}_n[X] &\rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) &\mapsto P(X+1) - P(X) \end{aligned}$$

10. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme non constant. Exprimer $\deg(\delta(P))$ et $\text{coef}(\delta(P))$ à l'aide de $\deg(P)$ et $\text{coef}(P)$.

11. En déduire le noyau $\text{Ker}(\delta)$ et l'image $\text{Im}(\delta)$ de l'endomorphisme δ .

12. Plus généralement, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, montrer que :

$$\text{Ker}(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X] \text{ et } \text{Im}(\delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[X] \quad (4)$$

13. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que $\delta^k(P) = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \tau^j(P)$.

14. Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Montrer que :

$$\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(j) = 0 \quad (5)$$

15. Dans cette question, on veut montrer qu'il n'existe pas d'application linéaire $u : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$ telle que $u \circ u = \delta$. On suppose, par l'absurde, qu'une telle application u existe.

a) Montrer que u et δ^2 commutent.

b) En déduire que $\mathbb{R}_1[X]$ est stable par l'application u .

c) Montrer qu'il n'existe pas de matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

d) Conclure.

16. Dans cette question, on cherche tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_n[X]$ stables par l'application δ .

a) Soit P un polynôme non nul de degré $d \leq n$. Montrer que la famille $(P, \delta(P), \dots, \delta^d(P))$ est libre. Quel est l'espace vectoriel engendré par cette famille ?

b) En déduire que, si V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ stable par δ et non réduit à $\{0\}$, alors il existe un entier $d \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tel que $V = \mathbb{R}_d[X]$.

Partie IV - Étude d'une famille de polynômes

On considère la famille de polynômes

$$\begin{cases} H_0 = 1, \\ H_k = \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (X - j) \end{cases} \text{ , pour tout } k \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

17. Montrer que la famille $(H_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

18. Calculer $\delta(H_0)$ et, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, exprimer $\delta(H_k)$ à l'aide de H_{k-1} .

19. On note M' de taille $n+1$ donnée par

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que la matrice M' et la matrice M définie à la question **I.3.** sont semblables.

20. Montrer que, pour tous $k, \ell \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\delta^k(H_\ell)(0) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } k = \ell \\ 0 & , \text{ si } k \neq \ell \end{cases}$.

21. En déduire que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $P = \sum_{k=0}^n (\delta^k(P))(0) H_k$.

22. Étude d'un exemple.

a) Donner les coordonnées du polynôme $X^3 + 2X^2 + 5X + 7$ dans la base (H_0, H_1, H_2, H_3) de $\mathbb{R}_3[X]$.

b) En déduire un polynôme $P \in \mathbb{R}_5[X]$ tel que

$$\delta^2(P) = X^3 + 2X^2 + 5X + 7.$$

c) Déterminer l'ensemble des suites réelles $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telles que

$$\forall k \in \mathbb{N}, u_{k+2} - 2u_{k+1} + u_k = k^3 + 2k^2 + 5k + 7.$$

23. Polynômes à valeurs entières.

- a) Soit $k \in \mathbb{Z}$. Calculer $H_n(k)$. On distinguera trois cas : $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $k \geq n$ et $k < 0$. Pour ce dernier cas, on posera $k = -p$.
- b) En déduire que $H_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$, c'est-à-dire que H_n est à valeurs entières sur les entiers.
- c) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ à valeurs entières sur les entiers. Montrer que $\delta(P)$ est aussi à valeurs entières sur les entiers.
- d) Montrer que $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est à valeurs entières sur les entiers si et seulement si ses coordonnées dans la base $(H_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ sont entières.
- e) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $d \in \mathbb{N}$. Montrer que si P est à valeurs entières sur les entiers alors $d!P$ est un polynôme à coefficients entiers. Étudier la réciproque.

Partie V - Opérateur δ et opérateur dérivation

24. Soient $p \in \mathbb{N}^*$, I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ contenant 0.

Soit $\phi : I \rightarrow J$ une bijection telle que $\phi(0) = 0$. On suppose que ϕ et ϕ^{-1} admettent les DL à l'ordre $p-1$ en 0 suivants :

$$\begin{aligned} \phi(x) & \underset{x \rightarrow 0}{=} A(x) + o(x^{p-1}) \\ \phi^{-1}(x) & \underset{x \rightarrow 0}{=} B(x) + o(x^{p-1}) \end{aligned}$$

où $(A, B) \in \mathbb{R}_{p-1}[X]^2$.

En calculant le DL à l'ordre $p-1$ en 0 de $\phi \circ \phi^{-1}$, montrer que X^p divise $A(B(X)) - X$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On considère l'endomorphisme dérivation sur $\mathbb{R}_n[X]$ que l'on note D .

On notera -en particulier pour bien comprendre la question **25.b**) - la relation algébrique :

$$P_k \circ D = X^{k-1} \circ D = D^{k-1} \quad \text{donc} \quad \forall P \in \mathbb{R}[X], (P_k \circ D)(P) = P^{(k-1)}$$

25.a) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que

$$\forall a \in \mathbb{R}, P(a+1) = P(a) + \sum_{k=1}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!}$$

b) En déduire l'existence de $Q_1 \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $Q_1(D) = \delta$ (δ : endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ des parties **III** et **IV**).

26. En appliquant la question **24** à la fonction $\phi(x) = \ln(1+x)$ (on précisera alors soigneusement les valeurs choisies pour les différents objets mathématiques mis en jeu : $p, I, J, \dots$), montrer que

$$D = \delta - \frac{1}{2}\delta^2 + \frac{1}{3}\delta^3 - \dots + \frac{(-1)^n}{n}\delta^n$$

27.a) Établir l'existence de constantes $(c_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \mathbb{R}^n$ telles que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], P'(X) = - \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) P(X) + \sum_{k=1}^n c_k P(X+k)$$

On pourra utiliser la question **13**.

b) En déduire que $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.