

DEVOIR SURVEILLÉ N°9 CORRECTION

Sujet donné le mercredi 13 mai 2026, 3h.

DÉVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE DU RESTE DE SÉRIES CONVERGENTES

L'objet de ce problème est de donner une approximation de la somme des séries de Riemann convergentes

$S(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ où α est un réel strictement supérieur à 1. Pour cela, on étudie le reste :

$$R_n(\alpha) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}.$$

Dans la première partie, on donne une première approximation du reste. Cette méthode se généralisant mal, on utilise dans la deuxième partie une formule de Taylor pour obtenir simplement un développement asymptotique du reste. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle ne donne aucun contrôle de l'erreur. Dans la troisième partie, on retrouve à partir de la formule sommatoire d'Euler-Maclaurin le même développement asymptotique avec une expression de l'erreur assez satisfaisante. On a besoin dans cette partie d'une étude succincte des polynômes de Bernoulli.

Partie I - Étude préliminaire

1. Somme de Riemann

a) Soit $\alpha < 0$.

En exploitant une somme de Riemann (et non une série !), montrer que $\left(\frac{1}{n^{1-\alpha}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \right)_n$ admet une limite finie.

En déduire un équivalent de $(S_n(\alpha))_n$ (défini plus haut).

On démontrerait de la même façon que le résultat reste valable pour $\alpha \in [0, 1[$.

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{1}{n^{-\alpha+1}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^\alpha}$$

On reconnaît une somme de Riemann avec $f : x \mapsto \frac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha}$, $a = 0$, $b - a = 1$ donc $b = 1$.

Donc comme f est continue et intégrable :

$$(u_n) \rightarrow \int_0^1 x^{-\alpha} dx = \left[\frac{1}{-\alpha+1} x^{-\alpha+1} \right]_0^1 = \frac{1}{1-\alpha}$$

On a donc

$$S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{1-\alpha} n^{1-\alpha}.$$

Remarque :

Nous n'avons pas donné à étudier la situation pour $\alpha \in [0, 1[$ pour éviter une (fausse) division par 0.

En réalité, dans le cadre des intégrales impropres (seconde année) ou bien dans celui de l'intégrale de Kurzweil-Henstock, il n'y a pas vraiment de problème ici.

C'est pourquoi on peut admettre aisément le résultat : $\forall \alpha < 1, S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{1-\alpha} n^{1-\alpha}$.

Par exemple, avec $\alpha = -2$, on trouve $\sum_{k=1}^n k^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{3} n^3$. Par ailleurs, nous n'en n'avons pas besoin pour la suite.

b) Pour cette question, on considère f une fonction continue et décroissante sur $[0, 1]$.

On note alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $G_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ et $D_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$.

(i) Montrer que $(G_n(f))_n$ et $(D_n(f))_n$ sont convergentes. Quelle est leur limite (commune) ?

(ii) Plus précisément, montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \geq \int_0^1 f(t) dt \geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Un dessin peut aider, mais ne fait pas démonstration.

On exploitera l'égalité des accroissements finis à la primitive F sur chaque intervalle $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$.

(i) La fonction f est continue donc intégrable sur $[0, 1]$.

Il s'agit encore de somme de Riemann (i.e. somme de Cauchy à pas constant) la première est associée à la subdivision pointée $\sigma_n^g = \left(\left(\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right], \frac{k-1}{n} \right), k \in \llbracket 1, n \rrbracket \right)$ de $[0, 1]$ et la seconde à $\sigma_n^d = \left(\left(\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right], \frac{k}{n} \right), k \in \llbracket 1, n \rrbracket \right)$.

Ces sommes sont convergentes vers $\int_0^1 f(t) dt$.

(ii) Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Par décroissance de f sur $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$, pour tout $t_k \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$,

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k-1}{n}\right) \geq f(t_k) \left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\right) \geq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Ainsi, pour tout subdivision pointée σ_n de la forme $\left(\left(\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right], t_k \right), k \in \llbracket 1, n \rrbracket \right)$,

$$G_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k-1}{n}\right) \geq S(f, \sigma) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(t_k) \geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = D_n(f) \quad (\star)$$

Par ailleurs, f est continue et admet une primitive F , elle-même dérivable.

d'après l'égalité des accroissements finis, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe $c_k \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ tel que

$$\int_{(k-1)/n}^{k/n} f(t) dt = [F]_{(k-1)/n}^{k/n} = F\left(\frac{k}{n}\right) - F\left(\frac{k-1}{n}\right) = F'(c_k) \times \left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\right) = \frac{1}{n} f(c_k) \quad (\star\star)$$

Ainsi, en prenant la subdivision pointée $\sigma_n^c = \left(\left(\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right], c_k \right), k \in \llbracket 1, n \rrbracket \right)$ où chaque c_k est définie par $(\star\star)$, on trouve :

$$S(f, \sigma_n^c) = \sum_{k=1}^n f(c_k) \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt$$

Et donc par la généralité (que que soit la famille (t_k)) de $(\star)$:

$$G_n(f) \geq \int_0^1 f(t) dt \geq D_n(f).$$

c) On considère $\alpha > 1$.

(i) Rappeler (sans démonstration) la nature de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$.

Quelle est alors la limite de $(R_n(\alpha))$ (définie plus haut) ?

(ii) On note pour tout $(r, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $G_{r,n} = \sum_{k=rn}^{(r+1)n-1} \frac{1}{k^\alpha}$ et $D_{r,n} = \sum_{k=rn+1}^{(r+1)n} \frac{1}{k^\alpha}$.

En exploitant 1.b), montrer que : $\forall r, n \in \mathbb{N}^*$, $G_{r,n} \geq \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}} \left(\frac{1}{r^{\alpha-1}} - \frac{1}{(r+1)^{\alpha-1}} \right) \geq D_{r,n}$

(iii) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \geq \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \geq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$

(iv) Donner enfin un équivalent de $(R_n(\alpha))_n$.

(i) Il s'agit d'une série de Riemann

Elle est convergente (ici $\alpha > 1$). La suite des restes $(R_n(\alpha))_n$ converge donc vers 0.

(ii) Soit $r, n \in \mathbb{N}^*$. On pose $h = k - rn$ dans le calcul de somme

$$G_{r,n} = \sum_{k=rn}^{(r+1)n-1} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{h=0}^{n-1} \frac{1}{(h+rn)^\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha-1}} \times \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{n-1} \frac{1}{\left(r + \frac{h}{n}\right)^\alpha}$$

$$D_{r,n} = \sum_{k=rn+1}^{(r+1)n} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{h=1}^n \frac{1}{(h+rn)^\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha-1}} \times \frac{1}{n} \sum_{h=1}^n \frac{1}{\left(r + \frac{h}{n}\right)^\alpha}$$

En reprenant les notations de 1.b), notons $f : x \mapsto \frac{1}{(r+x)^\alpha}$ décroissante ($\alpha > 0$) et continue sur $[0, 1]$,

on trouve alors $G_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{n-1} \frac{1}{\left(r + \frac{h}{n}\right)^\alpha} = n^{\alpha-1} G_{r,n}$ et $D_n(f) = n^{\alpha-1} D_{r,n}$.

On peut alors appliquer la conclusion de la question précédente.

$$n^{\alpha-1} G_{r,n} \geq \int_0^1 \frac{1}{(r+x)^\alpha} dx \geq n^{\alpha-1} D_{r,n}$$

Or comme $F : x \mapsto \frac{-1}{(\alpha-1)(r+x)^{\alpha-1}}$ est primitive de f , on trouve

$$n^{\alpha-1} G_{r,n} \geq \frac{1}{(\alpha-1)} \left(\frac{1}{r^\alpha} - \frac{1}{(r+1)^{\alpha-1}} \right) \geq n^{\alpha-1} D_{r,n}$$

Et donc pour tout $r, n \in \mathbb{N}^*$, $G_{r,n} \geq \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}} \left(\frac{1}{r^{\alpha-1}} - \frac{1}{(r+1)^{\alpha-1}} \right) \geq D_{r,n}$.

(iii) Prenons $R \in \mathbb{N}^*$ et sommions ces inégalités pour $G_{r,n}$ et $D_{r,n}$ pour r de 1 à R .

On a alors une sommation par paquets (à gauche : $\llbracket n, (R+1)n - 1 \rrbracket = \bigcup_{r=1}^R \llbracket rn, (r+1)n - 1 \rrbracket$)

et télescopage centre :

$$\sum_{r=1}^R G_{r,n} = \sum_{k=n}^{(R+1)n-1} \frac{1}{k^\alpha} \geq \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}} \left(\frac{1}{1^{\alpha-1}} - \frac{1}{(R+1)^{\alpha-1}} \right) \geq \sum_{k=n+1}^{(R+1)n} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{r=1}^R D_{r,n}$$

Ces trois termes convergent pour $R \rightarrow +\infty$, les inégalités sont conservées :

$$\boxed{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \geq \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}} \geq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} .}$$

(iv) On a donc

$$R_n(\alpha) \geq \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}} \geq R_n(\alpha) - \frac{1}{n^\alpha}$$

Ou encore :

$$\frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^\alpha} \leq R_n(\alpha) \leq \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}} + \frac{1}{n^\alpha}$$

En divisant par $\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} > 0$:

$$1 \leq \frac{R_n(\alpha)}{\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}} \leq 1 + \frac{(\alpha-1)}{n}$$

Chacun des termes extrêmes convergent vers 1 (pour $n \rightarrow +\infty$), donc par encadrement le terme central converge vers 1 et donc

$$\boxed{R_n(\alpha) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}}$$

2. Première amélioration de l'étude asymptotique du reste

Dans la suite du problème, α est un réel strictement supérieur à 1.

a) Soit f_α la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_\alpha(x) = \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$.

En appliquant à f_α la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2, montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$f_\alpha(k+1) - f_\alpha(k) = \frac{1}{k^\alpha} - \frac{\alpha}{2} \frac{1}{k^{\alpha+1}} + A_k$$

où A_k est un réel vérifiant $0 \leq A_k \leq \frac{\alpha(\alpha+1)}{2k^{\alpha+2}}$.

On rappelle la formule de Taylor avec reste intégral pour une fonction g dérivable 3 fois sur $[a, b]$:

$$g(b) = g(a) + (b-a)g'(a) + \frac{(b-a)^2 g''(a)}{2} + \int_a^b \frac{(b-t)^2}{2} g^{(3)}(t) dt$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Appliquons cette formule pour $g \leftarrow f_\alpha$, dérivable trois fois, $a \leftarrow k$ et $b \leftarrow k+1$ donc $b-a = 1$.

Puisque $f'_\alpha(x) : x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$, $f''_\alpha(x) = \frac{-\alpha}{x^{\alpha+1}}$ et $f^{(3)}_\alpha : x \mapsto \frac{\alpha(\alpha+1)}{x^{\alpha+2}}$,

$$f_\alpha(k+1) = f_\alpha(x) + f'_\alpha(k) + \frac{1}{2} f''_\alpha(x) + \underbrace{\int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)^2 \alpha(\alpha+1)}{2t^{\alpha+2}} dt}_{:=A_k}$$

L'intégrand étant positif pour tout $t \in [k, k+1]$, on a

$$0 \leq A_k \leq \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} \int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)^2}{t^{\alpha+2}} dt$$

Puis comme $f_{\alpha+2}$ est décroissante sur $[k, k+1]$; pour tout $t \in [k, k+1]$, $\frac{1}{t^{\alpha+2}} \leq \frac{1}{k^{\alpha+2}}$
et donc en posant $u = k+1-t$

$$0 \leq A_k \leq \frac{\alpha(\alpha+1)}{2k^{\alpha+2}} \int_k^{k+1} (k+1-t)^2 dt = \frac{\alpha(\alpha+1)}{2k^{\alpha+2}} \int_0^1 u^2 du = \frac{\alpha(\alpha+1)}{6k^{\alpha+2}} \leq \frac{\alpha(\alpha+1)}{2k^{\alpha+2}}$$

Ainsi pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f_\alpha(k+1) - f_\alpha(k) = \frac{1}{k^\alpha} - \frac{\alpha}{2} \frac{1}{k^{\alpha+1}} + A_k$ avec $0 \leq A_k \leq \frac{\alpha(\alpha+1)}{2k^{\alpha+2}}$.

b) En déduire que :

$$R_n(\alpha) = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + \frac{1}{2n^\alpha} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$$

On somme alors pour k de n à N (pour commencer). On a un télescopage

$$f_\alpha(N+1) - f_\alpha(n) = \sum_{k=n}^N \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{\alpha}{2} \frac{1}{k^{\alpha+1}} + A_k \right)$$

$$\sum_{k=n}^N \frac{1}{k^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}} + \frac{\alpha}{2} \sum_{k=n}^N \frac{1}{k^{\alpha+1}} - \sum_{k=n}^N A_k$$

Et donc par l'encadrement des A_k

$$\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}} + \frac{\alpha}{2} \sum_{k=n}^N \frac{1}{k^{\alpha+1}} \leq \sum_{k=n}^N \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}} + \frac{\alpha}{2} \sum_{k=n}^N \frac{1}{k^{\alpha+1}} - \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} \sum_{k=n}^N \frac{1}{k^{\alpha+2}}$$

Tous ces termes convergent pour $N \rightarrow +\infty$. Les inégalités sont invariantes :

$$\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} - 0 + \frac{\alpha}{2} R_n(\alpha+1) \leq R_n(\alpha) \leq \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} - 0 + \frac{\alpha}{2} R_n(\alpha+1) + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} R_n(\alpha+2)$$

Or d'après la question 1.c) $R_n(\alpha+1) \sim \frac{1}{\alpha n^\alpha}$ i.e. $\frac{\alpha}{2} R_n(\alpha+1) = \frac{1}{2n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$

$$\text{et } \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} R_n(\alpha+2) = \frac{\alpha}{2n^{\alpha+1}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right) = O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right).$$

Puis comme $o\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right) = O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$ et $0 = O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$, par encadrement :

$$R_n(\alpha) = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + \frac{1}{2n^\alpha} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right).$$

On pourrait répéter le procédé pour obtenir un développement asymptotique plus précis de $R_n(\alpha)$, mais la partie suivante va nous donner une méthode plus rapide.

Partie II - Formule de Taylor et nombres de Bernoulli

3. Nombres de Bernoulli

a) Montrer qu'il existe une suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ayant la propriété suivante : pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, pour tout intervalle non réduit à un point I et pour toute fonction complexe f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I , la fonction g définie par : $g = a_0 f + a_1 f' + \dots + a_{p-1} f^{(p-1)}$ vérifie :

$$g' + \frac{1}{2!} g'' + \frac{1}{3!} g^{(3)} + \dots + \frac{1}{p!} g^{(p)} = f' + \sum_{\ell=1}^{p-1} b_{\ell,p} f^{(p+\ell)}$$

où les $b_{\ell,p}$ sont des coefficients indépendants de f que l'on ne cherchera pas à calculer.

On pourra montrer que $(a_0, \dots, a_{p-1})$ est solution d'un système linéaire (S_p) triangulaire tel que $(S_p) \subset (S_{p+1})$.

Fixons un entier $p \in \mathbb{N}^*$. Nous allons montrer l'existence des nombres $a_0, \dots, a_{p-1}$ sous la condition recherchée.

Puis nous allons montrer qu'en passant à $p+1$, ce qui donne a priori $p+1$ nouveaux nombres : $a'_0, \dots, a'_{p-1}, a'_p$, on conserve les mêmes p premiers nombres ($a_i = a'_i$, pour $i \leq p-1$).

Au brouillon :

Si de tels nombres existent, on aurait :

$$\begin{cases} g &= a_0 f + a_1 f' + a_2 f'' + \dots + a_{p-1} f^{(p-1)} \\ g' &= a_0 f' + a_1 f'' + \dots + a_{p-2} f^{(p-2)} + a_{p-1} f^{(p-1)} \\ g'' &= a_0 f'' + \dots + a_{p-3} f^{(p-1)} + a_{p-2} f^{(p)} + a_{p-1} f^{(p+1)} \\ \vdots & \\ g^{(p-1)} &= a_0 f^{(p-1)} + \dots \end{cases}$$

Et donc

$$g' + \frac{1}{2!} g'' + \frac{1}{3!} g^{(3)} + \dots + \frac{1}{p!} g^{(p)} = a_0 f' + \left(\frac{1}{2} a_0 + a_1\right) f'' + \left(\frac{1}{6} a_0 + \frac{1}{2} a_1 + a_2\right) f''' + \dots + \left(\frac{1}{p!} a_0 + \dots + \frac{1}{1!} a_{p-1}\right) f^{(p)} + \dots$$

Il peut y avoir plusieurs solutions, selon les valeurs de f , mais assurément, si

$$\begin{cases} a_0 &= 1 \\ a_1 + \frac{1}{2!} a_0 &= 0 \\ a_2 + \frac{1}{2!} a_1 + \frac{1}{3!} a_0 &= 0 \\ \vdots & \\ a_{p-1} + \dots + \frac{1}{(p-2)!} a_2 + \frac{1}{(p-1)!} a_1 + \frac{1}{p!} a_0 &= 0 \end{cases}$$

il y a une solution, indépendante de f .

FIN DU BROUILLON

Notons, alors (S_p) le système linéaire dont les inconnues sont $(a_0, a_1, \dots, a_{p-1})$, la première équation est

$$a_0 = 1 \text{ et la } k\text{-ième équation } (k \in \llbracket 2, p \rrbracket) \text{ est } \sum_{i=1}^k \frac{1}{i!} a_{k-i} = 0.$$

Alors le système (S_p) est linéaire. Il est inversible : si on inverse $(k \leftrightarrow p-1-k)$ les équations on a un système triangulaire supérieure avec que des 1 sur la diagonale.

Donc (S_p) admet bien une (unique) solution.

Enfin, les équations de (S_p) sont incluses dans celles de (S_{p+1}) donc les p premiers termes solutions de (S_{p+1}) sont les les mêmes que ceux de (S_p) .

Enfin en considérons $(a_0, \dots, a_{p-1})$ solutions de (S_p) montrons qu'on a bien la formule recherchée :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p \frac{1}{i!} g^{(i)} &= \sum_{i=1}^p \frac{1}{i!} \left(\sum_{j=0}^{p-1} a_j f^{(j)} \right)^{(i)} = \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{p-1} \frac{a_j}{(i+1)!} f^{(j+i+1)} \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} \left(\sum_{h=i}^{p+i-1} \frac{a_{h-i}}{(i+1)!} f^{(h+1)} \right) \quad \underline{h} = \underline{i} + \underline{j} \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} \left(\sum_{h=i}^{p-1} \frac{a_{h-i}}{(i+1)!} f^{(h+1)} + \sum_{h=p}^{p+i-1} \frac{a_{h-i}}{(i+1)!} f^{(h+1)} \right) \\ &= \sum_{0 \leq i \leq h \leq p-1} \frac{a_{h-i}}{(i+1)!} f^{(h+1)} + \sum_{h=p}^{2p-2} B_{h,p} f^{(h+1)} \quad B_{h,p} = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{a_{h-i}}{(i+1)!} [h \leq p+i-1] \\ &= \sum_{h=0}^{p-1} \left(\sum_{i=0}^h \frac{1}{(i+1)!} a_{h-i} \right) f^{(h+1)} + \sum_{\ell=1}^{p-1} B_{\ell+p-1,p} f^{(p+\ell)} \quad \ell = h - p + 1 \end{aligned}$$

Pour $h = 0$, $\sum_{i=0}^h \frac{1}{(i+1)!} a_{h-i} = \frac{1}{1!} a_0 = 1$ (première équation de (S_p)),

et pour $h \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, $\sum_{i=0}^h \frac{1}{(i+1)!} a_{h-i} = \sum_{i=1}^{h+1} \frac{1}{i!} a_{h+1-i} = 0$ ($h+1$ -ième équation de (S_p)).

Ainsi, $\sum_{i=1}^p \frac{1}{i!} g^{(i)} = 1f' + 0f'' + \dots + 0f^{(p)} + \sum_{\ell=1}^{p-1} b_{\ell,p} f^{(p+\ell)}$.

Et ainsi, indépendamment de f et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $g' + \frac{1}{2!}g'' + \frac{1}{3!}g^{(3)} + \dots + \frac{1}{p!}g^{(p)} = f' + \sum_{\ell=1}^{p-1} b_{\ell,p} f^{(p+\ell)}$

b) Montrer que $a_0 = 1$ et que pour tout $p \geq 1$, $a_p = -\sum_{i=2}^{p+1} \frac{a_{p+1-i}}{i!}$.

En déduire que $|a_p| \leq 1$ pour tout entier naturel p . Déterminer a_1 et a_2 .

Dans le système (S_p) on a pour première équation $a_0 = 1$ et pour tout $h \in \llbracket 2, p-1 \rrbracket$,

$$\sum_{i=1}^h \frac{1}{i!} a_{h-i} = 0 \implies a_{h-1} = -\sum_{i=2}^h \frac{1}{i!} a_{h-i}$$

car $1! = 0$.

Ainsi $a_0 = 1$ et que pour tout $p (= h-1) \geq 1$, $a_p = \sum_{i=2}^{p+1} \frac{a_{p+1-i}}{i!}$.

On trouve alors

$$a_1 = -\frac{a_0}{2} = -\frac{1}{2} \quad (p=1)$$

$$a_2 = -\frac{a_1}{2} + \frac{a_0}{6} = +\frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12} \quad (p=2)$$

Enfin, notons, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_p : \ll |a_p| \leq 1$.

— $\mathcal{P}_0$ est vraie.

— Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_0, \dots, \mathcal{P}_p$ sont vraies. On a $p+1 \geq 1$, donc

$$|a_{p+1}| = \left| -\sum_{i=2}^{p+2} \frac{a_{p+2-i}}{i!} \right| \leq \sum_{i=2}^{p+2} \frac{|a_{p+2-i}|}{i!} \leq \sum_{i=2}^{p+2} \frac{1}{i!} \leq \sum_{i=2}^{+\infty} \frac{1}{i!} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} = e - 2 \approx 0,72 \leq 1$$

Donc $\mathcal{P}_{p+1}$ est vraie.

Ainsi, par récurrence (forte) : pour tout $p \in \mathbb{N}$, $|a_p| \leq 1$.

On a trouvé $a_0 = 1$, $a_1 = -\frac{1}{2}$ et $a_2 = \frac{1}{12}$.

c) Pour tout $z \in]-1, 1[$, justifier que la série $\sum_{p \geq 0} a_p z^p$ est (absolument) convergente.

On fixe $z \in]-1, 1[$.

$$p^2 |a_p z^p| \leq p^2 |z|^p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$$

Donc $|a_p z^p| = o\left(\frac{1}{p^2}\right)$. Or la série $\sum \frac{1}{p^2}$ converge, donc par comparaison de série à termes positifs :

$$\sum |a_p z^p| \text{ converge, ainsi la s\u00e9rie } \sum_{p \geq 0} a_p z^p \text{ converge absolument donc converge.}$$

On note pour tout $z \in]-1, 1[$, $\varphi(z)$ sa somme : $\varphi(z) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p z^p$.

d) On fixe $z \in]-1, 1[$.

On note pour tout $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, $u_{p,q} = \frac{a_p}{q!} z^{p+q}$. Montrer que la famille $(|u_{p,q}|)_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}$ est sommable

Puisqu'on prend des valeurs absolues, $(|u_{p,q}|)$ est une famille \u00e0 termes positifs.

Pour montrer qu'elle est sommable, il suffit de montrer que la somme de ces termes calcul\u00e9e de fa\u00e7on arbitraire est born\u00e9e.

$$\forall q \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{p=0}^P |u_{p,q}| = \frac{|z|^q}{q!} \sum_{p=0}^P |a_p| |z|^p \leq \frac{|z|^q}{q!} \sum_{p=0}^P |z|^p \leq \frac{|z|^q}{q!} \frac{1}{1-|z|}$$

Ainsi, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, la s\u00e9rie (\u00e0 termes positifs) $\sum_{p \geq 0} |u_{p,q}|$ converge.

$$\sum_{q=1}^Q \sum_{p=0}^{+\infty} |u_{p,q}| \leq \frac{1}{1-|z|} \sum_{q=1}^Q \frac{|z|^q}{q!} \leq \frac{e^{|z|} - 1}{1-|z|}$$

Donc d'apr\u00e8s le th\u00e9or\u00e8me de Fubini,

$$\text{la famille } (|u_{p,q}|)_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*} \text{ est sommable.}$$

e) On admet qu'on peut alors \u00e9crire :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{q=1}^{+\infty} u_{p,q} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{p+q=n} u_{p,q} [q \neq 0] \right)$$

En d\u00e9duire que pour tout $z \in]-1, 0[\cup]0, 1[$, $\varphi(z) = \frac{z}{e^z - 1}$. On admettra que le r\u00e9sultat est « vraie » en $z = 0$.

On a donc, pour tout $z \in]-1, 1[$,

$$\begin{aligned} \varphi(z) \times (e^z - 1) &= \sum_{p=0}^{+\infty} a_p z^p \times \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{z^q}{q!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{q=1}^{+\infty} u_{p,q} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{p+q=n} u_{p,q} [q \neq 0] \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{q=1}^n u_{n-q,q} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{q=1}^n \frac{a_{n-q}}{q!} \right) z^n \end{aligned}$$

Or pour $n = 1$, $\sum_{q=1}^n \frac{a_{n-q}}{q!} = \frac{a_0}{1!} = a_0 = 1$.

et pour $n \geq 2$, $\sum_{q=1}^n \frac{a_{n-q}}{q!} = a_{n-1} + \sum_{q=2}^n \frac{a_{n-q}}{q!} = 0$ d'apr\u00e8s la formule trouv\u00e9e en 3.b) pour $p = n - 1$.

Ainsi

$$\varphi(z) \times (e^z - 1) = z + 0$$

$$\text{Et donc, si } z \neq 0, \text{ en divisant par } e^z - 1 \neq 0, \text{ on trouve } \varphi(z) = \frac{z}{e^z - 1}.$$

Pour $z = 0$, on a un prolongement par continuité, puisque $\frac{z}{e^z - 1} \underset{z \rightarrow 0}{\sim} \frac{z}{z} = 1$ alors que $\varphi(0) = a_0 + 0 + \dots = a_0 = 1$.

f) Montrer que la fonction $\theta : z \mapsto \varphi(z) - a_1 z$ est une fonction paire.
En déduire que $a_{2k+1} = 0$ pour tout entier $k \geq 1$. Calculer a_4 .

D'après l'expression précédemment trouvée pour $\varphi(z)$, on a pour tout $z \in]-1, 1[$,

$$\theta(z) = \varphi(z) - \frac{-1}{2}z = \frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = \frac{(2 + e^z - 1)z}{2(e^z - 1)} = \frac{e^z + 1}{e^z - 1} \frac{z}{2}$$

On a alors, en multipliant par e^z au numérateur et au dénominateur :

$$\theta(-z) = \frac{e^{-z} + 1}{e^{-z} - 1} \frac{-z}{2} = \frac{1 + e^z}{1 - e^z} \frac{-z}{2} = \frac{1 + e^z}{-1 + e^z} \frac{z}{2} = \theta(z)$$

Ainsi θ est paire sur $] -1, 1[$.

Pour tout $n \geq 2$, la fonction θ admet un DL en 0 égale à $a_0 + \sum_{p=2}^n a_p z^p + o(z^n)$,

$$\text{car } \frac{\theta(z) - a_0 + \sum_{p=2}^n a_p z^p}{z^n} = z \times \left(\sum_{p=n+1}^{+\infty} a_p z^{p-n-1} \right) \underset{z \rightarrow 0}{\longrightarrow} 0.$$

Or θ est paire, donc les coefficients impairs de son DL sont nuls. Donc

$a_{2k+1} = 0$ pour tout entier $k \geq 1$ (car vraie pour tout $n \geq 2$).

On a donc $a_3 = a_{2 \times 1 + 1} = 0$, puis

$$a_4 = -\frac{a_3}{2!} - \frac{a_2}{3!} - \frac{a_1}{4!} - \frac{a_0}{5!} = 0 - \frac{1}{12 \times 6} + \frac{1}{2 \times 24} - \frac{1}{120} = \frac{-10 + 15 - 6}{720} = \frac{-1}{720}$$

$a_3 = 0$ et $a_4 = -\frac{1}{720}$.

Les nombres $b_n = n!a_n$ sont appelés nombres de Bernoulli.

4. Formule de Taylor

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$, où α est un réel strictement supérieur à 1.

Dans cette question 4, on fixe un entier naturel non nul p et on note :

$$g = a_0 f + a_1 f' + \dots + a_{2p-1} f^{(2p-1)}.$$

avec les nombres a_i définis à la question précédente.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $R(k) = g(k+1) - g(k) - f'(k)$ de sorte que :

$$g(k+1) - g(k) = f'(k) + R(k).$$

a) En appliquant à g la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $2p$, montrer que

$$R(k) = \int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)^{2p}}{(2p)!} g^{(2p+1)}(t) dt + \sum_{\ell=1}^{2p-1} b_{\ell,2p} f^{(2p+\ell)}(k)$$

f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

g étant elle-même une combinaison linéaire de dérivées de f , elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $2p$ appliquée à g , $a \leftarrow k$ et $b \leftarrow k+1$ donc $b-a=1$:

$$g(k+1) = g(k) + \sum_{i=1}^{2p} \frac{g^{(i)}(k)}{i!} + \int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)^{2p}}{(2p)!} g^{(2p+1)}(t) dt$$

Or le choix des nombres (a_i) permet d'obtenir :

$$\sum_{i=1}^{2p} \frac{g^{(i)}(k)}{i!} = f' + \sum_{\ell=1}^{2p-1} b_{\ell,2p} f^{(2p+\ell)}$$

Et donc en appliquant cette relation en k :

$$R(k) = g(k+1) - g(k) - f'(k) = \sum_{i=1}^{2p} \frac{g^{(i)}(k)}{i!} + \int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)^{2p}}{(2p)!} g^{(2p+1)}(t) dt - \sum_{i=1}^{2p} \frac{g^{(i)}(k)}{i!} + \sum_{\ell=1}^{2p-1} b_{\ell,2p} f^{(2p+\ell)}(k)$$

$$R(k) = \int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)^{2p}}{(2p)!} g^{(2p+1)}(t) dt + \sum_{\ell=1}^{2p-1} b_{\ell,2p} f^{(2p+\ell)}(k)$$

b) Pour tout $s \in \mathbb{N}^*$, donner une expression de $f^{(s+1)}(x)$ pour $x > 0$.

Puisque $f : x \mapsto \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.

On a alors, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{-(\alpha-1)}{(1-\alpha)x^\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}$. Cherchons une expression explicite de $f^{(s+1)}$, pour $s \geq 1$.

Posons, pour tout $s \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_s : \ll \text{Pour tout } x > 0, f^{(s+1)}(x) = \frac{(-1)^s (\alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+s-1))}{x^{\alpha+s}} \gg$

— $\forall x > 0$, $f^{(s+1)}(x) = f''(x) = \frac{-\alpha}{x^{\alpha+1}}$, donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

— Soit $s \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}_s$ est vraie. Alors pour tout $x > 0$,

$$f^{(s+2)}(x) = f^{(s+1)'}(x) = (-1)^s (\alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+s-1)) \times \frac{-(\alpha+s)}{x^{\alpha+s+1}} = \frac{(-1)^{s+1} \alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+s-1)(\alpha+s)}{x^{\alpha+(s+1)}}$$

Donc $\mathcal{P}_{s+1}$ est vraie.

Ainsi pour tout $x > 0$, pour tout $s \in \mathbb{N}^*$, $f^{(s+1)}(x) = \frac{(-1)^s(\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+s-1))}{x^{\alpha+s}} = \frac{(-1)^s \prod_{k=0}^{s-1}(\alpha+k)}{x^{\alpha+s}}$.

c) En déduire l'existence d'un réel A tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $|R(k)| \leq Ak^{-(2p+\alpha)}$.

On exploite les deux réponses précédentes.

D'abord la majoration de la somme (en exploitant $2p + \ell > 1$)

$$\left| \sum_{\ell=1}^{2p-1} b_{\ell,2p} f^{(2p+\ell)}(k) \right| \leq \sum_{\ell=1}^{2p-1} |b_{\ell,2p}| \left(\prod_{j=0}^{2p+\ell-2} |\alpha+j| \right) k^{-\alpha-(2p+\ell-1)}$$

$$\left| \sum_{\ell=1}^{2p-1} b_{\ell,2p} f^{(2p+\ell)}(k) \right| \leq k^{-(\alpha+2p)} \underbrace{\sum_{\ell=1}^{2p-1} |b_{\ell,2p}| \left(\prod_{j=0}^{2p+\ell-2} |\alpha+j| \right)}_{:=M_2} \times 1$$

où M_2 est bien indépendant de k . On a exploité : $k^{-\ell+1} = \frac{1}{k^{\ell-1}} \leq \frac{1}{1^{\ell-1}} = 1$.

Ensuite pour la majoration de l'intégrale

$$\left| \int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)^{2p}}{(2p)!} g^{(2p+1)}(t) dt \right| \leq \int_k^{k+1} \frac{|(k+1-t)|^{2p}}{(2p)!} |g^{(2p+1)}(t)| dt \leq \frac{1}{(2p)!} \int_k^{k+1} |g^{(2p+1)}(t)| dt$$

car $t \in [k, k+1]$, donc $0 \leq k+1-t \leq 1$.

Ensuite, on a $g^{(2p+1)} = \left(\sum_{i=0}^{2p-1} a_i f^{(i)} \right)^{(2p+1)} = \sum_{i=0}^{2p-1} a_i f^{(i+2p+1)}$.

Donc pour tout $t \in [k, k+1]$, (avec $t > k$)

$$|g^{(2p+1)}(t)| \leq \sum_{i=0}^{2p-1} |a_i| \left(\prod_{j=0}^{2p+i-1} |\alpha+j| \right) k^{-\alpha-i-2p} \leq k^{-(\alpha+2p)} \underbrace{\sum_{i=0}^{2p-1} |a_i| \left(\prod_{j=0}^{2p+i-1} |\alpha+j| \right)}_{:=M_1} 1^{-i}$$

car $k \geq 1$. M_1 est bien indépendant de k .

Enfin, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, par inégalité triangulaire :

$$|R(k)| \leq \left| \int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)^{2p}}{(2p)!} g^{(2p+1)}(t) dt \right| + \left| \sum_{\ell=1}^{2p-1} b_{\ell,2p} f^{(2p+\ell)}(k) \right| \leq \left(\frac{M_1}{(2p)!} \int_k^{k+1} dt \right) k^{-\alpha+2p} + M_2 k^{-(\alpha+2p)}$$

Avec $A = \frac{M_1}{(2p)!} + M_2$, indépendante de k , on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $|R(k)| \leq Ak^{-(\alpha+2p)}$.

d) En déduire le développement asymptotique du reste :

$$R_n(\alpha) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = - \left(a_0 f(n) + a_1 f'(n) + a_2 f''(n) + \cdots + a_{2p-2} f^{(2p-2)}(n) \right) + O \left(\frac{1}{n^{2p+\alpha-1}} \right)$$

On obtient ainsi une valeur approchée de $S(\alpha)$ donnée par :

$$\tilde{S}_{n,2p-2}(\alpha) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha} - \left(a_0 f(n) + a_1 f'(n) + a_2 f''(n) + \cdots + a_{2p-2} f^{(2p-2)}(n) \right)$$

On a donc avec le calcul de f' vue plus haut et la définition de $R_n(\alpha)$: $R_n(\alpha) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=n}^{+\infty} f'(k)$.

Or pour tout $N \geq n$: $\sum_{k=n}^N f'(k) = \sum_{k=n}^N (g(k+1) - g(k) - R(k)) = g(N+1) - g(n) - \sum_{k=n}^N R(k)$.

Puis $g(N+1) = \sum_{i=0}^{p-1} a_i f^{(i)}(N+1) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$ par addition des limites, compte-tenu de la définition de f .

A la question précédente, on a vu que $|R(k)| \leq Ak^{-\alpha-2p}$, donc

$$\left| \sum_{k=n}^N R(k) \right| \leq \sum_{k=n}^N |R(k)| \leq A \sum_{k=n}^N k^{(-\alpha-2p)} \leq AR_n(\alpha+2p) = O\left(\frac{1}{n^{\alpha+2p-1}}\right)$$

d'après la première partie.

On peut donc faire tendre N vers $+\infty$ et majorer la différence (on a reconnu $-g(n)$) :

$$R_n(\alpha) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = -\left(a_0 f(n) + a_1 f'(n) + a_2 f''(n) + \cdots + a_{2p-2} f^{(2p-2)}(n)\right) + O\left(\frac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\right)$$

e) Donner le développement asymptotique de $R_n(3)$ correspondant au cas $\alpha = 3$ et $p = 3$.

Comme $p = 3$, il faudra faire le développement jusqu'à l'indice $2p - 2 = 4$.

On a donc l'approximation :

$$R_n(3) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \approx -\left(a_0 f(n) + a_1 f'(n) + a_2 f''(n) + a_3 f^{(3)}(n) + a_4 f^{(4)}(n)\right)$$

Or $a_0 = 1$, $a_1 = -\frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{12}$, $a_3 = 0$ et $a_4 = \frac{1}{720}$.

Et $f(x) = \frac{1}{-2x^2} = \frac{-1}{2x^2}$, donc $f(n) = \frac{-1}{2n^2}$, $f'(n) = \frac{1}{n^3}$, $f''(n) = \frac{-3}{n^4}$ et $f^{(4)}(n) = \frac{-60}{n^6}$.

$$R_n(3) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3} = \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^3} + \frac{1}{4n^4} + \frac{1}{12n^6} + O\left(\frac{1}{n^8}\right)$$

Partie III - Polynômes de Bernoulli et formule sommatoire d'Euler-Maclaurin

On peut calculer, pour $n = 100$: $\tilde{S}_{100,4}(3) = 1,202056903159594277\dots$

tandis que $S(3)$ vaut $1,202056903159594285\dots$ (constante d'Apéry).

La méthode de la partie II semble satisfaisante, mais ne fournit pas d'information précise sur le terme $O\left(\frac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\right)$. C'est pourquoi on introduit dans cette partie les polynômes de Bernoulli et la formule sommatoire d'Euler-Maclaurin.

5. Polynômes de Bernoulli

On définit une suite de polynômes $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} = (A_n(X))_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant les conditions suivantes :

$$A_0 = 1, A'_{n+1} = A_n \text{ et } \int_0^1 A_{n+1}(t) dt = 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \quad (1)$$

Les polynômes $B_n = n!A_n$ sont appelés polynômes de Bernoulli.

a) Montrer que la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est déterminée de façon unique par les conditions (1); préciser le degré de A_n ; calculer A_1 , A_2 et A_3 .

A_0 est connu précisément, il existe manière unique.

Montrons que si A_n existe et est connu précisément, de manière unique, il en est de même de A_{n+1} .

Ainsi, par récurrence, la famille des polynômes (A_n) sera parfaitement déterminée.

On peut supposer que $A_n = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ avec $d = \deg A_n$.

Puisque $A'_{n+1} = A_n$, alors il existe une constante γ_n tel que $A_{n+1} = \gamma_n + \sum_{k=0}^d \frac{a_k}{k+1} X^{k+1}$.

Donc A_{n+1} est bien un polynôme (à ce stade, non unique), de degré $d+1 = \deg A_n + 1$ car $a_d \neq 0$.
Mais par ailleurs, par linéarité :

$$0 = \int_0^1 A_{n+1}(t) dt = \gamma_n + \int_0^1 \sum_{k=0}^d \frac{a_k}{k+1} t^{k+1} dt$$

Donc $\gamma_n = - \sum_{k=0}^d \frac{a_k}{(k+1)(k+2)}$, déterminé de manière unique.

La suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est déterminée (existence) de façon unique par les conditions (1).

Si on note $d_n = \deg(A_n)$, on a $d_0 = \deg A_0 = 0$ et on a vu que $d_{n+1} = d_n + 1$.

Donc (d_n) est une suite arithmétique de raison 1.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg A_n = n$.

On trouve enfin :

$$\begin{aligned} - A_1 &= X - \frac{a_0}{2} = X - \frac{1}{2} \\ - A_2 &= \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + \gamma_2 \text{ avec } \gamma_2 = -\frac{1}{2 \times 3} - \frac{-1}{2 \times 2} = \frac{1}{12} \\ - A_3 &= \frac{1}{6}X^3 - \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{12}X + \gamma_3 \text{ avec } \gamma_3 = -\frac{1}{6 \times 4} + \frac{1}{4 \times 3} - \frac{1}{12 \times 2} = \frac{-1+2-1}{24} = 0 \end{aligned}$$

$$A_1 = X - \frac{1}{2}, A_2 = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{12} \text{ et } A_3 = \frac{1}{6}X^3 - \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{12}X.$$

b) Montrer que $A_n(t) = (-1)^n A_n(1-t)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$.

Il s'agit de composition et non de produit... On exploitera l'unicité de (A_n) .

Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n = (-1)^n A_n \circ (1-X)$. Par composition B_n est bien un polynôme.

Par ailleurs, $B_0 = (-1)^0 A_0(1-X) = 1 = A_0$. Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par dérivation de polynômes composées :

$$B'_{n+1} = ((-1)^{n+1} A_{n+1}(1-X))' = (-1)^n \times (1-X)' \times A'_{n+1} \circ (1-X) = (-1)^{n+1} \times (-1) A'_{n+1}(1-X) = (-1)^n A_n(1-X) = B_n$$

et en faisant le changement de variable : $u = 1-t$:

$$\int_0^1 B_{n+1}(f) dt = (-1)^{n+1} \int_0^1 A_{n+1}(1-t) dt = (-1)^{n+1} \int_1^0 A_{n+1}(u)(-du) = (-1)^{n+1} \int_0^1 A_{n+1}(u) du = 0$$

Donc la suite B_n vérifie exactement les conditions (1), par unicité : $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_n = A_n$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = (-1)^n A_n \circ (1-X)$.

c) Pour tout entier $n \geq 2$, montrer que $A_n(0) = A_n(1)$ et que $A_{2n-1}(0) = 0$.

Soit $n \geq 2$, on a donc $A'_n = A_{n-1}$, donc A_n est une primitive de A_{n-1} .
Ainsi (puisque $n - 1 \geq 1$) :

$$0 = \int_0^1 A_{n-1} = A_n(1) - A_n(0)$$

Donc pour $n \geq 2$, $A_n(0) = A_n(1)$.

En particulier en $t = 0$: $A_{2n-1}(0) = (-1)^{2n-1} A_{2n-1}(1) = -A_{2n-1}(0)$ (car $2n - 1 \geq 2$ car $n \geq 1, 5$), donc $2A_{2n-1}(0) = 0$.

Donc pour tout $n \geq 2$, $A_{2n-1}(0) = 0$.

d) On pose provisoirement $c_n = A_n(0)$ pour tout entier naturel n . Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n(X) = c_0 \frac{X^n}{n!} + \cdots + c_{n-2} \frac{X^2}{2!} + c_{n-1}X + c_n$$

puis que, si $n \geq 1$, $\frac{c_0}{(n+1)!} + \cdots + \frac{c_{n-2}}{3!} + \frac{c_{n-1}}{2!} + c_n = 0$

On va démontrer le résultat par récurrence (on pourrait également exploiter la méthode de l'unicité comme pour la question (b).)

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}_n : \ll A_n(X) = c_0 \frac{X^n}{n!} + \cdots + c_{n-2} \frac{X^2}{2!} + c_{n-1}X + c_n \gg$.

— $A_0 = 1 = A_0(0) = c_0$ donc $\mathcal{H}_0$.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{H}_n$ est vraie.

Alors A_{n+1} est une primitive de $A_n = c_0 \frac{X^n}{n!} + \cdots + c_{n-2} \frac{X^2}{2!} + c_{n-1}X + c_n$.

Donc il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $A_{n+1} = c_0 \frac{X^{n+1}}{(n+1)!} + \cdots + c_{n-2} \frac{X^3}{3!} + c_{n-1} \frac{X^2}{2!} + c_n X + \gamma$.

Mais $\gamma = A_{n+1}(0) = c_{n+1}$.

Ainsi $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

On a donc montré, par récurrence, que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $A_n = c_0 \frac{X^n}{n!} + \cdots + c_{n-2} \frac{X^2}{2!} + c_{n-1}X + c_n$.

Soit $n \geq 1$, on a vu que $A_{n+1}(1) = A_{n+1}(0)$, d'après la question précédente, donc

$$c_0 \frac{1^{n+1}}{(n+1)!} + \cdots + c_{n-2} \frac{1^3}{3!} + c_{n-1} \frac{1^2}{2!} + c_n 1 + c_{n+1} = c_{n+1}$$

Ainsi

Pour tout $n \geq 1$, $\frac{c_0}{(n+1)!} + \cdots + \frac{c_{n-2}}{3!} + \frac{c_{n-1}}{2!} + c_n = 0$.

e) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a en fait $c_n = a_n$.

On sait que la suite (a_n) était uniquement définie par

la donnée $a_0 = 1$ et la relation $\forall p \geq 1$, $a_p = - \sum_{i=2}^{p+1} \frac{a_{p+1-i}}{i!}$. (question 3.(b)).

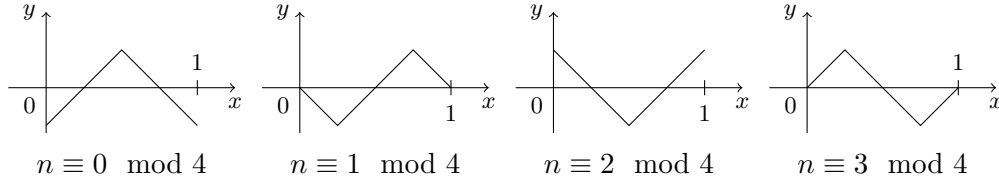
Or ici $c_0 = A_0(0) = 1$ et on vient de démontrer que pour tout $n \geq 1$ (en posant $p = n + 1 - i$) :

$$c_n = - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{c_i}{(n+1-i)!} = - \sum_{p=2}^{n+1} \frac{c_{n+1-p}}{p!}$$

C'est la même relation de récurrence et initialisation.

6. Variations des polynômes de Bernoulli

- On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2^{n-1}} - 1\right) a_n$.
- On admet également que, pour tout entier naturel $n \geq 2$, les variations des polynômes A_n sur $[0, 1]$ correspondent schématiquement aux quatre cas ci-dessous :



En d'autres termes, pour $n \geq 2$, on a :

- Si $n \equiv 2 \pmod{4}$, alors $A_n(0) = A_n(1) > 0 > A_n(\frac{1}{2})$; de plus la fonction A_n est strictement décroissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ et strictement croissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$.
- Si $n \equiv 0 \pmod{4}$, alors $A_n(0) = A_n(1) < 0 < A_n(\frac{1}{2})$; de plus la fonction A_n est strictement croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ et strictement décroissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$.
- Si $n \equiv 1 \pmod{4}$, alors $A_n(0) = A_n(\frac{1}{2}) = A_n(1) = 0$; de plus $A_n < 0$ sur $]0, \frac{1}{2}[$ et $A_n > 0$ sur $]\frac{1}{2}, 1[$.
- Si $n \equiv 3 \pmod{4}$, alors $A_n(0) = A_n(\frac{1}{2}) = A_n(1) = 0$; de plus $A_n > 0$ sur $]0, \frac{1}{2}[$ et $A_n < 0$ sur $]\frac{1}{2}, 1[$.

Montrer que , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, 1]$, $|A_{2n}(x)| \leq |a_{2n}|$ et $|A_{2n+1}(x)| \leq \frac{|a_{2n}|}{2}$.

D'après le résultat admis : $A_n\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2^{n-1}} - 1\right) a_n$.

Or $n \geq 2$, donc $2^{n-1} \geq 2^1$ et $\left|A_n\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leq \left|\frac{1}{2} - 1\right| |a_n| \leq \frac{1}{2} |a_n|$.

- D'après la forme admise pour $n \equiv 0[4]$ ou $n \equiv 2[4]$, la fonction A_n est monotone sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Donc pour tout $x \in [0, 1]$, $|A_n(x)| \leq \max\left(|A_n(0)|, \left|A_n\left(\frac{1}{2}\right)\right|, |A_n(1)|\right)$.

Or $A_n(1) = A_n(0) = c_n = a_n$ et $\left|A_n\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leq \frac{|a_n|}{2}$.

Ainsi, pour tout $x \in [0, 1]$, pour tout $n \geq 1$, $|A_{2n}(x)| \leq |a_{2n}|$.

- La fonction A_{2n+1} est dérivable et $A'_{2n+1} = A_{2n}$.

On applique l'inégalité des accroissements finis, pour $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$:

$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad |A_{2n+1}(x) - A_{2n+1}(0)| \leq \sup_{t \in [0, x]} |A'_{2n+1}(t)| \times |x - 0| = \sup_{t \in [0, x]} |A_{2n}(t)| \times x \leq |a_{2n}| \times \frac{1}{2}$$

où l'on a appliqué le résultat qu'on vient juste d'obtenir pour n pair.

Et comme $A_{2n+1}(0) = 0$, on trouve que pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $|A_{2n+1}(x)| \leq \frac{a_{2n}}{2}$.

Puis, pour $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, on peut appliquer également l'inégalité des accroissements finis entre x et 1,

ou bien, on peut noter que d'après la formule trouvée en 5.(b) (puisque $1 - x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$) :

$$\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \quad |A_{2n+1}(x)| = |(-1)^{2n+1}| \times |A_{2n+1}(1-x)| \leq \frac{|a_{2n}|}{1}$$

Ainsi, pour tout $x \in [0, 1]$, pour tout $n \geq 1$, $|A_{2n+1}(x)| \leq \frac{|a_{2n}|}{2}$.

7. Formule sommatoire d'Euler-Maclaurin

a) Soit f une fonction complexe de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1]$.

Montrer que pour tout entier $q \geq 1$:

$$f(1) - f(0) = \sum_{j=1}^q (-1)^{j+1} \left[A_j(t) f^{(j)}(t) \right]_0^1 + (-1)^q \int_0^1 A_q(t) f^{(q+1)}(t) dt$$

• Notons S_q la somme de droite, montrons qu'elle est invariante en passant de q à $q+1$.

$$\begin{aligned} S_{q+1} - S_q &= (-1)^{q+2} \left[A_{q+1}(t) f^{(q+1)}(t) \right]_0^1 + (-1)^{q+1} \int_0^1 A_{q+1}(t) f^{(q+2)}(t) dt - (-1)^q \int_0^1 A_q(t) f^{(q+1)}(t) dt \\ &= (-1)^{q+2} \left(\left[A_{q+1}(t) f^{(q+1)}(t) \right]_0^1 - \int_0^1 A_{q+1}(t) f^{(q+2)}(t) dt - \int_0^1 A_q(t) f^{(q+1)}(t) dt \right) \end{aligned}$$

Or $(A_{q+1} f^{(q+1)})' = A'_{q+1} f^{(q+1)} + A_{q+1} f^{(q+2)} = A_q f^{(q+1)} + A_{q+1} f^{(q+2)}$. Ainsi :

$$\left[A_{q+1}(t) f^{(q+1)}(t) \right]_0^1 = \int_0^1 (A_{q+1} f^{(q+1)})'(t) dt = \int_0^1 A_q(t) f^{(q+1)}(t) dt + \int_0^1 A_{q+1}(t) f^{(q+2)}(t) dt$$

Donc $S_{q+1} - S_q = 0$ et la somme est invariante, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$.

• Reste à trouver sa valeur initiale pour $q = 1$:

$$\sum_{j=1}^1 (-1)^{j+1} \left[A_j(t) f^{(j)}(t) \right]_0^1 + (-1)^1 \int_0^1 A_1(t) f^{(2)}(t) dt = [A_1(t) f'(t)]_0^1 - \int_0^1 A_1(t) f''(t) dt$$

Or $(A_1 f')' = A'_1 f' + A_1 f''$, donc $\int_0^1 A'_1 f' = \int_0^1 (A_1 f')' - \int_0^1 A_1 f''$.

Ainsi, le calcul initial conduit à

$$\sum_{j=1}^1 (-1)^{j+1} \left[A_j(t) f^{(j)}(t) \right]_0^1 + (-1)^1 \int_0^1 A_1(t) f^{(2)}(t) dt = \int_0^1 A'_1 f'(t) dt = \int_0^1 A_0 f'(t) dt = \int_0^1 f'(t) dt = f(1) - f(0)$$

Par conséquent, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, $f(1) - f(0) = \sum_{j=1}^q (-1)^{j+1} \left[A_j(t) f^{(j)}(t) \right]_0^1 + (-1)^q \int_0^1 A_q(t) f^{(q+1)}(t) dt$.

b) En tenant compte des relations trouvées dans la partie précédente, montrer que pour tout entier naturel impair $q = 2p + 1$:

$$f(1) - f(0) = \frac{1}{2} (f'(0) + f'(1)) - \sum_{j=1}^p a_{2j} \left(f^{(2j)}(1) - f^{(2j)}(0) \right) - \int_0^1 A_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t) dt$$

On applique la formule trouvée pour $q = 2p + 1$ impair.

Dans la somme pour j impair, supérieur ou égal à 3, $A_j(0) = a_j = A_j(1) = 0$, donc le crochet s'annule.

Puis comme $A_1 = X - \frac{1}{2}$, on trouve pour $j = 1$,

$$(-1)^2 [A_1(t)f'(t)]_0^1 = \frac{1}{2}f'(1) - \frac{-1}{2}f'(0) = \frac{1}{2}(f'(0) + f'(1))$$

Ainsi : $f(1) - f(0) = \frac{1}{2}(f'(0) + f'(1)) - \sum_{j=1}^p a_{2j} \left(f^{(2j)}(1) - f^{(2j)}(0) \right) - \int_0^1 A_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t) dt.$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[n, +\infty[$. On suppose que f et toutes ses dérivées sont de signe constant sur $[n, +\infty[$ et tendent vers 0 en $+\infty$.

En appliquant, pour $k \geq n$, le résultat précédent à $f_k(t) = f(k+t)$, montrer :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} f'(k) = -f(n) + \frac{1}{2}f'(n) - \sum_{j=1}^p a_{2j} f^{(2j)}(n) + \int_n^{+\infty} A_{2p+1}^*(t) f^{(2p+2)}(t) dt$$

où on a posé $A_j^*(t) = A_j(t - \lfloor t \rfloor)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Pour justifier qu'on a le droit d'intégrer avec une borne infinie, on montrera que

$$\left| A_{2p+1}^*(t) f^{(2p+2)}(t) \right| \leq \psi(t) \text{ avec } x \mapsto \int_n^x \psi(t) dt \text{ admet une limite pour } x \rightarrow +\infty$$

Cela conduira à déduire que :

$$\left| \int_n^{+\infty} A_{2p+1}^*(t) f^{(2p+2)}(t) dt \right| \leq \left| \frac{a_{2p}}{2} \right| \left| f^{(2p+1)}(n) \right|$$

Soit $k \geq n$. L'application $t \mapsto k+t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivé constante égale à 1.

Donc f_k est dérivable sur $[n-k, +\infty[$, par composition et $\forall t \geq n-k$, $f'_k(t) = 1 \times f'(k+t)$.

Puis, par récurrence immédiate, f_k est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[n-k, +\infty[$ et $\forall t \geq n-k$, $\forall h \in \mathbb{N}$, $f_k^{(h)}(t) = f^{(h)}(k+t)$.

Et ainsi, pour tout $k \geq n$, pour tout $h \in \mathbb{N}$, $f_k^{(h)}(1) = f^{(h)}(n+1)$ et $f_k^{(h)}(0) = f^{(h)}(n)$.

On applique ensuite la formule obtenue à la question précédente à f_k :

$$\begin{aligned} f(k+1) - f(k) &= f_k(1) - f_k(0) = \frac{1}{2}(f'_k(0) + f'_k(1)) - \sum_{j=1}^p a_{2j} \left(f_k^{(2j)}(1) - f_k^{(2j)}(0) \right) - \int_0^1 A_{2p+1}(t) f_k^{(2p+2)}(t) dt \\ &= \frac{1}{2}(f'(k) + f'(k+1)) - \sum_{j=1}^p a_{2j} \left(f^{(2j)}(k+1) - f^{(2j)}(k) \right) - \int_0^1 A_{2p+1}(t) f_k^{(2p+2)}(t) dt \end{aligned}$$

Puis, on somme pour k de n à N , cela commence par un télescopage :

$$\begin{aligned} f(N+1) - f(n) &= \frac{1}{2} \sum_{k=n}^N f'(k) + \frac{1}{2} \sum_{k=n}^N f'(k+1) - \sum_{j=1}^p a_{2j} \sum_{k=n}^N \left(f^{(2j)}(k+1) - f^{(2j)}(k) \right) \\ &\quad + \sum_{k=n}^N \int_0^1 A_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(k+t) dt \\ &= \frac{1}{2} (-f'(n) + f'(N+1)) + \sum_{k=n}^{N-1} f'(k) - \sum_{j=1}^p a_{2j} \left(f^{(2j)}(N+1) - f^{(2j)}(n) \right) \\ &\quad + \sum_{k=n}^N \int_k^{k+1} A_{2p+1}(u-k) f^{(2p+2)}(u) du \end{aligned}$$

où l'on a posé $u = k + t$ dans le calcul intégral.

Par ailleurs, si l'on définit $A_{2p+1}^*(t) = A_{2p+1}(t - \lfloor t \rfloor)$,

alors pour tout $u \in [k, k+1]$, $A_{2p+1}(u - k) = A_{2p+1}(u - \lfloor u \rfloor) = A_{2p+1}^*(u)$.

Ainsi, en « déplaçant » les nombres et exploitant une relation de Chasles

$$\sum_{k=n}^{N-1} f'(k) + f'(N+1) = f(N+1) - f(n) + \frac{1}{2}f'(n) + \sum_{j=1}^p a_{2j} \left(f^{(2j)}(N+1) - f^{(2j)}(n) \right) - \int_n^{N+1} A_{2p+1}^*(u) f^{(2p+2)}(u) du$$

D'après les hypothèses, toutes les dérivées $f^{(h)}(x)$ tendent vers 0 pour $x \rightarrow +\infty$.

Reste à montrer que « l'intégrale est (absolument) convergente ».

Aidé par l'énoncé, on majore : $\left| A_{2p+1}^*(u) f^{(2p+2)}(u) du \right| \leq \frac{|a_{2p}|}{2} \varepsilon f^{(2p+1)'}(u) \quad (:= \psi(u))$,

où ε indique le signe de $f^{(2p+2)}$, constant par hypothèse,

et on exploite $\frac{|a_{2p}|}{2} \varepsilon f^{(2p+1)'}(u)$ intégrable car

$$\int_n^N \frac{|a_{2p}|}{2} \varepsilon f^{(2p+1)'}(u) \leq \frac{|a_{2p}|}{2} \varepsilon \left(f^{(2p+1)}(N+1) - f^{(2p+1)}(n) \right) \leq \frac{|a_{2p}|}{2} \varepsilon f^{(2p+1)}(n) = \frac{|a_{2p}|}{2} |f^{(2p+1)}(n)|$$

Nécessairement les signes de $f^{(2p+1)}$ et de $f^{(2p+2)}$ sont contraires pour tendre 0 en $+\infty$.

Ainsi on peut donc faire tendre $N \rightarrow +\infty$ (nombre fini de fois : $p+2$ limites) :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} f'(k) = -f(n) + \frac{1}{2}f'(n) - \sum_{j=1}^p a_{2j} f^{(2j)}(n) + \int_n^{+\infty} A_{2p+1}^*(t) f^{(2p+2)}(t) dt.$$

Et l'on a démontré au passage (pour justifier la convergence de l'intégrale) :

$$\left| \int_n^{\infty} A_{2p+1}^*(t) f^{(2p+2)}(t) dt \right| \leq \frac{|a_{2p}|}{2} |f^{(2p+1)}(n)|.$$

d) Montrer que, dans l'expression de $R_n(\alpha)$ du 4.d), le terme $O\left(\frac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\right)$ peut s'écrire sous la forme d'une intégrale.

Il reste à comparer ce résultat pour $f : x \mapsto \frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}}$ ($\alpha > 1$) à celui obtenu en 4.d).

On a vu que toutes les dérivées de f sont de signe constant, tendant vers 0 en $+\infty$ (4.(b)).

On peut appliquer le résultat précédent (jusqu'à $p-1$) - puisque $f'(k) = \frac{1}{k^\alpha}$:

$$\begin{aligned} R_n(\alpha) &= \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=n}^{+\infty} f'(k) = -f(n) + \frac{1}{2}f'(n) - \sum_{j=1}^p a_{2j} f^{(2j)}(n) + \int_n^{+\infty} A_{2p+1}^*(t) f^{(2p+2)}(t) dt \\ &= \frac{1}{(1-\alpha)n^{\alpha-1}} + \frac{1}{2n^\alpha} - \sum_{j=1}^{p-1} a_{2j} f^{(2j)}(n) + \int_n^{+\infty} A_{2p-1}^*(t) f^{(2p)}(t) dt \end{aligned}$$

On retrouve la même partie régulière puisque $a_0 = 1$ et $a_1 = -\frac{1}{2}$ et une gagne en précision puisque le O est remplacé par un calcul intégral explicite.

$$O\left(\frac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\right) \text{ est explicitement } \int_n^{+\infty} A_{2p-1}^*(t) f^{(2p)}(t) dt = \int_n^{\infty} A_{2p-1}(t - \lfloor t \rfloor) \frac{-\alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+2p-2)}{t^{\alpha+2p-1}} dt.$$

On démontre, dans le sujet d'origine (MP - 2011 - Centrale I), en exploitant en particulier les séries de

Fourier (*ce n'est plus au programme*) que :

$$\left| \frac{a_{2p+2}f^{(2p+2)}(n)}{a_{2p}f^{(2p)}(n)} \right| = \frac{(\alpha + 2p)(\alpha + 2p - 1)S(2p + 2)}{4n^2\pi^2S(2p)}$$

Cela donne, de manière assez précise, le contrôle de cette erreur, et permet de conclure que les formules sommatoires étudiées ne sont pas nécessairement convergentes.

Voici, pour finir, l'extrait du rapport du concours Centrale-2011. Cela est intéressant de le lire...*On a le tableau de correspondance des questions :*

Questions d'origine	Questions DS 9
I.A.2	I.2.
II.A.1	II.3.a)
III.A.1.	III.5.a)
III.A.2.	enlevé du sujet : série de fonctions de plusieurs variables.
IV	enlevé du sujet : série de Fourier
I.A.1	Comparaison série-intégrale. Non donnée ici
I.B.2.	I.2.a) et b)
II.	II
III	III

Mathématiques 1

Présentation du sujet

L'objet de ce problème était de donner une approximation de la somme des séries de Riemann convergentes. Pour cela, on étudiait le reste $R_n(\alpha) = \sum_{k=n}^{\infty} 1/k^\alpha$

Dans la première partie, on donnait une première approximation du reste. Cette méthode se généralisant mal, on utilisait dans la deuxième partie une formule de Taylor pour obtenir simplement un développement asymptotique du reste. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle ne donne aucun contrôle de l'erreur.

Dans la troisième partie, on retrouvait à partir de la formule sommatoire d'Euler-Maclaurin le même développement asymptotique avec une expression de l'erreur assez satisfaisante.

Dans la dernière partie, on étudiait de manière assez précise le contrôle de cette erreur, pour conclure que les formules sommatoires étudiées ne sont pas nécessairement convergentes.

Analyse globale des résultats

L'épreuve, très progressive dans chacune de ses parties, a permis aux étudiants sérieux de montrer leur rigueur, leur connaissance du cours et leur habileté à manier l'analyse fine.

Les connaissances nécessaires étant pour la plus grande partie du problème, au programme de première année, la compétence et la maîtrise ont pu être jugées.

Dans la Partie I, la question I.A.2 qui était une « question de cours », s'est révélée très classante. La formule de Taylor avec reste intégral encore mal connue du tiers des candidats a permis, elle aussi, de trier les candidats.

La partie II a été l'occasion dans la question II.A.1 de voir ceux qui font la différence entre condition nécessaire et condition suffisante. Cette partie a très rarement été bien traitée.

La partie III, pourtant classique, a été, surtout dans la question A.1, mal comprise par les candidats. L'énoncé demandait une existence et une unicité et plus de trois-quart des copies proposent seulement une preuve d'unicité.

De nombreux résultats ayant été donnés dans l'énoncé, les correcteurs ont été très attentifs aux justifications données. « Par produit de Cauchy » ne constitue pas une preuve.

La question III.A.2 a été la fin de copie du plus grand nombre de candidats.

La partie IV a rarement été abordée. Seule une poignée de candidats a réussi à donner une réponse correcte à la question IV.B.2.

Commentaires sur les réponses apportées

I.A.1 Signalons qu'un dessin ne peut constituer une démonstration.

I.A.2 On a lu très souvent que la fonction $x \mapsto 1/x^\alpha$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$, qu'une suite majorée et minorée par deux suites convergentes converge. On lit très souvent $\sum_{n=p}^\infty u_n$ avant la preuve de l'existence d'une telle somme.

I.B.2 Rappelons qu'un théorème s'énonce avec des hypothèses. Rares sont ceux qui donnent des conditions d'application du théorème de Taylor avec reste intégral. Signalons qu'une affirmation non justifiée, même juste, n'est pas une preuve. Des candidats ont ainsi affirmé, sans l'ombre d'une justification, que la fonction $t \mapsto (k+1-t)^2/t^{\alpha+2}$ était décroissante.

II Rappelons que le produit (de Cauchy) de séries convergentes n'est, en général, pas une série convergente.

Les correcteurs se sont interrogés sur la dénomination de série télescopique. Les séries $\sum (-1)^n$ et $\sum_{n \geq 1} 1/(n(n+1))$ en sont-elles ? Ils préféreraient l'expression, « par télescopage » pour exprimer que la somme finie $\sum_{k=n}^{n+p} (u_{k+1} - u_k)$ est égale à $u_{n+p+1} - u_n$.

Rappelons qu'il ne sert à rien de majorer le module de la somme partielle d'une série à termes complexes pour prouver la convergence de la série.

Pour de nombreux candidats $\sum_{i=2}^{p+1} 1/i! < \sum_{i=0}^\infty 1/i! = e^0 = 1$. Nous laissons aux futurs candidats le soin de trouver le nombre d'erreurs et/ou maladresses figurant dans ces relations.

III Disons seulement que le propos « par produit de Cauchy » ne peut constituer une démonstration.

Conseils aux candidats

- Préciser les hypothèses des théorèmes.
- Préciser les hypothèses de récurrence.
- Éviter : ainsi, par récurrence immédiate, par identification, par analogie, série croissante, série positive, série majorée, l'intégrale converge en $+\infty$, les noms de théorèmes dont on n'est pas sûr, tels que Taylor Young à la place de Taylor-polynômes, Taylor Lagrange à la place de Taylor avec reste intégral,...
- Alors que le « théorème d'encadrement » est clair, éviter les dénominations enfantines, telles que théorème des gendarmes, du squeeze, du pincement, de l'étau,...
- Numéroté ses copies.
- Respecter la numérotation des questions : ne pas remplacer II.A.2)b) par b).
- Souligner les résultats ou tirer un trait entre les questions.

Les trois derniers conseils peuvent paraître superficiels, mais ils contribuent à ne pas « braquer » le correcteur avant la lecture de votre copie.

Conclusions

En conclusion, nous dirons que, malgré ses nombreuses questions abordables par les étudiants de MPSI, cette épreuve a permis de classer correctement les étudiants sérieux.
