

DEVOIR SURVEILLÉ N°9

Sujet donné le mercredi 13 mai 2026, 3h.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

La notation tiendra particulièrement compte de la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées. Les réponses aux questions seront numérotées et séparées par un trait horizontal. Les résultats essentiels devront être encadrés ou soulignés.

BON TRAVAIL

DÉVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE DU RESTE DE SÉRIES CONVERGENTES

L'objet de ce problème est de donner une approximation de la somme des séries de Riemann convergentes $S(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ où α est un réel strictement supérieur à 1. Pour cela, on étudie le reste :

$$R_n(\alpha) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}.$$

Dans la première partie, on donne une première approximation du reste. Cette méthode se généralisant mal, on utilise dans la deuxième partie une formule de Taylor pour obtenir simplement un développement asymptotique du reste. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle ne donne aucun contrôle de l'erreur.

Dans la troisième partie, on retrouve à partir de la formule sommatoire d'Euler-Maclaurin le même développement asymptotique avec une expression de l'erreur assez satisfaisante. On a besoin dans cette partie d'une étude succincte des polynômes de Bernoulli.

Partie I - Étude préliminaire

1. Somme de Riemann

a) Soit $\alpha < 0$.

En exploitant une somme de Riemann (et non une série!), montrer que $\left(\frac{1}{n^{1-\alpha}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \right)_n$ admet une limite finie.

En déduire un équivalent de $(S_n(\alpha))_n$ (défini plus haut).

On démontrerait de la même façon que le résultat reste valable pour $\alpha \in [0, 1[$.

b) Pour cette question, on considère f une fonction continue et décroissante sur $[0, 1]$.

On note alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $G_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ et $D_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$.

(i) Montrer que $(G_n(f))_n$ et $(D_n(f))_n$ sont convergentes. Quelle est leur limite (commune) ?

(ii) Plus précisément, montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \geq \int_0^1 f(t) dt \geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Un dessin peut aider, mais ne fait pas démonstration.

On exploitera l'égalité des accroissements finis à la primitive F sur chaque intervalle $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right]$.

c) On considère $\alpha > 1$.

(i) Rappeler (sans démonstration) la nature de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$.

Quelle est alors la limite de $(R_n(\alpha))$ (définie plus haut) ?

(ii) On note pour tout $(r, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $G_{r,n} = \sum_{k=rn}^{(r+1)n-1} \frac{1}{k^\alpha}$ et $D_{r,n} = \sum_{k=rn+1}^{(r+1)n} \frac{1}{k^\alpha}$.

En exploitant 1.b), montrer que : $\forall r, n \in \mathbb{N}^*$, $G_{r,n} \geq \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}} \left(\frac{1}{r^{\alpha-1}} - \frac{1}{(r+1)^{\alpha-1}} \right) \geq D_{r,n}$

(iii) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \geq \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \geq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$

(iv) Donner enfin un équivalent de $(R_n(\alpha))_n$.

2. Première amélioration de l'étude asymptotique du reste

Dans la suite du problème, α est un réel strictement supérieur à 1.

a) Soit f_α la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_\alpha(x) = \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$.

En appliquant à f_α la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2, montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$f_\alpha(k+1) - f_\alpha(k) = \frac{1}{k^\alpha} - \frac{\alpha}{2} \frac{1}{k^{\alpha+1}} + A_k$$

où A_k est un réel vérifiant $0 \leq A_k \leq \frac{\alpha(\alpha+1)}{2k^{\alpha+2}}$.

b) En déduire que :

$$R_n(\alpha) = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + \frac{1}{2n^\alpha} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$$

On pourrait répéter le procédé pour obtenir un développement asymptotique plus précis de $R_n(\alpha)$, mais la partie suivante va nous donner une méthode plus rapide.

Partie II - Formule de Taylor et nombres de Bernoulli

3. Nombres de Bernoulli

a) Montrer qu'il existe une suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ayant la propriété suivante : pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, pour tout intervalle non réduit à un point I et pour toute fonction complexe f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I , la fonction g définie par : $g = a_0 f + a_1 f' + \dots + a_{p-1} f^{(p-1)}$ vérifie :

$$g' + \frac{1}{2!} g'' + \frac{1}{3!} g^{(3)} + \dots + \frac{1}{p!} g^{(p)} = f' + \sum_{\ell=1}^{p-1} b_{\ell,p} f^{(p+\ell)}$$

où les $b_{\ell,p}$ sont des coefficients indépendants de f que l'on ne cherchera pas à calculer.

On pourra montrer que $(a_0, \dots, a_{p-1})$ est solution d'un système linéaire (S_p) triangulaire tel que $(S_p) \subset (S_{p+1})$.

b) Montrer que $a_0 = 1$ et que pour tout $p \geq 1$, $a_p = -\sum_{i=2}^{p+1} \frac{a_{p+1-i}}{i!}$.

En déduire que $|a_p| \leq 1$ pour tout entier naturel p . Déterminer a_1 et a_2 .

c) Pour tout $z \in]-1, 1[$, justifier que la série $\sum_{p \geq 0} a_p z^p$ est (absolument) convergente.

On note pour tout $z \in]-1, 1[$, $\varphi(z)$ sa somme : $\varphi(z) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p z^p$.

d) On fixe $z \in]-1, 1[$.

On note pour tout $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, $u_{p,q} = \frac{a_p}{q!} z^{p+q}$. Montrer que la famille $(|u_{p,q}|)_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}$ est sommable

e) On admet qu'on peut alors écrire :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{q=1}^{+\infty} u_{p,q} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{p+q=n} u_{p,q} [q \neq 0] \right)$$

En déduire que pour tout $z \in]-1, 0[\cup]0, 1[$, $\varphi(z) = \frac{z}{ez-1}$. On admettra que le résultat est « vraie » en $z = 0$.

f) Montrer que la fonction $\theta : z \mapsto \varphi(z) - a_1 z$ est une fonction paire.

En déduire que $a_{2k+1} = 0$ pour tout entier $k \geq 1$. Calculer a_4 .

Les nombres $b_n = n! a_n$ sont appelés nombres de Bernoulli.

4. Formule de Taylor

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$, où α est un réel strictement supérieur à 1.

Dans cette question 4, on fixe un entier naturel non nul p et on note :

$$g = a_0 f + a_1 f' + \cdots + a_{2p-1} f^{(2p-1)}.$$

avec les nombres a_i définis à la question précédente.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $R(k) = g(k+1) - g(k) - f'(k)$ de sorte que :

$$g(k+1) - g(k) = f'(k) + R(k).$$

a) En appliquant à g la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $2p$, montrer que

$$R(k) = \int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)^{2p}}{(2p)!} g^{(2p+1)}(t) dt + \sum_{\ell=1}^{2p-1} b_{\ell,2p} f^{(2p+\ell)}(k)$$

b) Pour tout $s \in \mathbb{N}^*$, donner une expression de $f^{(s+1)}(x)$ pour $x > 0$.

c) En déduire l'existence d'un réel A tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $|R(k)| \leq Ak^{-(2p+\alpha)}$.

d) En déduire le développement asymptotique du reste :

$$R_n(\alpha) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = - \left(a_0 f(n) + a_1 f'(n) + a_2 f''(n) + \cdots + a_{2p-2} f^{(2p-2)}(n) \right) + O\left(\frac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\right)$$

On obtient ainsi une valeur approchée de $S(\alpha)$ donnée par :

$$\tilde{S}_{n,2p-2}(\alpha) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha} - \left(a_0 f(n) + a_1 f'(n) + a_2 f''(n) + \cdots + a_{2p-2} f^{(2p-2)}(n) \right)$$

e) Donner le développement asymptotique de $R_n(3)$ correspondant au cas $\alpha = 3$ et $p = 3$.

Partie III - Polynômes de Bernoulli et formule sommatoire d'Euler-Maclaurin

On peut calculer, pour $n = 100$:

tandis que $S(3)$ vaut 1,202056903159594285... (constante d'Apéry).

La méthode de la partie II semble satisfaisante, mais ne fournit pas d'information précise sur le terme $O\left(\frac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\right)$.

C'est pourquoi on introduit dans cette partie les polynômes de Bernoulli et la formule sommatoire d'Euler-Maclaurin.

5. Polynômes de Bernoulli

On définit une suite de polynômes $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} = (A_n(X))_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant les conditions suivantes :

$$A_0 = 1, A'_{n+1} = A_n \text{ et } \int_0^1 A_{n+1}(t) dt = 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \quad (1)$$

Les polynômes $B_n = n!A_n$ sont appelés polynômes de Bernoulli.

a) Montrer que la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est déterminée de façon unique par les conditions (1); préciser le degré de A_n ; calculer A_1 , A_2 et A_3 .

b) Montrer que $A_n(t) = (-1)^n A_n(1-t)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$.

Il s'agit de composition et non de produit... On exploitera l'unicité de (A_n) .

c) Pour tout entier $n \geq 2$, montrer que $A_n(0) = A_n(1)$ et que $A_{2n-1}(0) = 0$.

d) On pose provisoirement $c_n = A_n(0)$ pour tout entier naturel n . Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

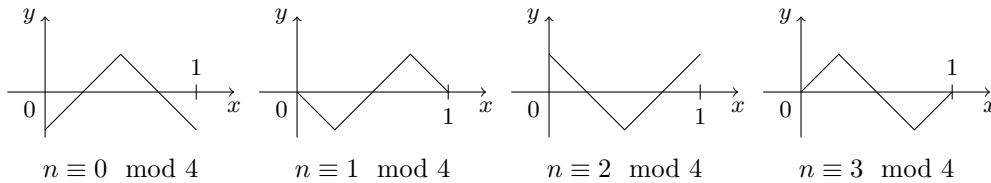
$$A_n(X) = c_0 \frac{X^n}{n!} + \cdots + c_{n-2} \frac{X^2}{2!} + c_{n-1} X + c_n$$

puis que, si $n \geq 1$, $\frac{c_0}{(n+1)!} + \cdots + \frac{c_{n-2}}{3!} + \frac{c_{n-1}}{2!} + c_n = 0$

e) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a en fait $c_n = a_n$.

6. Variations des polynômes de Bernoulli

- On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2^{n-1}} - 1\right)a_n$.
- On admet également que, pour tout entier naturel $n \geq 2$, les variations des polynômes A_n sur $[0, 1]$ correspondent schématiquement aux quatre cas ci-dessous :



En d'autres termes, pour $n \geq 2$, on a :

- Si $n \equiv 2 \pmod{4}$, alors $A_n(0) = A_n(1) > 0 > A_n(\frac{1}{2})$; de plus la fonction A_n est strictement décroissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ et strictement croissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$.
- Si $n \equiv 0 \pmod{4}$, alors $A_n(0) = A_n(1) < 0 < A_n(\frac{1}{2})$; de plus la fonction A_n est strictement croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ et strictement décroissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$.
- Si $n \equiv 1 \pmod{4}$, alors $A_n(0) = A_n(\frac{1}{2}) = A_n(1) = 0$; de plus $A_n < 0$ sur $]0, \frac{1}{2}[$ et $A_n > 0$ sur $]\frac{1}{2}, 1[$.
- Si $n \equiv 3 \pmod{4}$, alors $A_n(0) = A_n(\frac{1}{2}) = A_n(1) = 0$; de plus $A_n > 0$ sur $]0, \frac{1}{2}[$ et $A_n < 0$ sur $]\frac{1}{2}, 1[$.

Montrer que , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, 1]$, $|A_{2n}(x)| \leq |a_{2n}|$ et $|A_{2n+1}(x)| \leq \frac{|a_{2n}|}{2}$.

7. Formule sommatoire d'Euler-Maclaurin

a) Soit f une fonction complexe de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1]$.

Montrer que pour tout entier $q \geq 1$:

$$f(1) - f(0) = \sum_{j=1}^q (-1)^{j+1} \left[A_j(t) f^{(j)}(t) \right]_0^1 + (-1)^q \int_0^1 A_q(t) f^{(q+1)}(t) dt$$

b) En tenant compte des relations trouvées dans la partie précédente, montrer que pour tout entier naturel impair $q = 2p + 1$:

$$f(1) - f(0) = \frac{1}{2}(f'(0) + f'(1)) - \sum_{j=1}^p a_{2j} \left(f^{(2j)}(1) - f^{(2j)}(0) \right) - \int_0^1 A_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t) dt$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[n, +\infty[$. On suppose que f et toutes ses dérivées sont de signe constant sur $[n, +\infty[$ et tendent vers 0 en $+\infty$.

En appliquant, pour $k \geq n$, le résultat précédent à $f_k(t) = f(k + t)$, montrer :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} f'(k) = -f(n) + \frac{1}{2}f'(n) - \sum_{j=1}^p a_{2j} f^{(2j)}(n) + \int_n^{+\infty} A_{2p+1}^*(t) f^{(2p+2)}(t) dt$$

où on a posé $A_j^*(t) = A_j(t - [t])$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Pour justifier qu'on a le droit d'intégrer avec une borne infinie, on montrera que

$$\left| A_{2p+1}^*(t) f^{(2p+2)}(t) \right| \leq \psi(t) \text{ avec } x \mapsto \int_n^x \psi(t) dt \text{ admet une limite pour } x \rightarrow +\infty$$

Cela conduira à déduire que :

$$\left| \int_n^{+\infty} A_{2p+1}^*(t) f^{(2p+2)}(t) dt \right| \leq \left| \frac{a_{2p}}{2} \right| \left| f^{(2p+1)}(n) \right|$$

d) Montrer que, dans l'expression de $R_n(\alpha)$ du 4.d), le terme $O\left(\frac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\right)$ peut s'écrire sous la forme d'une intégrale.