

DEVOIR SURVEILLÉ N°10
CORRECTION

Sujet donné le samedi 30 mai 2026, 4h.

ÉTUDE ET APPLICATIONS DE POLYNÔMES DE TCHEBYCHEV

On considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$U_0 = 1, \quad U_1 = 2X \quad \text{et, pour tout entier } n \geq 2, \quad U_n = 2XU_{n-1} - U_{n-2}$$

On pourra confondre polynôme et fonction polynomiale. Ainsi, pour tout entier $n \geq 2$ et tout $x \in \mathbb{C}$,

$$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x)$$

Partie I - Calcul de la somme d'une série convergente

1. Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}$$

On réalise quelques intégrations par parties. On note I_n l'intégrale recherchée
Il s'agit de fonctions polynomiales ou trigonométriques, donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^\pi \underbrace{\left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right)}_{=u(t)} \underbrace{\cos(nt)}_{=v'(t)} dt = \left[\left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \frac{1}{n} \sin(nt) \right]_0^\pi - \frac{1}{n} \int_0^\pi \underbrace{\left(\frac{t}{\pi} - 1 \right)}_{=u_1(t)} \underbrace{\sin(nt)}_{=v_1'(t)} dt \\ &= 0 - \frac{1}{n} \left[\left(\frac{t}{\pi} - 1 \right) \frac{1}{n} \cos(nt) \right] - \frac{1}{n^2} \int_0^\pi \frac{1}{\pi} \cos(nt) dt = 0 - \frac{-1}{n^2} - \left[\frac{1}{n^3\pi} \sin(nt) \right]_0^\pi = \frac{1}{n^2} + 0 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}$.

2. Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $t \in]0, \pi]$:

$$\sum_{n=1}^m \cos(nt) = \frac{\cos \frac{(m+1)t}{2} \sin \frac{mt}{2}}{\sin \frac{t}{2}}$$

• Méthode 1. Les exponentielles complexes (avantage : pas besoin de connaître la réponse).

$$\sum_{n=1}^m \cos(nt) = \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^m e^{int} \right) = \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^m (e^{it})^n \right)$$

Pour $t \in]0, \pi]$, $e^{it} \neq 1$, donc grâce à la sommation des termes d'une suite géométrique

$$\sum_{n=1}^m \cos(nt) = \operatorname{Re} \left(\frac{(1 - e^{imt})e^{it}}{1 - e^{it}} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{e^{i(1+m/2)t}(-2i) \sin \frac{m}{2}t}{e^{it/2}(-2i) \sin \frac{t}{2}} \right) = \frac{\cos(\frac{m+1}{2}t) \sin \frac{m}{2}t}{\sin \frac{t}{2}}$$

où l'on aura largement exploité l'angle moyen (moitié)...

- Méthode 2. Une somme télescopique et : $2 \sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b) = \sin(b+a) - \sin(b-a)$.
Pour tout $t \in]0, \pi]$,

$$\sin \frac{t}{2} \sum_{n=1}^m \cos(nt) = \sum_{n=1}^m \sin \frac{t}{2} \cos(nt) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^m \sin \left(\frac{2n+1}{2} t \right) - \sin \left(\frac{2n-1}{2} t \right)$$

Par télescopage :

$$\sin \frac{t}{2} \sum_{n=1}^m \cos(nt) = \frac{1}{2} \left(\sin \left(\frac{2m+1}{2} t \right) - \sin \left(\frac{1}{2} t \right) \right) = \cos \left(\frac{m+1}{2} t \right) \sin \left(\frac{m}{2} t \right)$$

$$\text{avec } \sin p - \sin q = \sin \left(\frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2} \right) - \sin \left(\frac{p+q}{2} - \frac{p-q}{2} \right) = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}.$$

Reste à diviser par $\sin \frac{t}{2} \neq 0$.

- Méthode 3. Par récurrence (mais pas ici !)

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $t \in]0, \pi]$: $\sum_{n=1}^m \cos(nt) = \frac{\cos \frac{(m+1)t}{2} \sin \frac{mt}{2}}{\sin \frac{t}{2}}.$

3. Soit $u : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$

a) Montrer que si u est de classe $\mathcal{C}^1$,

$$\int_0^\pi u(t) \sin(\lambda t) dt \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0$$

Puisque u est de classe $\mathcal{C}^1$, on peut faire une intégration par parties :

$$\int_0^\pi u(t) \sin(\lambda t) dt = \left[-u(t) \frac{1}{\lambda} \cos(\lambda t) \right]_0^\pi + \frac{1}{\lambda} \int_0^\pi u'(t) \cos(\lambda t) dt$$

On suppose $\lambda > 0$. Par inégalité triangulaire et inégalité de la moyenne :

$$\left| \int_0^\pi u(t) \sin(\lambda t) dt \right| \leq \frac{1}{\lambda} (|u(\pi)| + |u(0)|) + \frac{1}{\lambda} \int_0^\pi |u'(t)| dt$$

Puis u est de classe $\mathcal{C}^1$, donc u' est continue sur $[0, \pi]$, donc bornée (Weierstrass).

Ainsi, il existe $M \in \mathbb{R}_+$, tel que pour tout $t \in [0, \pi]$, $|u'(t)| \leq M$ et donc

$$\left| \int_0^\pi u(t) \sin(\lambda t) dt \right| \leq \frac{1}{\lambda} [|u(\pi)| + |u(0)| + \pi M]$$

Ce dernier terme tend vers 0 pour $\lambda \rightarrow +\infty$ et donc par le théorème d'encadrement,

si u est de classe $\mathcal{C}^1$, $\int_0^\pi u(t) \sin(\lambda t) dt \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0.$

b) Montrer que le résultat reste vrai si u est seulement supposée continue.

Indication : plus généralement, on démontre que le résultat est vrai pour toute fonction uniformément proche de fonctions en escalier sur $[0, \pi]$.

- Cas 1. u créneau.

On débute par $u = s1_I$ où I est un intervalle non réduit à un point.

On peut supposer $]a, b[\subset I \subset [a, b]$, avec $b - a > 0$.

Alors

$$\int_0^\pi u(t) \sin(\lambda t) dt = s \int_a^b \sin(\lambda t) dt = \frac{s}{\lambda} (\cos(\lambda a) - \cos(\lambda b)) \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0$$

Dans le cas où I est réduit à un point, c'est encore plus immédiat.

- Cas 2. u en escalier.

Il existe $n \in \mathbb{N}$, $s_0, \dots, s_n \in \mathbb{R}$, $I_0, \dots, I_n$ intervalles disjoints tel que $u = \sum_{j=0}^n s_j 1_{I_j}$.

Alors par linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^\pi u(t) \sin(\lambda t) dt = \sum_{j=0}^n s_j \int_0^\pi 1_{I_j} \sin(\lambda t) dt \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0$$

par addition **finie** de termes qui tendent vers 0.

- Cas 3. u continue (ou réglée : i.e. limite uniforme de suite de fonctions en escalier).

Soit $\varepsilon > 0$.

Il existe v en escalier tel que $\forall t \in [0, \pi] : |u(t) - v(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2\pi}$ Ainsi, par linéarité, pour tout $\lambda > 0$

$$\int_0^\pi u(t) \sin(\lambda t) dt = \int_0^\pi v(t) \sin(\lambda t) dt + \int_0^\pi (u(t) - v(t)) \sin(\lambda t) dt$$

$$\left| \int_0^\pi u(t) \sin(\lambda t) dt \right| \leq \left| \int_0^\pi v(t) \sin(\lambda t) dt \right| + \int_0^\pi |u(t) - v(t)| |\sin(\lambda t)| dt \leq \left| \int_0^\pi v(t) \sin(\lambda t) dt \right| + \frac{\varepsilon}{2}$$

Or, à v fixé, $\left| \int_0^\pi v(t) \sin(\lambda t) dt \right| \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0$.

il existe donc $\Lambda > 0$, tel que $\forall \lambda \geq \Lambda$, $\left| \int_0^\pi v(t) \sin(\lambda t) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Ainsi, pour tout $\lambda > \Lambda$, $\left| \int_0^\pi u(t) \sin(\lambda t) dt \right| \leq \varepsilon$. C'est la définition :

si u est continue, $\int_0^\pi u(t) \sin(\lambda t) dt \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0$.

(On a fixé, ε , puis v_ε , puis $\Lambda_{\varepsilon, v_\varepsilon} = \Lambda_\varepsilon \dots$)

4. Soit $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2\pi} - \frac{t}{2} & \text{si } t \in]0, \pi] \\ -1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

Pour tout $t \in]0, \pi]$, $\sin \frac{t}{2} > 0$.

Donc par théorèmes classique (produit, inverse, fonctions de référence), la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi]$.

Puis pour t au voisinage de 0, $2 \sin \frac{t}{2} = t - \frac{t^3}{24} + o(t^3) = t + o(t^2)$.

Donc, au voisinage de 0, $f(t) = \frac{\frac{t^2}{2\pi} - 1}{1 + o(t)} = \left(-1 + \frac{t}{2\pi} \right) (1 + o(t)) = -1 + \frac{t}{2\pi} + o(t)$ Ainsi, f admet un $DL_1(0)$ donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de 0

$f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0, \pi].$

Rappelons que ce théorème ne s'étend pas ; il est en particulier faux pour la classe $\mathcal{C}^2$.

5.a) Montrer que pour tout entier $m \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi f(t) \sin\left(\frac{(2m+1)t}{2}\right) dt$.

Avec les réponses aux deux premières questions de cette partie :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2} &= \sum_{n=1}^m \int_0^1 \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(nt) dt = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \left(\sum_{n=1}^m \cos(nt) \right) dt \\ &= \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \frac{\cos \frac{(m+1)t}{2} \sin \frac{mt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} dt = 2 \int_0^\pi f(t) \cos \frac{(m+1)t}{2} \sin \frac{mt}{2} dt \end{aligned}$$

où f a été remplacée par sa définition. Enfin, comme $\sin a \cos b = \frac{1}{2} (\sin(a+b) + \sin(a-b))$.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2} &= \int_0^\pi f(t) \left(\sin \frac{(2m+1)t}{2} - \sin \frac{t}{2} \right) dt = \int_0^\pi f(t) \sin \frac{(2m+1)t}{2} dt - \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) dt \\ &= \int_0^\pi f(t) \sin \frac{(2m+1)t}{2} dt - \frac{1}{2} \left[\frac{t^3}{6\pi} - \frac{t^2}{2} \right]_0^\pi = \int_0^\pi f(t) \sin \frac{(2m+1)t}{2} dt + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^3}{6\pi} \right) \end{aligned}$$

Pour tout entier $m \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi f(t) \sin \frac{(2m+1)t}{2} dt$.

b) Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ et montrer : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

La série converge, c'est un résultat du cours.

Mais par ailleurs, la fonction f étant de classe $\mathcal{C}^1$, on sait 16, que $\int_0^\pi f(t) \sin \frac{(2m+1)t}{2} dt \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$. Ainsi

le terme de droite converge vers $\frac{\pi^2}{6}$ et donc par unicité des limites :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Partie II - Étude de la suite de polynômes $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$

6. Calculer U_2 et U_3

Le calcul est direct :

$$U_2 = 2XU_1 - U_0 = 4X^2 - 1 \text{ et } U_3 = 2X(4X^2 - 2) - 2X = 8X^3 - 4X.$$

7. Démontrer que, pour tout entier naturel n , U_n est un polynôme de degré n , dont on déterminera le coefficient du terme de degré n et la parité.

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$: « $\deg U_n = n$ et $[U_n]_n = 2^n$ et $U_n(-X) = (-1)^n U_n(X)$. »

— $U_0 = 1$, donc $\deg U_0 = 0$ et $[U_0]_0 = 1 = 2^0$ et $U_0(-X) = U_0(X)$, donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

— $U_1 = 2X$, donc $\deg U_1 = 1$ et $[U_1]_1 = 2 = 2^1$ et $U_1(-X) = -U_1(X)$, donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ sont vraies.

D'après la relation de récurrence : $U_{n+2} = 2XU_{n+1} - U_n$.

Alors, pour tout $k \geq n+3$, $[U_n]_k = 0$, car $\deg U_n = n < k$ d'après $\mathcal{P}_n$

et $[2XU_{n+1}]_k = 2[U_{n+1}]_{k-1} = 0$ car $\deg U_{n+1} = n+1 < k-1$ d'après $\mathcal{P}_{n+1}$.

Ainsi, pour tout $k \geq n+3$, $[U_{n+2}]_k = 0$ donc $\deg(U_{n+2}) \leq n+2$.

Puis, comme $[U_n]_{n+2} = 0$, on a $[U_{n+2}]_{n+2} = [2XU_{n+1}]_{n+2} = 2[U_{n+1}]_{n+1} = 2 \times 2^{n+1}$ d'après $\mathcal{P}_{n+1}$.

Donc $[U_{n+2}]_{n+2} = 2^{n+2}$.

De plus,

$$U_{n+2}(-X) = 2(-X)U_{n+1}(-X) - U_n(-X) = (-1)^{n+2}2U_{n+1}(X) - (-1)^n U_n(X) = (-1)^{n+2}U_{n+2}(X).$$

Ainsi $\mathcal{P}_{n+2}$ est vraie. On a montré : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_n \text{ et } \mathcal{P}_{n+1} \implies \mathcal{P}_{n+2}$.

Pour tout entier n , le coefficient dominant de U_n est $2^n X^n$ et U_n est de même parité que n .

8. Soit $\theta \in]0, \pi[$. Pour tout n entier naturel, on pose $S_n(\theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $S_n(\theta) + S_{n-2}(\theta)$ en fonction de $S_{n-1}(\theta)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant les formules d'addition,

$$S_n(\theta) + S_{n-2}(\theta) = \frac{\sin((n+1)\theta) + \sin((n-1)\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{2 \sin(n\theta) \cos(\theta)}{\sin(\theta)} = 2S_{n-1}(\theta) \cos(\theta).$$

b) Établir, pour tout entier naturel n ;

$$U_n(\cos \theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$$

• Méthode 1. D'après la question précédente, $(S_n(\theta))$ et $(U_n(\cos(\theta)))$ satisfont à la même relation de récurrence d'ordre 2. De plus, $S_0(\theta) = 1 = U_0(\cos(\theta))$ et $S_1(\theta) = \frac{\sin(2\theta)}{\sin(\theta)} = 2 \cos(\theta) = U_1(\cos(\theta))$.

Ainsi, pour tout n entier naturel, $U_n(\cos(\theta)) = S_n(\theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$.

• Méthode 2. Encore une récurrence à deux termes, mais on accélère la démonstration.

Pour $n = 0$: $U_0(\cos \theta) = 1 = \frac{\sin \theta}{\sin \theta}$ et pour $n = 1$: $U_1(\cos \theta) = 2 \cos \theta = \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin(2\theta)}{\sin \theta}$.

L'initialisation est faite.

Montrons l'hérédité, en supposant le résultat démontré en n et $n+1$, quelconque.

$$\begin{aligned} U_{n+2}(\cos \theta) &= 2 \cos \theta \times U_{n+1}(\cos \theta) - U_n(\cos \theta) = \frac{2 \cos \theta \sin((n+2)\theta) - \sin((n+1)\theta)}{\sin \theta} \\ &= \frac{\sin((n+3)\theta) + \sin((n+1)\theta) - \sin((n+1)\theta)}{\sin \theta} = \frac{\sin((n+3)\theta)}{\sin \theta} \end{aligned}$$

toujours avec la même formule : $2 \sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$.

Ainsi, l'hérédité est assurée.

Pour tout entier naturel n et tout réel $\theta \in]0, \pi[$, $U_n(\cos \theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta}$.

9. Calculer, pour tout entier naturel n , $U_n(1)$ en fonction de n .

• Méthode 1.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme la fonction U_n est polynomiale, alors elle est continue. De plus,

$$\frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)} \underset{\theta \rightarrow 0}{\sim} \frac{(n+1)\theta}{\theta} \underset{\theta \rightarrow 0}{\sim} (n+1).$$

Ainsi,

$$U_n(1) = \lim_{\theta \rightarrow 0} U_n(\cos(\theta)) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)} = n+1.$$

Finalement,

$\forall n \in \mathbb{N}, U_n(1) = n+1.$

• Méthode 2.

Par récurrence, posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{Q}_n : \ll U_n(1) = n+1 \gg$.

— $U_0(1) = 1 = 0+1$ et $U_1(1) = 2 \times 1 = 2 = 1+1$, donc $\mathcal{Q}_0$ et $\mathcal{Q}_1$ sont vraies.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{Q}_n$ et $\mathcal{Q}_{n+1}$ sont vraies.

Alors $U_{n+2}(1) = 2 \times 1 \times U_{n+1}(1) - U_n(1) = 2(n+2) - (n+1) = n+3$. Donc $\mathcal{Q}_{n+2}$ est vraie.

Ainsi, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n(1) = n+1$.

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que U_n admet n racines réelles, toutes situées dans $] -1, 1[$, que l'on explicitera.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\theta_k = \frac{k\pi}{n+1}$.

Alors (θ_k) est une suite croissante à valeur dans $]0, \pi[$ donc telle que $\sin \theta_k \neq 0$.

La fonction $\cos$ est strictement décroissante sur $[0, \pi]$, à valeurs dans $[-1, 1]$.

Donc, en notant $z_k = \cos \theta_k$, on a : $-1 < z_n < \dots < z_1 < 1$.

Puis, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$U_n(z_k) = U_n(\cos \theta_k) = \frac{\sin\left((n+1) \times \frac{k\pi}{n+1}\right)}{\sin \theta_k} = \frac{\sin(2k\pi)}{\sin \theta_k} = 0$$

Ainsi, nous avons trouvé n racines réelles distinctes de U_n , situées dans $] -1, 1[$.

b) Montrer que : $U_n = 2^n \prod_{k=1}^n \left(X - \cos \frac{k\pi}{n+1} \right)$.

Le polynôme U_n est de degré n , de coefficient dominant 2^n ,
on connaît n racines distinctes, il se factorise donc :

$$U_n = 2^n \prod_{k=1}^n (X - z_k) = 2^n \prod_{k=1}^n (X - \cos \theta_k)$$

$$U_n = 2^n \prod_{k=1}^n \left(X - \cos \frac{k\pi}{n+1} \right).$$

c) En déduire la valeur de $s_n := \prod_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{2(n+1)}$ en fonction de n .

En particulier, si on substitue la valeur 1 à X :

$$n+1 = U_n(1) = 2^n \prod_{k=1}^n \left(1 - \cos \frac{k\pi}{n+1} \right)$$

Or $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$, ce qui donne :

$$n+1 = 4^n \prod_{k=1}^n \sin^2 \frac{k\pi}{2(n+1)}$$

$$s_n := \prod_{k=1}^n \left(\sin \frac{k\pi}{2(n+1)} \right) = \frac{\sqrt{n+1}}{2^n}.$$

11. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On définit sur $]0, \pi[$ la fonction $g_n : \theta \mapsto \sin(\theta)U_n(\cos(\theta))$.

a) Montrer que g_n est solution, sur $]0, \pi[$, d'une équation différentielle de degré 2 que vous explicitez.

D'après la question précédente,

$$\forall \theta \in]0, \pi[, g_n(\theta) = \sin((n+1)\theta).$$

Ainsi, g_n est solution de l'équation différentielle

$$y'' + (n+1)^2 y = 0.$$

b) En déduire que, pour tout réel θ de $]0, \pi[$,

$$\sin^2 \theta \times U_n''(\cos \theta) - 3 \cos \theta \times U_n'(\cos \theta) + (n^2 + 2n) \times U_n(\cos \theta) = 0$$

En utilisant la dérivation des fonctions composées, pour tout $\theta \in]0, \pi[$,

$$\begin{aligned} g_n'(\theta) &= \cos(\theta)U_n(\cos(\theta)) - \sin^2(\theta)U_n'(\cos(\theta)) \\ g_n''(\theta) &= -\sin(\theta)U_n(\cos(\theta)) - 3 \cos(\theta) \sin(\theta)U_n'(\cos(\theta)) + \sin^3(\theta)U_n''(\cos(\theta)). \end{aligned}$$

Comme $g_n''(\theta) + n^2 g_n(\theta) = 0$, alors

$$-U_n(\cos(\theta)) - 3 \cos(\theta)U_n'(\cos(\theta)) + \sin^2(\theta)U_n''(\cos(\theta)) = 0.$$

Ainsi,

$$\forall \theta \in]0, \pi[, \sin^2 \theta \times U_n''(\cos \theta) - 3 \cos \theta \times U_n'(\cos \theta) + (n^2 + 2n) \times U_n(\cos \theta) = 0.$$

c) En déduire, pour tout entier naturel n :

$$(X^2 - 1)U_n'' + 3XU_n' - (n^2 + 2n)U_n = 0$$

Notons pour $n \in \mathbb{N}$, $Q_n = (X^2 - 1)U_n'' + 3XU_n' - (n^2 + 2n)U_n$.

Q_n est un polynôme qui vérifie d'après la question précédente :

$$\forall \theta \in]0, \pi[, Q_n(\cos \theta) = 0 \text{ (car } \cos^2 \theta - 1 = -\sin^2 \theta).$$

Ainsi, pour tout $u \in]-1, 1[= \cos]0, \pi[$, $Q_n(u) = 0$.

Par conséquent, Q_n admet une infinité de racines, donc Q_n est le polynôme nul.

pour tout entier naturel n : $(X^2 - 1)U_n'' + 3XU_n' - (n^2 + 2n)U_n = 0$.

12.a) On fixe $t \in]-1, 1[$ et $x \in]-1, 1[$, montrer que la série $\sum_{n \geq 0} U_n(x)t^n$ est convergente.

Indication : on pourra montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

On note pour tout $(x, t) \in]-1, 1[^2$, $U(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n(x)t^n$

$x \in]-1, 1[$. Donc il existe un unique $\theta (= \arccos x) \in]0, \pi[$ tel que $x = \cos \theta$.

Et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_n(x)| = |U_n(\cos \theta)| = \left| \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} \right| \leq \frac{1}{\sin \theta}$.

Ainsi, $(U_n(x))_n$ est majoré (pour la variable n), par $\frac{1}{\sin(\arccos x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_n(x)t^n| \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}|t|^n$.

Or la série à termes positifs $\sum \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}|t|^n$ est convergente (série géométrique de raison $|t| < 1$).

Ainsi, par comparaison des séries à termes positifs : $\sum |U_n(x)t^n|$ est convergente.

Par conséquent, la série $\sum_{n \geq 0} U_n(x)t^n$ est absolument convergente.

Donc $\sum_{n \geq 0} U_n(x)t^n$ est convergente.

b) Montrer que pour $(x, t) \in]-1, 1[^2$, $U(x, t) = \frac{1}{1 - 2xt + t^2}$.

On calculera $(1 - 2xt + t^2) \times U(x, t)$.

On fixe toujours $x, t \in]-1, 1[$.

$$\begin{aligned} (1 - 2xt + t^2) \sum_{n=0}^{+\infty} U_n(x)t^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} U_n(x)t^n - 2xt \sum_{n=0}^{+\infty} U_n(x)t^n + t^2 \sum_{n=0}^{+\infty} U_n(x)t^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} U_n(x)t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} 2xU_n(x)t^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} U_n(x)t^{n+2} \\ &= \left(U_0(x)t^0 + U_1(x)t + \sum_{n=2}^{+\infty} U_n(x)t^n \right) - \left(2xU_0(x)t + \sum_{n=1}^{+\infty} 2xU_n(x)t^{n+1} \right) + \sum_{n=0}^{+\infty} U_n(x)t^{n+2} \\ &= 1 + 2xt - 2xt + \sum_{n=2}^{+\infty} (U_n(x) - 2xU_{n-1}(x) + U_{n-2}(x))t^n \end{aligned}$$

car $U_0 = 1$, $U_1(x) = 2x$.

Et comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$, et tout $n \geq 2$, $U_n(x) - 2xU_{n-1}(x) + U_{n-2}(x) = 0$, on a :

pour tout $(x, t) \in]-1, 1[^2$, $(1 - 2xt + t^2) \sum_{n=0}^{+\infty} U_n(x)t^n = 1$ ou encore $U(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n(x)t^n = \frac{1}{(1 - 2xt + t^2)}$.

c) On définit la famille $(a_{k,n})_{(k,n) \in \mathbb{N}^2}$ en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \sum_{k=0}^n a_{k,n} X^k$.

On a donc $a_{k,n} = 0$ dès que $k > n$.

On fixe $x, t \in]-1, 1[$ tels que $|2(1+x)t| < 1$. Montrer que la famille $(a_{k,n} x^k t^n)_{(k,n) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable.

On admet que pour tout $0 \leq k \leq n$, $a_{k,n} = (-1)^{n-k} 2^n \sum_{I \subset \binom{\mathbb{N}_n}{n-k}} \left(\prod_{k \in I} \cos \frac{k\pi}{n+1} \right)$.

Pour montrer la sommabilité, on étudie la famille à termes positifs $(|a_{k,n} x^k t^n|)_{(k,n) \in \mathbb{N}^2}$.

Nous allons démontrer cette sommabilité, en exploitant (la condition suffisante) du théorème de sommation par paquets.

$\mathbb{N}^2 = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \{(k, n), k \in \mathbb{N}\}$.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(|a_{k,n} x^k t^n|)_{(k,n), n \in A_n} = (|a_{k,n} x^k t^n|)_{k \in \mathbb{N}}$ est sommable.

En effet, pour $k \in A_n$, $a_{k,n} = 0$ dès que $k > n$, donc la famille est nulle à partir d'un certain rang.

C'est donc une famille finie. Et $\sum_{k \in \mathbb{N}} |a_{k,n} x^k t^n| \leq \left(\sum_{k=0}^n |a_{k,n} x^k| \right) t^n$.

— Il suffit maintenant de démontrer la sommabilité de la famille $\left(\left(\sum_{k=0}^n |a_{k,n} x^k| \right) t^n \right)_{n \in \mathbb{N}}$.

Mais malheureusement, $\sum_{k=0}^n |a_{k,n} x^k| \neq \left| \sum_{k=0}^n a_{k,n} x^k \right| = |U_n(x)|$, ce qui aurait été pratique...

Fixons $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \leq n$, $a_{k,n} = [U_n]_k$.

Or $U_n = 2^n \prod_{k=1}^n \left(X - \cos \frac{k\pi}{n+1} \right)$, que l'on développe par relations coefficients racines.

Le coefficient obtenu devant X^k , qui est $a_{k,n}$ est la somme de tous les produits possibles du choix de k termes X et de $n-k$ termes de la forme $-\cos \frac{k\pi}{n+1}$.

On a donc, comme le dit l'énoncé :

$$a_{k,n} = 2^n \sum_{I \subset \binom{\mathbb{N}_n}{n-k}} \left(\prod_{k \in I} \left(-\cos \frac{k\pi}{n+1} \right) \right) = (-1)^{n-k} 2^n \sum_{I \subset \binom{\mathbb{N}_n}{n-k}} \left(\prod_{k \in I} \cos \frac{k\pi}{n+1} \right)$$

On peut alors majorer :

$$|a_{k,n}| \leq 2^n \sum_{I \subset \binom{\mathbb{N}_n}{n-k}} \left(\prod_{k \in I} \left| \cos \frac{k\pi}{n+1} \right| \right) \leq 2^n \sum_{I \subset \binom{\mathbb{N}_n}{n-k}} \prod_{k \in I} 1 \leq 2^n \text{card} \left(\binom{\mathbb{N}_n}{n-k} \right) = 2^n \binom{n}{n-k} = 2^n \binom{n}{k}$$

Et donc

$$\sum_{k=0}^n |a_{k,n} x^k| \leq \sum_{k=0}^n |a_{k,n}| |x^k| \leq \sum_{k=0}^n 2^n \binom{n}{k} x^k = (2(1+x))^n$$

Ainsi : $\left(\sum_{k=0}^n |a_{k,n} x^k| \right) t^n \leq (2t(1+x))^n$.

Et la série $\sum_{n \geq 0} (2t(1+x))^n$ est géométrique de raison $r := 2t(1+x) \in]-1, 1[$.

Par comparaison de série à terme positif, la série $\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n |a_{k,n} x^k| \right) t^n$ converge.

Pour $x, t \in]-1, 1[$ tels que $|2(1+x)t| < 1$, la famille $(a_{k,n} x^k t^n)_{(k,n) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable.

On notera qu'avec $x = \frac{1}{3}$ et $t = \frac{1}{8}$, $2(x+1)t = \frac{2 \times 4}{3} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{3} < 1$. L'ensemble n'est pas vide.

d) Montrer les deux égalités suivantes, pour tout $(x, t) \in]-1, 1[^2$ tels que $|2(1+x)t| < 1$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=k}^{+\infty} a_{k,n} t^n \right) x^k = \frac{1}{(1+t^2) - 2tx} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-2t)^k}{(1+t^2)^k} x^k$$

On a déjà vu que $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_{k,n} t^n \right) x^k = \frac{1}{(1+t^2) - 2tx}$.

Et comme la famille $(a_{k,n} x^k t^n)_{(k,n) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable, on peut même écrire :

$$\sum_{(k,n) \in \mathbb{N}^2} a_{k,n} x^k t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_{k,n} t^n \right) x^k = \frac{1}{(1+t^2) - 2tx}$$

Or on peut aussi, d'après le théorème de sommation par paquets, changer l'ordre de sommation :

$$\sum_{(k,n) \in \mathbb{N}^2} a_{k,n} x^k t^n = \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{k,n} x^k t^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{k,n} t^n \right) x^k$$

Or $a_{k,n} = 0$ si $n < k$, donc par transitivité de l'égalité :

$$\frac{1}{(1+t^2) - 2tx} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=k}^{+\infty} a_{k,n} t^n \right) x^k$$

Par ailleurs, pour tout $(x, t) \in]-1, 1[^2$,

$$\frac{1}{(1+t^2) - 2tx} = \frac{1}{1+t^2} \times \frac{1}{1 - \frac{2t}{1+t^2}x} = \frac{1}{1+t^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2t}{1+t^2} x \right)^n$$

où l'on a exploité le résultat bien connu sur la série géométrique de raison $\frac{2t}{1+t^2}x$.

Cela est permis, car $0 \leq (1+t)^2$, donc $0 \leq 1+2t+t^2$, donc $-2t \leq 1+t^2$;

et de même avec $0 \leq (1-t)^2$, on a $2t \leq 1+t^2$. Donc $|2t| \leq 1+t^2$.

Et ainsi, on a bien $\left| \frac{2t}{1+t^2}x \right| \leq x < 1$.

Alors, pour tout $(x, t) \in]-1, 1[^2$ tels que $|2(1+x)t| < 1$, $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=k}^{+\infty} a_{k,n} t^n \right) x^k = \frac{1}{(1+t^2) - 2tx} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-2t)^k}{(1+t^2)^k} x^k$.

e) On admet que la réponse à la question précédente permet de faire l'identification :

$$\forall t \in \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[, \forall k \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=k}^{+\infty} a_{k,n} t^n = \frac{(-2t)^k}{(1+t^2)^k}$$

En déduire que pour tout $\theta \in \left] -\arctan \frac{1}{2}, \arctan \frac{1}{2} \right[$, et tout $k \in \mathbb{N}$, $\sum_{h=0}^{+\infty} a_{k,k+h} \tan^h \theta = 2^k \cos^{2(k+1)} \theta$

On peut simplifier t^k (par prolongement par continuité, le résultat reste vrai en $t = 0$:

$$\forall t \in \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[, \forall k \in \mathbb{N}, \quad \sum_{h=0}^{+\infty} a_{k,k+h} t^h = \sum_{n=k}^{+\infty} a_{k,n} t^{n-k} = \frac{(-2)^k}{(1+t^2)^k}$$

Puis, pour $\theta \in \left] -\arctan \frac{1}{2}, \arctan \frac{1}{2} \right[$, en posant $t = \tan \theta \in] -1, 1[$, on trouve

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \sum_{h=0}^{+\infty} a_{k,h+k} \tan^h(\theta) = \frac{(-2)^k}{(1 + \tan^2 \theta)^k} = (-2)^k \cos^{2k} \theta$$

$$\text{car } 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$$

Ainsi, $\forall \theta \in \left] -\arctan \frac{1}{2}, \arctan \frac{1}{2} \right[$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\sum_{h=0}^{+\infty} a_{k,k+h} \tan^h(\theta) = (-2 \cos^2 \theta)^k$.

Partie III - Etude d'un produit scalaire

Dans la suite du problème, n désigne un entier naturel fixé tel que $n \geq 2$, et on note $E = \mathbb{R}_n[X]$, l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n .

On note L , l'application qui, à un polynôme P de E , associe le polynôme $L(P)$ défini par :

$$L(P) = (X^2 - 1)P'' + 3XP'$$

On considère également $\langle \cdot, \cdot \rangle$ l'application qui, à un couple (P, Q) de polynômes de E , associe le réel de $\langle P, Q \rangle$ défini par :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} P(x) Q(x) dx$$

Un réel μ est une valeur propre de L s'il existe $P \in E$, P non nul, tel que $L(P) = \mu P$.

On dit alors que P est un vecteur propre associé à la valeur propre μ .

13. Montrer que L est un endomorphisme de l'espace vectoriel E .

La (double) dérivation est linéaire sur l'ensemble des polynômes.

De même les applications $Q \mapsto S \times Q$ sont linéaires, pour tout polynôme S .

Ainsi, pour tout $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $P_1, P_2 \in E$

$$\begin{aligned} L(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) &= (X^2 - 1)(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)'' + 3X(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)' \\ &= (X^2 - 1)(\lambda_1 P_1'' + \lambda_2 P_2'') + 3X(\lambda_1 P_1' + \lambda_2 P_2') \\ &= \lambda_1 [(X^2 - 1)P_1'' + 3XP_1'] + \lambda_2 [(X^2 - 1)P_2'' + 3XP_2'] = \lambda_1 L(P_1) + \lambda_2 L(P_2) \end{aligned}$$

Ainsi L est linéaire sur E .

14. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E . Nous noterons $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée.

• $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}$.

• $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique :

$$\forall P, Q \in E, \quad \langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} P(x) Q(x) dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} Q(x) P(x) dx = \langle Q, P \rangle.$$

- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire :
 $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall P_1, P_2, Q \in E,$

$$\begin{aligned}\langle \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2, Q \rangle &= \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} (\lambda_1 P_1(x) + \lambda_2 P_2(x)) Q(x) dx \\ &= \lambda_1 \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} P_1(x) Q(x) dx + \lambda_2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} P_2(x) Q(x) dx \\ &= \lambda_1 \langle P_1, Q \rangle + \lambda_2 \langle P_2, Q \rangle\end{aligned}$$

par propriétés classiques et diverses de l'intégration.

Ainsi $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à gauche. Et par symétrie, elle est également linéaire à droite.

- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est positive :

$$\forall P \in E, \quad \langle P, P \rangle = \int_{-1}^1 \underbrace{\sqrt{1-x^2} P^2(x)}_{\geq 0} dx \geq 0$$

par intégration d'une fonction positive.

- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie :

$$\forall P \in E, \quad \langle P, P \rangle = 0 \Rightarrow \int_{-1}^1 \underbrace{\sqrt{1-x^2} P^2(x)}_{\geq 0} dx = 0 \Rightarrow \forall x \in [-1, 1], \sqrt{1-x^2} P(x) = 0$$

car si l'intégration d'une fonction continue et positive est nulle, alors cette fonction est identiquement nulle sur l'intervalle d'intégration.

Ainsi, $\forall x \in]-1, 1[, P(x) = 0$ (car $\sqrt{1-x^2} \neq 0$). Donc P admet une infinité de racines. Ainsi $P = 0$

$\langle \cdot, \cdot \rangle \text{ est un produit scalaire sur } E.$

15. Démontrer que, pour tous polynômes P, Q de E :

$$\langle L(P), Q \rangle = \langle P, L(Q) \rangle$$

Indication : On pourra, à l'aide d'une intégration par parties, montrer :

$$\langle L(P), Q \rangle = \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}} P'(x) Q'(x) dx$$

Soient $P, Q \in E$.

Faisons une intégration par parties en posant $u(x) = (1-x^2)^{3/2} P'$ de dérivée :

$$u'(x) = \frac{3}{2}(-2x)(1-x^2)^{1/2} P' + (1-x^2)^{3/2} P'' = -3x\sqrt{1-x^2} P' - \sqrt{1-x^2}(x^2-1)P''$$

et $v(x) = Q(x)$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1, 1]$:

$$\begin{aligned}\langle L(P), Q \rangle &= \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} L(P)(x) Q(x) dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} ((x^2-1)P''(x) + 3xP'(x)) Q(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 (-u'(x))v(x) dx = [-u(x)v(x)]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 u(x)v'(x) dx = 0 + \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}} P'(x) Q'(x) dx\end{aligned}$$

Or cette dernière expression est symétrique en (P, Q) , donc $\langle L(P), Q \rangle = \langle L(Q), P \rangle = \langle P, L(Q) \rangle$ par symétrie du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

$\text{Pour tout } P, Q \in E, \langle L(P), Q \rangle = \langle P, L(Q) \rangle.$

On dit que L est auto-adjointe pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

16. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, calculer $L(U_k)$.

En déduire que L possède des valeurs propres.

Soit $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. D'après la question ??, $(X^2 - 1)U_k'' + 3XU_k' - (k^2 + 2k)U_k = 0$.

$$\text{Donc } L(U_k) = (X^2 - 1)U_k'' + 3XU_k' = (k^2 + 2k)U_k.$$

17.a) Établir que $(U_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base orthogonale de E .

On a alors, pour $h, k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $k \neq h$.

$$(k^2 + 2k)\langle U_k, U_h \rangle = \langle L(U_k), U_h \rangle = \langle U_k, L(U_h) \rangle = (h^2 + 2h)\langle U_k, U_h \rangle$$

On a donc $((k^2 + 2k) - (h^2 + 2h))\langle U_k, U_h \rangle = 0$.

De plus, $x \mapsto x(x + 2)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, comme $k \neq h$, alors $h^2 + 2h \neq k^2 + 2k$.

On a nécessairement $\langle U_k, U_h \rangle = 0$.

La famille $(U_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une famille orthogonale de E , composée de vecteurs non nuls.

Ainsi $(U_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une famille libre, composée de $n + 1 = \dim E$ vecteurs de E . C'est une base de E .

$$\text{La famille } (U_k)_{0 \leq k \leq n} \text{ est une base orthogonale de } E.$$

b) Avec un changement de variable, pour tout entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, évaluer $\|U_k\|$.

La famille $(U_k)_{0 \leq k \leq n}$ est-elle une base orthonormée de E ?

Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\psi : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$, $\theta \mapsto \cos \theta$ est $\mathcal{C}^1$ -bijective (continue strictement décroissante).

On peut faire le changement de variable : $x = \cos \theta$, on a alors $dx = -\sin \theta d\theta$.

On se souvient que $U_k(\cos \theta) = \frac{\sin(k+1)\theta}{\sin \theta}$:

$$\begin{aligned} \|U_k\|^2 &= \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} U_k^2(x) dx = \int_{\pi}^0 \sin \theta \left(\frac{\sin(k+1)\theta}{\sin \theta} \right)^2 (-\sin \theta) d\theta = \int_0^{\pi} \sin^2((k+1)\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos(2(k+1)\theta)) d\theta = \frac{\pi}{2} - \left[\frac{1}{4(k+1)} \sin(2(k+1)\theta) \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

où on a linéarisé $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$.

$$\text{pour tout entier } k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \|U_k\| = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad - \text{ indépendant de } k!$$

En revanche, la famille $(W_k)_{0 \leq k \leq n}$ telle que $W_k = \sqrt{\frac{2}{\pi}} U_k$, est une base orthonormée de E .

18. Montrer que, pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\text{vect}(U_k, U_{k+1}, \dots, U_n)^\perp = \mathbb{R}_{k-1}[X]$.

Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\deg U_i = i$ d'après 1.

La famille $(U_i)_{0 \leq i \leq k-1}$ est une famille (de degré) échelonné/étagé.

Il s'agit donc d'une famille libre de $k = \dim \mathbb{R}_{k-1}[X]$ éléments de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$.

Ainsi $(U_0, U_1, \dots, U_{k-1})$ est une base de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$.

Pour tout $P \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$, il existe donc $a_0, a_1, \dots, a_{k-1} \in \mathbb{R}$ tel que $P = \sum_{i=1}^{k-1} a_i U_i$.

Et donc pour tout $j \in \llbracket k, n \rrbracket$,

$$\langle P, U_j \rangle = \sum_{i=0}^{k-1} a_i \langle U_i, U_j \rangle = \sum_{i=0}^{k-1} a_i \times 0 = 0$$

Donc $P \in \text{vect}(U_k, U_{k+1}, \dots, U_n)^\perp$.

On a donc l'inclusion : $\mathbb{R}_{k-1}[X] \subset \text{vect}(U_k, U_{k+1}, \dots, U_n)^\perp$.

Par ailleurs, la famille $(U_k, \dots, U_n)$ étant libre (de degré échelonné, ou sous-famille d'une famille libre), on a $\dim(\text{vect}(U_k, U_{k+1}, \dots, U_n)) = n - k + 1$.

On a donc $\dim(\text{vect}(U_k, U_{k+1}, \dots, U_n)^\perp) = \dim E - (n - k + 1) = (n + 1) - (n - k + 1) = k = \dim \mathbb{R}_{k-1}[X]$.

Ainsi par simple inclusion et égalité des dimensions :

pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\text{vect}(U_k, U_{k+1}, \dots, U_n)^\perp = \mathbb{R}_{k-1}[X]$.

19.a) On considère $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

On note pour $R \in E$, $d_k(R) := \inf\{\|R - S\|, S \in \mathbb{R}_{k-1}[X]\}$ la distance de R à l'espace $\mathbb{R}_{k-1}[X]$.

Montrer (cours) que, pour tout $R \in E$, $d_k^2(R) = \|R - \bar{R}\|^2$ où $\bar{R}$ est le projeté orthogonal de R sur $\mathbb{R}_{k-1}[X]$.

On considère $R \in E$. On note $\bar{R}$, le projeté orthogonal de R sur $\mathbb{R}_{k-1}[X]$.

On a donc $R = \bar{R} + (R - \bar{R})$ avec $\bar{R} \perp (R - \bar{R})$ i.e. $\langle \bar{R}, R - \bar{R} \rangle = 0$ Et donc en passant à la norme (au carré) (pour le produit $\langle \cdot, \cdot \rangle$), pour tout $S \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$:

$$\|R - S\|^2 = \|\bar{R} - S + (R - \bar{R})\|^2 = \|\bar{R} - S\|^2 + \|R - \bar{R}\|^2$$

$$\text{car } \underbrace{\langle \bar{R} - S, R - \bar{R} \rangle}_{\substack{\in \mathbb{R}_{k-1}[X] \text{ , } \\ \in (\mathbb{R}_{k-1}[X])^\perp}} = 0.$$

Comme il s'agit de l'addition de deux nombres positifs :

$$\forall S \in \mathbb{R}_{k-1}[X], \quad \|R - S\|^2 \geq \|R - \bar{R}\|^2$$

avec égalité si et seulement si $\|\bar{R} - S\|^2 = 0$ i.e. si et seulement si $S = \bar{R}$.

Ainsi, le cas d'égalité est possible (atteint) :

$d_k^2(R) = \|R - \bar{R}\|^2 \text{ où } \bar{R} \text{ est le projeté orthogonal de } R \text{ sur } \mathbb{R}_{k-1}[X].$

b) Application. Évaluer $\inf \left\{ \int_{-1}^1 \sqrt{1 - t^2} \left(\frac{1}{2\pi} t^2 - t + at + b \right)^2 dt; a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

Il s'agit donc d'un calcul de distance

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1 - t^2} \left(\frac{1}{2\pi} t^2 - t + at + b \right)^2 dt = \|(R - S)\|^2 \quad \text{où } S = aX + b \in \mathbb{R}_1[X] \text{ et } R = \frac{1}{2\pi} X^2 - X$$

On a donc :

$$R = \frac{1}{2\pi} X^2 - X = \frac{1}{8\pi} (4X^2 - 1) + \frac{1}{8\pi} - \frac{1}{2} (2X) = \frac{1}{8\pi} U_2 - \frac{1}{2} U_1 + \frac{1}{8\pi} U_0$$

Et la distance est minimisée en $S = \bar{R}$, projeté orthogonal de R sur $\mathbb{R}_1[X] = \text{vect}(U_0, U_1)$.

Ainsi $\bar{R} = -\frac{1}{2} U_1 + \frac{1}{8\pi} U_0$, puisque $U_2 \perp U_1$ et $U_2 \perp U_0$.

Alors

$$\inf \left\{ \int_{-1}^1 \sqrt{1 - t^2} \left(\frac{1}{2\pi} t^2 - t + at + b \right)^2 dt; a, b \in \mathbb{R} \right\} = \|R - \bar{R}\|^2 = \left\| \frac{1}{8\pi} U_2 \right\|^2 = \frac{1}{8^2 \pi^2} \times \frac{\pi}{2}$$

d'après un calcul précédent.

$$\boxed{\text{On a donc } \inf \left\{ \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \left(\frac{1}{2\pi} t^2 - t + at + b \right)^2 dt; a, b \in \mathbb{R} \right\} = \frac{1}{128\pi}.}$$

20. On sait que L possède des valeurs propres. On note $\mu_0 < \dots < \mu_s$ toutes les valeurs propres de L . Pour tout $i \in \llbracket 0, s \rrbracket$, soit P_i un vecteur propre associé à la valeur propre μ_i , i.e. : $\forall i \in \llbracket 0, s \rrbracket, L(P_i) = \mu_i P_i$.

a) Soit μ une valeur propre de L et P un vecteur propre associé. Montrer que, pour $k \in \mathbb{N}$, $L^k(P) = \mu^k P$.

On démontre ce résultat par récurrence. Elle est beaucoup plus immédiate que les précédentes, on peut être plus négligeant pour la rédaction.

$L^0(P) = \text{id}(P) = P = \mu^0 \cdot P$, donc la relation est vraie pour $k = 0$.

Supposons qu'elle est vraie pour un $k \in \mathbb{N}$ fixé quelconque. Alors

$$L^{k+1}(P) = L(L^k(P)) = L(\mu^k \cdot P) = \mu^k L(P) = \mu^{k+1} P$$

où on a appliqué la relation à l'ordre k et la linéarité de L . Le résultat est vrai à l'ordre $k + 1$.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout entier } k \in \mathbb{N}, L^k(P) = \mu^k \cdot P.}$$

b) En exploitant, au choix un déterminant de Vandermonde ou un polynôme d'interpolation de Lagrange bien choisi, montrer que $(P_i)_{0 \leq i \leq s}$ est une famille libre.

Soient $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq s}$, une famille de réels (scalaires) telle que $\sum_{i=0}^s \lambda_i P_i = 0$.

Si l'on compose par L^k , par linéarité, il vient :

$$0 = L^k(0) = L^k \left(\sum_{i=0}^s \lambda_i P_i \right) = \sum_{i=0}^s \lambda_i L^k(P_i) = \sum_{i=0}^s \lambda_i \mu_i^k P_i \quad (E_k)$$

On a donc obtenu un nombre infini d'équations (E_k) . Elle sont linéaires mais les inconnues sont des polynômes $\lambda_i P_i$.

On aimerait pouvoir arranger ces équations (combinaisons linéaires) de manière à retrouver plus qu'un seul $\lambda_h P_h$.

Encore autrement écrit, on cherche des nombres $a_0, a_1, \dots$ tel que $\sum_{k=0}^{r-1} a_k E_k = \lambda_h E_h$.

• Méthode 1 : Déterminant de Vandermonde.

Il s'agit de résoudre le système (que l'on choisit carré pour qu'il puisse être inversible) :

$$\left\{ \begin{array}{cccc|c} \lambda_0 P_0 & + \lambda_1 P_1 & + \dots & + \lambda_s P_s & = 0 & (E_0) \\ \mu_0 \lambda_0 P_0 & + \mu_1 \lambda_1 P_1 & + \dots & + \mu_s \lambda_s P_s & = 0 & (E_1) \\ \vdots & & & & & \\ \mu_0^s \lambda_0 P_0 & + \mu_1^s \lambda_1 P_1 & + \dots & + \mu_s^s \lambda_s P_s & = 0 & (E_s) \end{array} \right.$$

Comme les polynômes $P_0, \dots, P_s$ sont non nuls, ils possèdent chacun au plus n racines (ce sont des polynômes de degré au plus n), il existe donc un réel z_0 tel que pour tout $k \in \llbracket 0, s \rrbracket$, $P_k(z_0) \neq 0$.

Alors,

$$\left\{ \begin{array}{cccc|c} \lambda_0 P_0(z_0) & + \lambda_1 P_1(z_0) & + \dots & + \lambda_s P_s(z_0) & = 0 \\ \mu_0 \lambda_0 P_0(z_0) & + \mu_1 \lambda_1 P_1(z_0) & + \dots & + \mu_s \lambda_s P_s(z_0) & = 0 \\ \vdots & & & & \\ \mu_0^s \lambda_0 P_0(z_0) & + \mu_1^s \lambda_1 P_1(z_0) & + \dots & + \mu_s^s \lambda_s P_s(z_0) & = 0 \end{array} \right.$$

Ainsi, en notant V la matrice de Vandermonde $((\mu_j)^i)_{0 \leq i, j \leq s}$ et $X = \begin{pmatrix} \lambda_0 P_0(z_0) \\ \vdots \\ \lambda_s P_s(z_0) \end{pmatrix}$, le système s'écrit

$$VX = 0_{s+1,1}.$$

Comme les (μ_j) sont deux à deux disjoints, d'après les déterminants de Vandermonde, V est inversible. Ainsi, $X = 0_{s+1,1}$.

Comme $\forall k \in \llbracket 0, s \rrbracket$, $P_k(z_0) \neq 0$, alors $\forall k \in \llbracket 0, s \rrbracket$, $\lambda_k = 0$.

• Méthode 2 : Polynôme interpolateur de Lagrange (qui donne V^{-1} directement).

Soit $k \in \llbracket 0, s \rrbracket$. Soit $L_k = \prod_{j \neq k} \frac{X - \mu_j}{\mu_k - \mu_j}$, alors pour tout $h \in \llbracket 0, s \rrbracket$, $L_k(\mu_h) = \delta_{k,h}$.

Si on développe L_k , de degré (au plus) $s - 1$, on trouve $L_k = \sum_{j=0}^{s-1} x_j X^j$.

$$\text{Donc } L_k(\mu_h) = \delta_{h,k} = \sum_{j=0}^{s-1} x_j \mu_h^j. \text{ Ainsi}$$

$$0 = \sum_{j=0}^{s-1} x_j L^j(0) = \sum_{j=0}^{s-1} x_j \left(\sum_{i=0}^s \lambda_i \mu_i^j P_i \right) = \sum_{i=0}^s \lambda_i \left(\sum_{j=0}^{s-1} x_j \mu_i^j \right) \cdot P_i = \sum_{i=0}^s \lambda_i L_k(\mu_i) P_i = \sum_{i=0}^s \lambda_i \delta_{i,k} P_i = \lambda_k P_k$$

Or $P_k \neq 0$ (car c'est un vecteur propre), donc $\lambda_k = 0$.

Ainsi la famille $(P_i)_{0 \leq i \leq s}$ est une famille libre.

c) En déduire que $s \leq n$.

Toute famille libre de polynômes de E a nécessairement un cardinal inférieur à la dimension de l'espace E .

Or le cardinal de cette famille est égal à $s + 1$.

$$\text{Donc } s + 1 \leq \dim E = n + 1.$$

d) En utilisant la famille $(U_k)_{0 \leq k \leq n}$, montrer que $s = n$

et en déduire que, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\text{Ker}(L - k(k+2)\text{Id}_{\mathbb{R}[X]}) = \text{Vect}\{U_k\}$.

D'après la question ??, $\{k(k+2), k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$ est un ensemble de valeurs propres distinctes de L . Ainsi, $s \geq n$.

Finalement, $s = n$.

De plus, comme $k \mapsto k(k+2)$ est croissante, alors

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mu_k = k(k+2).$$

Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Notons $E_k = \text{Ker}(L - k(k+2)\text{Id}_{\mathbb{R}[X]})$.

D'une part, $U_k \in E_k$, donc $\text{Vect}\{U_k\} \subset E_k$.

D'autre part, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, notons $(P_{k,1}, \dots, P_{k,r_k})$ une base de E_k . D'après le point précédent, $r_k \geq 1$.

En reprenant l'argument des déterminants de Vandermonde, la famille $(P_{0,1}, \dots, P_{0,r_1}, \dots, P_{n,1}, \dots, P_{n,r_n})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Comme $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n + 1$, alors $r_1 = \dots = r_n = 1$.

Ainsi, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\dim(E_k) = 1$ et $E_k = \text{Vect}\{U_k\}$.

Partie IV - Étude d'une fonction définie par la somme d'une série convergente

21.a) Montrer que, pour tout couple $(x, y) \in ([0, +\infty[)^2$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n+x)(n+y)}$ et la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n+x)^2(n+y)}$ convergent.

Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$.

Pour tout entier naturel n non nul, posons

$$u_n(x, y) = \frac{1}{(n+x)(n+y)} \text{ et } v_n(x, y) = \frac{1}{(n+x)^2(n+y)}.$$

Comme x et y sont positifs et $n \geq 1$, alors, $u_n(x, y)$ et $v_n(x, y)$ sont bien définis.

D'une part, $u_n(x, y) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$. Ainsi, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs,

comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, alors $\sum u_n(x, y)$ converge.

D'autre part, $v_n(x, y) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^3}$. Ainsi, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs,

comme $\sum \frac{1}{n^3}$ converge, alors $\sum v_n(x, y)$ converge.

Ainsi,

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2, \sum \frac{1}{(n+x)(n+y)} \text{ et } \sum \frac{1}{(n+x)^2(n+y)} \text{ convergent.}$$

b) Soit $(x, y) \in ([0, +\infty[)^2$, pour quelle valeur de (α, β) , la famille $\left(\frac{1}{(n+x)^\alpha(m+y)^\beta} \right)_{(n,m) \in \mathbb{N}^{*2}}$ est-elle sommable .

Le terme de la famille : $\frac{1}{(n+x)^\alpha(m+y)^\beta} \in \mathbb{R}$.

On a donc l'équivalence :

$$\left(\frac{1}{(n+x)^\alpha(m+y)^\beta} \right)_{(n,m) \in \mathbb{N}^2} \text{ est sommable si et seulement si :}$$

$$\begin{cases} 1. \forall n \in \mathbb{N}^*, \left(\frac{1}{(n+x)^\alpha(m+y)^\beta} \right)_{m \in \mathbb{N}^*} \text{ est sommable.} \\ 2. (s_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est sommable (où l'on a noté } s_n = \sum_{m \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{(n+x)^\alpha(m+y)^\beta} \right)_{(n,m) \in \mathbb{N}^2}). \end{cases}$$

Notons qu'on a la liberté sur le choix de la sommation par paquets disjoints...

1. Or ici, pour $n \in \mathbb{N}$:

$\left(\frac{1}{(n+x)^\alpha(m+y)^\beta} \right)_{m \in \mathbb{N}^*}$ est sommable si et seulement si la série $\sum_{m \geq 0} \left(\frac{1}{(n+x)^\alpha(m+y)^\beta} \right)_{m \in \mathbb{N}^2}$ converge.

$$\text{Or } \frac{1}{(n+x)^\alpha(m+y)^\beta} \underset{m \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(n+x)^\alpha} \frac{1}{m^\beta}.$$

Et par comparaison de série à termes positifs, puisque $\sum_{m \geq 1} \frac{1}{(n+x)^\alpha} \frac{1}{m^\beta}$ converge si et seulement $\beta > 1$,

on peut affirmer que $\left(\frac{1}{(n+x)^\alpha(m+y)^\beta} \right)_{m \in \mathbb{N}^*}$ est sommable si et seulement si $\beta > 1$.

On considère donc $\beta > 1$ (sinon la famille sur $\mathbb{N}^{*2}$ n'est pas sommable, quel que soit α).

$$\text{On note } A_\beta(y) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{(m+y)^\beta} = \sum_{m \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{(m+y)^\beta}.$$

2. Il faut et il suffit d'ajouter maintenant que $\left(\frac{1}{(n+x)^\alpha} A_\beta(y) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est sommable si et seulement si $\alpha > 1$, pour les mêmes raisons.

Pour $(x, y) \in ([0, +\infty[)^2$, la famille $\left(\frac{1}{(n+x)^\alpha(m+y)^\beta}\right)_{(n,m) \in \mathbb{N}^{*2}}$ est sommable si et seulement si α et $\beta > 1$.

c) Montrer que, pour tout $x \in [0, +\infty[$, la série $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$ converge.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

Si $x = 0$, la série est la suite nulle, donc est convergente.

Si $x \neq 0$. Pour tout entier naturel n non nul, $n+x \neq 0$, donc la série est bien définie. De plus,

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \frac{x}{n(n+x)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{n^2}.$$

Comme $\sum \frac{x}{n^2}$ converge, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$ converge.

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \sum \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right) \text{ converge.}$$

On note S , l'application définie, pour tout $x \in [0, +\infty[$, par $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$.

22. Calculer $S(0)$ et $S(1)$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Pour tout $N \geq 1$, notons $S_N(x) = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$.

Lorsque $x = 0$. Soit $N \geq 1$.

$$S_N(0) = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+0}\right) = 0.$$

Ainsi, $S(0) = 0$.

Lorsque $x = 1$. Soit $N \geq 1$. En reconnaissant une somme télescopique,

$$S_N(1) = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1}.$$

Ainsi, $S(1) = 1$.

Finalement,

$$S(0) = 0 \text{ et } S(1) = 1.$$

23.a) Établir : $\forall (x, y) \in ([0, +\infty[)^2$, $S(y) - S(x) = (y-x) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)(n+y)}$.

Soient $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$ et $N \geq 1$.

$$\begin{aligned} S_N(y) - S_N(x) &= \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+y}\right) - \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right) \\ &= \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+y}\right) = \sum_{n=1}^N \frac{y-x}{(n+y)(n+x)}. \end{aligned}$$

Comme ces suites convergent, en passant à la limite $N \rightarrow +\infty$,

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2, S(y) - S(x) = (y - x) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)(n+y)}$$

b) En déduire que S est lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.

Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} |S(x) - S(y)| &= |y - x| \times \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{(n+x)(n+y)}}_{\in [0, \frac{1}{n^2}]} \right| \\ &\leq |y - x| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{\pi^2}{6} |y - x|. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$S \text{ est } \frac{\pi^2}{6}\text{-lipschitzienne sur } \mathbb{R}_+.$$

c) Montrer alors que la fonction S est continue sur $[0, +\infty[$. Est-elle uniformément continue sur $[0, +\infty[$?

Toute fonction lipschitzienne est continue, donc S est continue sur $\mathbb{R}_+$.

De manière analogue, toute fonction lipschitzienne est uniformément continue, donc

$$S \text{ est continue et uniformément continue.}$$

24.a) Montrer, que pour tout couple (x, y) de $([0, +\infty[)^2$ tel que $x \neq y$:

$$\left| \frac{S(y) - S(x)}{y - x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \right| \leq |y - x| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$$

Soient $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$ tels que $x \neq y$ et $N \geq 1$.

$$\begin{aligned} \left| \frac{S_N(y) - S_N(x)}{y - x} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{(n+x)^2} \right| &= \left| \sum_{n=1}^N \frac{1}{(n+x)(n+y)} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{(n+x)^2} \right| \\ &= \left| \sum_{n=1}^N \frac{x - y}{(n+x)^2(n+y)} \right| \\ &= |x - y| \sum_{n=1}^N \frac{1}{(n+x)^2(n+y)} \\ &\leq |x - y| \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^3}. \end{aligned}$$

Comme ces suites convergent, en passant à la limite dans l'inégalité,

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2, \left| \frac{S(y) - S(x)}{y - x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \right| \leq |y - x| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

b) En déduire que la fonction S est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. D'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{S(y) - S(x)}{y - x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}.$$

Ainsi, S est dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}.$$

c) Préciser les valeurs de $S'(0)$ et de $S'(1)$.

D'après la question précédente,

$$S'(0) = \frac{\pi^2}{6} \text{ et } S'(1) = \frac{\pi^2}{6} - 1.$$

25. Soit $x \in]0, +\infty[$ fixé. On note φ la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par :

$$\forall t \in [1, +\infty[, \quad \varphi(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}$$

a) Évaluer, pour tout $T > 1$, la quantité $L_T(x) := \int_1^T \varphi(t) dt$, puis montrer que $T \mapsto L_T(x)$ admet une limite pour $T \rightarrow +\infty$. On notera $L(x)$ cette limite.

Soit $T > 1$. En utilisant la primitive de la fonction logarithme neperien,

$$\begin{aligned} L_T(x) &= \int_1^T \frac{dt}{t} - \int_1^T \frac{dt}{t+x} \\ &= \ln(T) - (\ln(T+x) - \ln(1+x)) \\ &= \ln\left(\frac{T}{T+x}\right) + \ln(1+x). \end{aligned}$$

Comme $\lim_{T \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{T}{T+x}\right) = 0$, alors

$$\forall T > 1, \quad L_T(x) = \ln\left(\frac{T}{T+x}\right) + \ln(1+x) \text{ et } L(x) = \lim_{T \rightarrow +\infty} L_T = \ln(1+x).$$

b) Montrer que $L(x) \leq S(x) \leq L(x) + 1$.

Soit $t \in [1, +\infty[$. Comme $\varphi(t) = \frac{x}{t(t+x)}$ et $x > 0$, alors φ est décroissante.

Ainsi, en utilisant la croissance de l'intégrale, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\varphi(n+1) \leq \int_n^{n+1} \varphi(t) dt \leq \varphi(n).$$

D'une part, d'après la relation de Chasles,

$$\sum_{n=1}^N \int_n^{n+1} \varphi(t) dt \leq \sum_{n=1}^N \varphi(n)$$

$$L_{N+1}(x) = \int_1^{N+1} \varphi(t) dt \leq S_N(x).$$

Comme ces quantités possèdent une limite lorsque $N \rightarrow +\infty$, alors

$$L(x) \leq S(x).$$

D'autre part,

$$\varphi(n+1) \leq \int_n^{n+1} \varphi(t) dt$$

$$\sum_{n=2}^{N+1} \varphi(n) \leq \int_1^{N+1} \varphi(t) dt$$

$$S_N(x) - 1 + \frac{1}{1+x} \leq L_{N+1}(x)$$

$$S_N(x) \leq L_{N+1} + 1.$$

Comme ces quantités possèdent une limite lorsque $N \rightarrow +\infty$, alors

$$S(x) \leq L(x) + 1.$$

Ainsi,

$\forall x > 0, L(x) \leq S(x) \leq L(x) + 1.$

c) Déterminer un équivalent de $S(x)$ pour $x \rightarrow +\infty$.

Comme $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 1 + \ln(1+x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(x)$, en utilisant l'encadrement précédent,

$S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(x).$

26. Tracer l'allure de la courbe représentative de S .

La fonction S est croissante et équivalente à $\ln$ en $+\infty$.

En 0, la fonction S possède une demi-tangente d'équation $y = \frac{\pi^2}{6}x$.

En 1, la fonction S possède une demi-tangente d'équation $y = \left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right)(x - 1) + 1$.

Comme $\pi^2 \simeq 10$, on obtient $\frac{\pi^2}{6} \simeq 1.6$.

On obtient le graphe suivant

