

DEVOIR SURVEILLÉ N°10

Sujet donné le samedi 30 mai 2026, 4h.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**. Les réponses aux questions seront numérotées et séparées par un trait horizontal. Les résultats essentiels devront être encadrés ou soulignés.

BON TRAVAIL

ÉTUDE ET APPLICATIONS DE POLYNÔMES DE TCHEBYCHEV

On considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$U_0 = 1, \quad U_1 = 2X \quad \text{et, pour tout entier } n \geq 2, \quad U_n = 2XU_{n-1} - U_{n-2}$$

On pourra confondre polynôme et fonction polynomiale. Ainsi, pour tout entier $n \geq 2$ et tout $x \in \mathbb{C}$,

$$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x)$$

Partie I - Calcul de la somme d'une série convergente

1. Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(nt) \, dt = \frac{1}{n^2}$$

2. Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $t \in]0, \pi]$:

$$\sum_{n=1}^m \cos(nt) = \frac{\cos \frac{(m+1)t}{2} \sin \frac{mt}{2}}{\sin \frac{t}{2}}$$

3. Soit $u : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$

a) Montrer que si u est de classe $\mathcal{C}^1$,

$$\int_0^\pi u(t) \sin(\lambda t) \, dt \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0$$

b) Montrer que le résultat reste vrai si u est seulement supposée continue.

Indication : plus généralement, on démontre que le résultat est vrai pour toute fonction uniformément proche de fonctions en escalier sur $[0, \pi]$.

4. Soit $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(t) = \begin{cases} \frac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2 \sin \frac{t}{2}} & \text{si } t \in]0, \pi] \\ -1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

5.a) Montrer que pour tout entier $m \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi f(t) \sin\left(\frac{(2m+1)t}{2}\right) \, dt$.

b) Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ et montrer : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Partie II - Étude de la suite de polynômes $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$

6. Calculer U_2 et U_3

7. Démontrer que, pour tout entier naturel n , U_n est un polynôme de degré n , dont on déterminera le coefficient du terme de degré n et la parité.

8. Soit $\theta \in]0, \pi[$. Pour tout n entier naturel, on pose $S_n(\theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $S_n(\theta) + S_{n-2}(\theta)$ en fonction de $S_{n-1}(\theta)$.

b) Établir, pour tout entier naturel n ;

$$U_n(\cos \theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$$

9. Calculer, pour tout entier naturel n , $U_n(1)$ en fonction de n .

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que U_n admet n racines réelles, toutes situées dans $] -1, 1[$, que l'on explicitera.

b) Montrer que : $U_n = 2^n \prod_{k=1}^n \left(X - \cos \frac{k\pi}{n+1} \right)$.

c) En déduire la valeur de $s_n := \prod_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{2(n+1)}$ en fonction de n .

11. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On définit sur $]0, \pi[$ la fonction $g_n : \theta \mapsto \sin(\theta)U_n(\cos(\theta))$.

a) Montrer que g_n est solution, sur $]0, \pi[$, d'une équation différentielle de degré 2 que vous explicitez.

b) En déduire que, pour tout réel θ de $]0, \pi[$,

$$\sin^2 \theta \times U_n''(\cos \theta) - 3 \cos \theta \times U_n'(\cos \theta) + (n^2 + 2n) \times U_n(\cos \theta) = 0$$

c) En déduire, pour tout entier naturel n :

$$(X^2 - 1)U_n'' + 3XU_n' - (n^2 + 2n)U_n = 0$$

12.a) On fixe $t \in] -1, 1[$ et $x \in] -1, 1[$, montrer que la série $\sum_{n \geq 0} U_n(x)t^n$ est convergente.

Indication : on pourra montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

On note pour tout $(x, t) \in] -1, 1[^2$, $U(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n(x)t^n$

b) Montrer que pour $(x, t) \in] -1, 1[^2$, $U(x, t) = \frac{1}{1 - 2xt + t^2}$.

On calculera $(1 - 2xt + t^2) \times U(x, t)$.

c) On définit la famille $(a_{k,n})_{(k,n) \in \mathbb{N}^2}$ en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \sum_{k=0}^n a_{k,n} X^k$.

On a donc $a_{k,n} = 0$ dès que $k > n$.

On fixe $x, t \in] -1, 1[$ tels que $|2(1+x)t| < 1$. Montrer que la famille $(a_{k,n} x^k t^n)_{(k,n) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable.

On admet que pour tout $0 \leq k \leq n$, $a_{k,n} = (-1)^{n-k} 2^n \sum_{I \subset \binom{\mathbb{N}_n}{n-k}} \left(\prod_{k \in I} \cos \frac{k\pi}{n+1} \right)$.

d) Montrer les deux égalités suivantes, pour tout $(x, t) \in] -1, 1[^2$ tels que $|2(1+x)t| < 1$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=k}^{+\infty} a_{k,n} t^n \right) x^k = \frac{1}{(1+t^2) - 2tx} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-2t)^k}{(1+t^2)^k} x^k$$

e) On admet que la réponse à la question précédente permet de faire l'identification :

$$\forall t \in \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[, \forall k \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=k}^{+\infty} a_{k,n} t^n = \frac{(-2t)^k}{(1+t^2)^k}$$

En déduire que pour tout $\theta \in \left] -\arctan \frac{1}{2}, \arctan \frac{1}{2} \right[$, et tout $k \in \mathbb{N}$, $\sum_{h=0}^{+\infty} a_{k,k+h} \tan^h \theta = 2^k \cos^{2(k+1)} \theta$

Partie III - Etude d'un produit scalaire

Dans la suite du problème, n désigne un entier naturel fixé tel que $n \geq 2$, et on note $E = \mathbb{R}_n[X]$, l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n .

On note L , l'application qui, à un polynôme P de E , associe le polynôme $L(P)$ défini par :

$$L(P) = (X^2 - 1)P'' + 3XP'$$

On considère également $\langle \cdot, \cdot \rangle$ l'application qui, à un couple (P, Q) de polynômes de E , associe le réel de $\langle P, Q \rangle$ défini par :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} P(x) Q(x) dx$$

Un réel μ est une valeur propre de L s'il existe $P \in E$, P non nul, tel que $L(P) = \mu P$.

On dit alors que P est un vecteur propre associé à la valeur propre μ .

13. Montrer que L est un endomorphisme de l'espace vectoriel E .

14. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E . Nous noterons $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée.

15. Démontrer que, pour tous polynômes P, Q de E :

$$\langle L(P), Q \rangle = \langle P, L(Q) \rangle$$

Indication : On pourra, à l'aide d'une intégration par parties, montrer :

$$\langle L(P), Q \rangle = \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}} P'(x) Q'(x) dx$$

16. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, calculer $L(U_k)$.

En déduire que L possède des valeurs propres.

17.a) Établir que $(U_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base orthogonale de E .

b) Avec un changement de variable, pour tout entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, évaluer $\|U_k\|$.

La famille $(U_k)_{0 \leq k \leq n}$ est-elle une base orthonormée de E ?

18. Montrer que, pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\text{vect}(U_k, U_{k+1}, \dots, U_n)^\perp = \mathbb{R}_{k-1}[X]$.

19.a) On considère $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

On note pour $R \in E$, $d_k(R) := \inf\{\|R - S\|, S \in \mathbb{R}_{k-1}[X]\}$ la distance de R à l'espace $\mathbb{R}_{k-1}[X]$.

Montrer (cours) que, pour tout $R \in E$, $d_k^2(R) = \|R - \bar{R}\|^2$ où $\bar{R}$ est le projeté orthogonale de R sur $\mathbb{R}_{k-1}[X]$.

b) Application. Évaluer $\inf \left\{ \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \left(\frac{1}{2\pi} t^2 - t + at + b \right)^2 dt; a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

20. On sait que L possède des valeurs propres. On note $\mu_0 < \dots < \mu_s$ toutes les valeurs propres de L .

Pour tout $i \in \llbracket 0, s \rrbracket$, soit P_i un vecteur propre associé à la valeur propre μ_i , i.e. : $\forall i \in \llbracket 0, s \rrbracket, L(P_i) = \mu_i P_i$.

a) Soit μ une valeur propre de L et P un vecteur propre associé. Montrer que, pour $k \in \mathbb{N}$, $L^k(P) = \mu^k P$.

b) En exploitant, au choix un déterminant de Vandermonde ou un polynôme d'interpolation de Lagrange bien choisi, montrer que $(P_i)_{0 \leq i \leq s}$ est une famille libre.

c) En déduire que $s \leq n$.

d) En utilisant la famille $(U_k)_{0 \leq k \leq n}$, montrer que $s = n$

et en déduire que, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\text{Ker}(L - k(k+2)\text{Id}_{\mathbb{R}[X]}) = \text{Vect}\{U_k\}$.

Partie IV - Étude d'une fonction définie par la somme d'une série convergente

21.a) Montrer que, pour tout couple $(x, y) \in ([0, +\infty[)^2$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n+x)(n+y)}$ et la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n+x)^2(n+y)}$ convergent.

b) Soit $(x, y) \in ([0, +\infty[)^2$, pour quelle valeur de (α, β) , la famille $\left(\frac{1}{(n+x)^\alpha(n+y)^\beta} \right)_{(n,m) \in \mathbb{N}^*{}^2}$ est-elle sommable ?

c) Montrer que, pour tout $x \in [0, +\infty[$, la série $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$ converge.

On note S , l'application définie, pour tout $x \in [0, +\infty[$, par $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$.

22. Calculer $S(0)$ et $S(1)$.

23.a) Établir : $\forall (x, y) \in ([0, +\infty[)^2, S(y) - S(x) = (y-x) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)(n+y)}$.

b) En déduire que S est lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.

c) Montrer alors que la fonction S est continue sur $[0, +\infty[$. Est-elle uniformément continue sur $[0, +\infty[$?

24.a) Montrer, que pour tout couple (x, y) de $([0, +\infty[)^2$ tel que $x \neq y$:

$$\left| \frac{S(y) - S(x)}{y - x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \right| \leq |y - x| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$$

b) En déduire que la fonction S est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$$

c) Préciser les valeurs de $S'(0)$ et de $S'(1)$.

25. Soit $x \in]0, +\infty[$ fixé. On note φ la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par :

$$\forall t \in [1, +\infty[, \quad \varphi(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}$$

a) Évaluer, pour tout $T > 1$, la quantité $L_T(x) := \int_1^T \varphi(t) dt$, puis montrer que $T \mapsto L_T(x)$ admet une limite pour $T \rightarrow +\infty$. On notera $L(x)$ cette limite.

b) Montrer que $L(x) \leq S(x) \leq L(x) + 1$.

c) Déterminer un équivalent de $S(x)$ pour $x \rightarrow +\infty$.

26. Tracer l'allure de la courbe représentative de S .