

CONCOURS BLANC
CORRECTION

Sujet donné le lundi 15 juin 2026, 4h.

CHAÎNE DE MARKOV EN TEMPS CONTINU

Dans tout le sujet on se fixe un entier naturel $N \geq 2$.

- Soient p, q deux entiers naturels non nuls et $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$, on note $A[i, j]$ le coefficient à la ligne i et la colonne j de A . Par abus, si A est une matrice colonne ($q = 1$), on note $A[i]$ pour $A[i, 1]$. De même, si A est une matrice ligne ($p = 1$) on note $A[i]$ pour $A[1, i]$. $(AB)[i, j]$ est donc l'élément à la ligne i et la colonne j de la matrice produit $A \times B$. Pour tout entier naturel n , A^n désigne la puissance n de la matrice A , $A^n[i, j]$ est donc l'élément à la ligne i et la colonne j de A^n . On adopte la convention usuelle $A^0 = I_N$ où I_N est la matrice identité de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.
- On identifie $\mathbb{R}^N$ avec $\mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$. Pour tout $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$ on note $E_k \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ la matrice colonne dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la k -ième ligne qui vaut 1. On rappelle que $(E_1, \dots, E_N)$ est une base de $\mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$. On note $U \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ le vecteur colonne dont toutes les coordonnées sont égales à 1. On a donc pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $U[i] = 1$.
- On appelle **noyau de Markov** une matrice $K \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ telle que

$$(M_1) \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2, K[i, j] \geq 0$$

$$(M_2) \quad \forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, \sum_{j=1}^N K[i, j] = 1$$

- On suppose qu'il existe un univers Ω et une probabilité $\mathbf{P}$ tels que toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur cet univers.

Partie I - Préliminaires

1. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})^2$.

a) Montrer que A vérifie (M_2) si et seulement si $AU = U$.

Observons que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$,

$$\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, (AU)[i] = (AU)[i, 1] = \sum_{j=1}^N A[i, j] \underbrace{U[j, 1]}_{=1} = \sum_{j=1}^N A[i, j]$$

si bien que

$$\begin{aligned} A \text{ vérifie } (M_2) &\iff \forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, \sum_{j=1}^N A[i, j] = 1 \\ &\iff \forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, (AU)[i] = 1 \\ &\iff AU = U \quad \text{car } \forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, U[i] = 1 \end{aligned}$$

Ainsi, A vérifie (M_2) si et seulement si $AU = U$.

b) En déduire que si A et B sont deux noyaux de Markov alors AB est encore un noyau de Markov.

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})^2$ un couple de noyaux de Markov.

★ Soit $(i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2$.

$$(AB)[i, j] = \sum_{k=1}^N \underbrace{A[i, k]}_{\geq 0} \times \underbrace{B[k, j]}_{\geq 0} \geq 0$$

car A noyau de Markov car B noyau de Markov

★ Par « associativité » du produit matriciel, en utilisant que $BU = U$ puis que $AU = U$ (d'après le point précédent car A et B sont des noyaux de Markov), $(AB)U = A(BU) = AU = U$ donc (sens réciproque de l'équivalence prouvée ci-dessus) AB vérifie la condition (M_2) .

Ainsi, si A et B sont deux noyaux de Markov alors AB est encore un noyau de Markov.

On se fixe un noyau de Markov K .

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, K^n est un noyau de Markov.

Considérons la propriété $\mathcal{P}(\cdot)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$\mathcal{P}(n) : \ll K^n \text{ est un noyau de Markov} \gg.$$

★ Observons que $K^0 = I_N$,

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2, K^0[i, j] = I_N[i, j] = \delta_{i,j} \geq 0 \quad \text{donc } K^0 \text{ satisfait la condition } (M_1),$$

$$\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, \sum_{j=1}^N K^0[i, j] = \sum_{j=1}^N I_N[i, j] = \sum_{j=1}^N \delta_{i,j} = \delta_{i,i} = 1 \quad \text{donc } K^0 \text{ satisfait la condition } (M_2).$$

Par conséquent $K^0 = I_N$ est un noyau de Markov donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

★ Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

$K^{n+1} = K^n \times K$ est le produit de K^n qui est un noyau de Markov (car $\mathcal{P}(n)$ est vraie) avec K qui est un noyau de Markov par hypothèse donc le résultat de la question précédente permet d'affirmer que K^{n+1} est un noyau de Markov ce qui démontre $\mathcal{P}(n+1)$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, K^n est un noyau de Markov.

3.a) Montrer, à l'aide d'une formule de Taylor soigneusement appliquée, que pour tout $t \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!}$ converge et calculer sa somme. (On demande ici de redémontrer un résultat de cours)

Question de cours, voir le paragraphe sur l'inégalité de Taylor-Lagrange (chapitre dérivabilité) ou sur la formule de Taylor avec reste intégral (chapitre intégration).

Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} = e^t$.

b) Soient $t \in \mathbb{R}$ et $(i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2$. Justifier que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{t^n K^n[i, j]}{n!}$ converge. On sera vigilant et remarquera que $K^n[i, j]$ est différent de $(K[i, j])^n$.

★ D'après la question 2, K étant un noyau de Markov, pour tout $n \in \mathbb{N}$, K^n en est un également donc les conditions (M_1) et (M_2) garantissent que $0 \leq K^n[i, j] \leq 1$ si bien que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| \frac{t^n K^n[i, j]}{n!} \right| = \frac{|t|^n |K^n[i, j]|}{n!} \leq \frac{|t|^n}{n!}.$$

★ Les séries $\sum_{n \geq 0} \left| \frac{t^n K^n[i, j]}{n!} \right|$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{|t|^n}{n!}$ sont à termes positifs ou nuls.

★ D'après la sous-question 3.a) appliquée pour $t \leftarrow |t|$, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{|t|^n}{n!}$ est convergente.

Par conséquent, le critère de comparaison des séries à termes positifs établit que la série $\sum_{n \geq 0} \left| \frac{t^n K^n[i, j]}{n!} \right|$ converge.

Ainsi, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{t^n K^n[i, j]}{n!}$ est absolument convergente donc convergente.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on notera $H_t \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ la matrice définie par

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2, \quad H_t[i, j] = e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n K^n[i, j]}{n!}$$

4. Montrer que pour tout réel $t \in \mathbb{R}_+$, H_t est un noyau de Markov.

Soit $t \in \mathbb{R}_+$ fixé.

★ Soit $(i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2$ fixé. Par définition, $H_t[i, j] = e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n K^n[i, j]}{n!}$ donc $H_t[i, j]$ est la somme d'une série à termes ≥ 0 (c'est ici qu'intervient la nécessité de prendre $t \in \mathbb{R}_+$ car si $t < 0$, les termes d'indices impairs sont négatifs ou nuls) donc

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad e^{-t} \sum_{n=0}^p \frac{t^n K^n[i, j]}{n!} \geq 0$$

si bien qu'en passant à la limite lorsque $p \rightarrow +\infty$ sur cette inégalité (autorisé car les deux membres ont une limite finie), on obtient $H_t[i, j] \geq 0$.

★ Soit $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ fixé. On a

$$\sum_{j=1}^N H_t[i, j] = \sum_{j=1}^N \left(e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n K^n[i, j]}{n!} \right) = e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=1}^N \frac{t^n K^n[i, j]}{n!} \right)$$

car toute combinaison linéaire de termes généraux de séries convergentes est un terme général de série convergente dont la somme est la combinaison linéaire des sommes des séries convergentes correspondantes, d'où

$$\sum_{j=1}^N H_t[i, j] = e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{t^n}{n!} \underbrace{\sum_{j=1}^N K^n[i, j]}_{=1} \right) = e^{-t} \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}}_{=e^t \text{ question 3.a)}} = 1$$

car K^n est un noyau de Markov

Ainsi, pour tout réel $t \in \mathbb{R}_+$, H_t satisfait les conditions (M_1) et (M_2) , c'est un noyau de Markov.

5. Montrer que pour $(t, s) \in \mathbb{R}^2$, $H_{t+s} = H_t \times H_s$. On pourra faire apparaître un produit de Cauchy.

Soit $(t, s) \in \mathbb{R}^2$. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2$ fixé.

$$\begin{aligned}
 (H_t \times H_s)[i, j] &= \sum_{k=1}^N H_t[i, k] H_s[k, j] \\
 &= \sum_{k=1}^N \left[\left(e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n K^n[i, k]}{n!} \right) \left(e^{-s} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{s^m K^m[k, j]}{m!} \right) \right] \\
 &= \sum_{k=1}^N e^{-t} e^{-s} \left[\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n K^n[i, k]}{n!} \right) \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{s^m K^m[k, j]}{m!} \right) \right] \tag{1}
 \end{aligned}$$

Nous reconnaissons dans le crochet de produit de deux séries absolument convergentes (voir question 3.b)) donc le théorème sur le produit de Cauchy permet d'affirmer que ce produit est égal au produit de Cauchy des deux séries en question : pour tout $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$

$$\begin{aligned}
 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n K^n[i, k]}{n!} \right) \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{s^m K^m[k, j]}{m!} \right) &= \sum_{\sigma=0}^{+\infty} \sum_{r=0}^{\sigma} \frac{t^r K^r[i, k]}{r!} \times \frac{s^{\sigma-r} K^{\sigma-r}[k, j]}{(\sigma-r)!} \\
 &= \sum_{\sigma=0}^{+\infty} \sum_{r=0}^{\sigma} \frac{t^r s^{\sigma-r}}{\sigma!} \frac{\sigma!}{r!(\sigma-r)!} K^r[i, k] K^{\sigma-r}[k, j] \\
 &= \sum_{\sigma=0}^{+\infty} \frac{1}{\sigma!} \sum_{r=0}^{\sigma} \binom{\sigma}{r} t^r s^{\sigma-r} K^r[i, k] K^{\sigma-r}[k, j]
 \end{aligned}$$

si bien qu'en injectant dans l'égalité (1),

$$\begin{aligned}
 (H_t \times H_s)[i, j] &= \sum_{k=1}^N e^{-t} e^{-s} \left[\sum_{\sigma=0}^{+\infty} \frac{1}{\sigma!} \sum_{r=0}^{\sigma} \binom{\sigma}{r} t^r s^{\sigma-r} K^r[i, k] K^{\sigma-r}[k, j] \right] \\
 &\text{or une comb. lin. de termes généraux de séries convergentes est un terme général} \\
 &\text{de série convergente d'où} \\
 &= e^{-t} e^{-s} \sum_{\sigma=0}^{+\infty} \left[\frac{1}{\sigma!} \sum_{k=1}^N \sum_{r=0}^{\sigma} \binom{\sigma}{r} t^r s^{\sigma-r} K^r[i, k] K^{\sigma-r}[k, j] \right] \\
 &= e^{-t} e^{-s} \sum_{\sigma=0}^{+\infty} \left[\frac{1}{\sigma!} \sum_{r=0}^{\sigma} \binom{\sigma}{r} t^r s^{\sigma-r} \underbrace{\sum_{k=1}^N K^r[i, k] K^{\sigma-r}[k, j]}_{=(K^r \times K^{\sigma-r})[i, j]} \right] \quad (\text{permutation de sommes finies}) \\
 &= e^{-t} e^{-s} \sum_{\sigma=0}^{+\infty} \left[\frac{1}{\sigma!} \sum_{r=0}^{\sigma} \left(\binom{\sigma}{r} t^r s^{\sigma-r} K^{\sigma}[i, j] \right) \right] \\
 &= e^{-(t+s)} \sum_{\sigma=0}^{+\infty} \left[\frac{K^{\sigma}[i, j]}{\sigma!} \underbrace{\sum_{r=0}^{\sigma} \left(\binom{\sigma}{r} t^r s^{\sigma-r} \right)}_{=(t+s)^{\sigma}} \right] \\
 &= e^{-(t+s)} \sum_{\sigma=0}^{+\infty} \frac{(t+s)^{\sigma} K^{\sigma}[i, j]}{\sigma!} \\
 &= H_{t+s}
 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tous $(t, s) \in \mathbb{R}^2$, $H_{t+s} = H_t \times H_s$.

Partie II - Urnes d'Ehrenfest

On considère dans cette partie un modèle de gaz introduit par Paul et Tatiana Ehrenfest (1907).

Soit n un entier naturel non nul. Deux récipients A et B sont placés côte à côte et du gaz est autorisé à passer par une ouverture qui les relie. À l'instant initial, on dispose $2n$ particules dans le récipient A . Ensuite, à chaque instant $t \in \mathbb{N}^*$ se produit une impulsion : une particule est choisie au hasard parmi les $2n$ particules. Si la particule choisie se trouve dans le récipient A , elle se déplace dans le récipient B , sinon elle est dans le récipient B et elle se déplace dans le récipient A .

On note $X_0 = 2n$, puis, pour tout t entier naturel, X_t le nombre de particules qui se trouvent dans la chambre A après t impulsions.

Soit $t \in \mathbb{N}$.

6.a) Proposer un ensemble raisonnable pour $X_t(\Omega)$.

On peut trouver dans la chambre A , toutes les nombres possibles (entiers) de particules entre 0 et $2n$.

Donc pour tout entier $t \in \mathbb{N}$, $X_t(\Omega) = \llbracket 0, 2n \rrbracket$.

b) Montrer que, pour tout $i, j \in \llbracket 0, 2n \rrbracket \times \llbracket 1, 2n - 1 \rrbracket$,

$$\mathbf{P}_{X_t=i}(X_{t+1}=j) = \begin{cases} 0 & \text{si } |i-j| \neq 1, \\ \frac{i}{2n} & \text{si } j = i-1, \\ \frac{2n-i}{2n} & \text{si } j = i+1. \end{cases}$$

Que valent $\mathbf{P}_{X_t=i}(X_{t+1}=0)$ et $\mathbf{P}_{X_t=i}(X_{t+1}=2n)$?

On note, pour toute impulsion $t \in \mathbb{N}$, A_t , l'événement : « entre les instants t et $t+1$ la particule qui se déplace le fait de la chambre A vers la chambre B ».

Ainsi $(A_t, \overline{A_t})$ est un système complet d'événements.

D'après la formule des probabilités totales, appliquées à l'événements $X_{t+1} = j$, pour la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}_{X_t=i}$, on a :

$$\mathbf{P}_{X_t=i}(X_{t+1}=j) = \mathbf{P}_{X_t=i}(A_t) \times \mathbf{P}_{X_t=i, A_t}(X_{t+1}=j) + \mathbf{P}_{X_t=i}(\overline{A_t}) \times \mathbf{P}_{X_t=i, \overline{A_t}}(X_{t+1}=j)$$

Or d'après l'énoncé : $\mathbf{P}_{X_t=i}(A_t) = \frac{i}{2n}$, $\mathbf{P}_{X_t=i}(\overline{A_t}) = \frac{2n-i}{2n}$.

Et par ailleurs, on a l'implication d'événements : $[X_t = i] \cap A_t \subset [X_{t+1} = i-1]$,

donc $\mathbf{P}_{X_t=i, A_t}(X_{t+1}=j) = \delta_{j, i-1}$.

Et de même, on a l'implication d'événements : $[X_t = i] \cap \overline{A_t} \subset [X_{t+1} = i+1]$,

donc $\mathbf{P}_{X_t=i, \overline{A_t}}(X_{t+1}=j) = \delta_{j, i+1}$.

Ces formules restent vraies, même si $i = 0$ ou $i = 2n$ (cas de bord). On trouve donc :

Pour tout entier $t \in \mathbb{N}$, et pour tout $i, j \in \llbracket 0, 2n \rrbracket \times \llbracket 1, 2n - 1 \rrbracket$, $\mathbf{P}_{X_t=i}(X_{t+1}=j) = \frac{i}{2n}\delta_{j, i-1} + \frac{2n-i}{2n}\delta_{j, i+1}$.

Et pour tout $i \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$, $\mathbf{P}_{X_t=i}(X_{t+1}=0) = \frac{1}{2n}\delta_{i, 1}$ et $\mathbf{P}_{X_t=i}(X_{t+1}=2n) = \frac{1}{2n}\delta_{i, 2n-1}$.

La réponse à la question précédente donne un résultat indépendant de t . Ainsi, pour $t \in \mathbb{N}$ quelconque, on note $K = (\mathbf{P}_{X_t=i-1}(X_{t+1}=j-1))_{1 \leq i, j \leq 2n+1}$.

c) Expliciter la matrice K (on précisera explicitement le contenu du bloc carré de taille 4 en haut à gauche, celui du bloc carré de taille 2 en bas à droite et on utilisera des pointillés pour indiquer comment se remplissent les autres coefficients) et vérifier qu'il s'agit d'un noyau de Markov.

D'après la question précédente, on a pour tout $i, j \in \llbracket 1, 2n+1 \rrbracket$:

$$K[i, j] = \mathbf{P}_{X_t=i-1}(X_{t+1}=j-1) = \frac{i-1}{2n}\delta_{j-1,i-2} + \frac{2n-i+1}{2n}\delta_{j-1,i} = \frac{i-1}{2n}\delta_{i-1,j} + \frac{2n-i+1}{2n}\delta_{i,j-1}$$

Cela donne la matrice tri-bande suivante :

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2n} & 0 & \frac{2n-1}{2n} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{2}{2n} & 0 & \frac{2n-2}{2n} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \frac{3}{2n} & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{2}{2n} & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{2n-1}{2n} & 0 & \frac{1}{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- ★ Les coefficients de K étant des probabilités, ce sont des réels positifs ou nuls donc K satisfait la condition (M_1) .
- ★ Soit $i \in \llbracket 1, 2n+1 \rrbracket$.
 - La somme des coefficients de K sur la ligne 1 (resp. $2n+1$) est 1,
 - La somme des coefficients de K sur la ligne d'indice $i \in \llbracket 2, 2n \rrbracket$ est

$$\frac{i-1}{2n} + \frac{2n-i+1}{2n} = \frac{2n}{2n} = 1$$

Par conséquent, K satisfait la propriété (M_2) .

Ainsi, K est un noyau de Markov.

d) On note $\pi \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ la matrice ligne définie par $\forall i \in \llbracket 1, 2n+1 \rrbracket$, $\pi[i] = \binom{2n}{i-1} \frac{1}{2^{2n}}$.

Montrer que $\pi K = \pi$.

Soit $i \in \llbracket 1, 2n+1 \rrbracket$ fixé.

- ★ si $i = 1$, $(\pi K)[1] = \pi[2]K[2, 1] = \frac{\pi[2]}{2n} = \frac{\binom{2n}{2-1}}{2n} \frac{1}{2^{2n}} = \frac{2n}{2n} \frac{1}{2^{2n}} = \binom{2n}{1-1} \frac{1}{2^{2n}} = \pi[1]$.
- ★ si $i \in \llbracket 2, 2n \rrbracket$,

$$\begin{aligned} (\pi K)[i] &= \pi[i-1]K[i-1, i] + \pi[i+1]K[i+1, i] \\ &= \left(\binom{2n}{i-2} \times \frac{2n-(i-2)}{2n} + \binom{2n}{i} \times \frac{i}{2n} \right) \frac{1}{2^{2n}} = \frac{(2n)!}{2n} \left(\frac{2n-i+2}{(i-2)!(2n-i+2)!} + \frac{i}{i!(2n-i)!} \right) \frac{1}{2^{2n}} \\ &= \frac{(2n)!}{2n(i-2)!(2n-i)!} \left(\frac{2n-i+2}{(2n-i+2)(2n-i+1)} + \frac{i}{i(i-1)} \right) \frac{1}{2^{2n}} \\ &= \frac{(2n)!}{2n(i-2)!(2n-i)!} \left(\frac{1}{2n-i+1} + \frac{1}{i-1} \right) \frac{1}{2^{2n}} = \frac{(2n)!}{2n(i-2)!(2n-i)!} \left(\frac{(i-1) + (2n-i+1)}{(2n-i+1)(i-1)} \right) \frac{1}{2^{2n}} \\ &= \frac{(2n)!}{2n(i-2)!(2n-i)!} \times \frac{2n}{(2n-i+1)(i-1)} \frac{1}{2^{2n}} \\ &= \frac{(2n)!}{(i-1)!(2n-(i-1))!} \frac{1}{2^{2n}} = \pi[i] \quad \text{car } \pi[i] = \binom{2n}{i-1} \frac{1}{2^{2n}} \end{aligned}$$

$$\star \text{ si } i = 2n+1, (\pi K)[2n+1] = \pi[2n]K[2n, 2n+1] = \frac{\pi[2n]}{2n} = \frac{\binom{2n}{2n-1}}{2n} \frac{1}{2^{2n}} = \frac{2n}{2n} \frac{1}{2^{2n}} = \left(\binom{2n}{(2n+1)-1} - 1 \right) \frac{1}{2^{2n}} = \pi[2n+1].$$

Ainsi, $\pi K = \pi$.

7. Pour tout $i \in \llbracket 1, 2n-1 \rrbracket$, exprimer $\mathbf{P}(X_{t+1} = i)$ en fonction de $(\mathbf{P}(X_t = j))_{j \in \llbracket 0, 2n \rrbracket}$.

Comme $\{(X_t = j), j \in \llbracket 0, 2n \rrbracket\}$ est un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales et en utilisant noyau de Markov,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_{t+1} = i) &= \sum_{j=0}^{2n} \mathbf{P}_{X_t=j}(X_{t+1} = i) \mathbf{P}(X_t = j) \\ &= \mathbf{P}_{X_t=i-1}(X_{t+1} = i) \mathbf{P}(X_t = i-1) + \mathbf{P}_{X_t=i+1}(X_{t+1} = i) \mathbf{P}(X_t = i+1) \\ &= \frac{(2n - (i-1))}{2n} \mathbf{P}(X_t = i-1) + \frac{i+1}{2n} \mathbf{P}(X_t = i+1). \end{aligned}$$

On a utilisé que $i \neq 0$ et $i \neq 2n$, donc $\mathbf{P}(X_t = i-1)$ et $\mathbf{P}(X_t = i+1)$ sont bien définies.

Ainsi, $\forall i \in \llbracket 1, 2n-1 \rrbracket, \mathbf{P}(X_{t+1} = i) = \frac{(2n - (i-1))}{2n} \mathbf{P}(X_t = i-1) + \frac{i+1}{2n} \mathbf{P}(X_t = i+1)$.

On note G_t la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $G_t(u) = \sum_{k=0}^{2n} \mathbf{P}(X_t = k) u^k = \mathbf{E}(u^{X_t})$. La fonction G_t est le polynôme générateur de la variable aléatoire X_t .

8. Calculer $G_t(1)$ et montrer que $G'_t(1) = \mathbf{E}(X_t)$.

D'après la définition, $G_t(1) = \sum_{j=0}^{2n} \mathbf{P}(X_t = j) = 1$.

De plus, $u \mapsto G_t(u)$ est une application polynomiale, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $u \in \mathbb{R}^*$,

$$G'_t(u) = \sum_{k=0}^{2n} k \mathbf{P}(X_t = k) u^{k-1} = \sum_{k=1}^{2n} k \mathbf{P}(X_t = k) u^{k-1}$$

Donc $G_t(1) = 1$ et $G'_t(1) = \mathbf{E}(X_t)$.

9. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{N}$ et tout $u \in \mathbb{R}$,

$$G_{t+1}(u) = u G_t(u) + \frac{1-u^2}{2n} G'_t(u)$$

$$\begin{aligned}
G_{t+1}(u) &= \sum_{k=0}^{2n} \mathbf{P}(X_{t+1} = k) u^k = \mathbf{P}(X_{t+1} = 0) + \sum_{k=1}^{2n-1} \mathbf{P}(X_{t+1} = k) u^k + \mathbf{P}(X_{t+1} = 2n) u^{2n} \\
&= \frac{1}{2n} \mathbf{P}(X_t = 1) + \sum_{i=1}^{2n-1} \left(\frac{(2n - (i - 1))}{2n} \mathbf{P}(X_t = i - 1) + \frac{i + 1}{2n} \mathbf{P}(X_t = i + 1) \right) u^i + \frac{1}{2n} \mathbf{P}(X_t = 2n - 1) u^{2n} \\
&= \frac{1}{2n} \mathbf{P}(X_t = 1) + \sum_{i=0}^{2n-2} \frac{2n - i}{2n} \mathbf{P}(X_t = i) u^{i+1} + \sum_{i=2}^{2n} \frac{i}{2n} \mathbf{P}(X_t = i) u^{i-1} + \frac{1}{2n} \mathbf{P}(X_t = 2n - 1) u^{2n} \\
&= \frac{1}{2n} \mathbf{P}(X_t = 1) + \sum_{i=0}^{2n} \frac{2n - i}{2n} \mathbf{P}(X_t = i) u^{i+1} - \frac{1}{2n} \mathbf{P}(X_t = 2n - 1) u^{2n} + \sum_{i=1}^{2n} \frac{i}{2n} \mathbf{P}(X_t = i) u^{i-1} - \dots \\
&\quad \dots - \frac{1}{2n} \mathbf{P}(X_t = 1) + \frac{1}{2n} \mathbf{P}(X_t = 2n - 1) u^{2n} \\
&= u G_t(u) - \frac{u^2}{2n} G'_t(u) + \frac{1}{2n} G'_t(u).
\end{aligned}$$

Pour tout $t \in \mathbb{N}$ et tout $u \in \mathbb{R}$, $G_{t+1}(u) = u G_t(u) + \frac{1 - u^2}{2n} G'_t(u)$.

10. En déduire que $\mathbf{E}(X_{t+1}) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \mathbf{E}(X_t) + 1$.

Dérivons la relation précédente (polynôme)

$$G'_{t+1}(u) = u G'_t(u) + G_t(u) - \frac{2u}{2n} G'_t(u) + \frac{1 - u^2}{2n} G''_t(u)$$

Et prenons la valeur en 1 :

$$\mathbf{E}(X_{t+1}) = G'_{t+1}(u)(1) = 1 G'_t(1) + G_t(1) - \frac{2}{2n} G'_t(1) + 0 = 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \mathbf{E}(X_t).$$

11. En déduire une expression de $\mathbf{E}(X_t)$, pour tout $t \in \mathbb{N}$.

On reconnaît une suite arithmético-géométrique de point fixe ℓ vérifiant $\ell = 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \ell = 1 + \ell - \frac{\ell}{n}$, donc $\ell = n$. Initialement, $\mathbf{E}(X_0) = 2n$

Pour tout $t \in \mathbb{N}$, $\mathbf{E}(X_t) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^t n + n$

12. Exprimer $\mathbf{V}(X_t)$ en fonction de $G'_t(1)$ et $G''_t(1)$.

La fonction G_t étant polynomiale, elle est deux fois dérivable et pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$G''_t(u) = \sum_{k=0}^{2n} k(k-1) \mathbf{P}(X_t = k) u^{k-2}.$$

Ainsi, d'après le théorème de transfert,

$$G_t''(1) = \sum_{k=0}^{2n} k(k-1) \mathbf{P}(X_t = k) = \mathbf{E}(X_t(X_t - 1)).$$

Ainsi, d'après la formule de Kœnig-Huygens,

$$\mathbf{V}(X_t) = \mathbf{E}(X_t^2) - \mathbf{E}(X_t)^2 = \mathbf{E}(X_t(X_t - 1)) + \mathbf{E}(X_t) - \mathbf{E}(X_t)^2 = G_t''(1) + G_t'(1)(1 - G_t'(1)).$$

Ainsi, $\mathbf{V}(X_t) = G_t''(1) + G_t'(1)(1 - G_t'(1)).$

On note $P_t = \frac{X_t}{2n}$ la proportion de particules se trouvant dans l'urne A (P_t représente la pression dans l'urne A). On admettra que la relation de récurrence précédente permet d'obtenir, en notant $\alpha = 1 - \frac{1}{n}$ et $\beta = 1 - \frac{2}{n}$ que

$$\forall t \in \mathbb{N}, \mathbf{V}(P_t) = \frac{1 - \beta^t}{8n} + \frac{\beta^t - \alpha^{2t}}{4}.$$

13. Comparer α^{2t} et β^t pour en déduire une majoration de $\mathbf{V}(P_t)$ en fonction de n et indépendante de t .

Comme $\alpha^2 = 1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \geq 1 - \frac{2}{n} = \beta$, alors $\alpha^{2t} \geq \beta^t$.

Ainsi, $\mathbf{V}(P_t) \leq \frac{1}{8n}.$

14. Soit $\varepsilon > 0$.

a) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(|P_t - \mathbf{E}(P_t)| \geq \varepsilon) = 0$.

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\mathbf{P}(|P_t - \mathbf{E}(P_t)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbf{V}(P_t)}{\varepsilon^2} \leq \frac{1}{8n\varepsilon^2}$$

donc $0 \leq \mathbf{P}(|P_t - \mathbf{E}(P_t)| \geq \varepsilon) \leq \underbrace{\frac{1}{8n\varepsilon^2}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0}$ si bien que le théorème d'existence de limite par encadrement

donne

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(|P_t - \mathbf{E}(P_t)| \geq \varepsilon) = 0.$

b) Montrer que $\left\{ \left| P_t - \frac{1}{2} \right| \geq \varepsilon \right\} \subset \left\{ |P_t - \mathbf{E}(P_t)| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \cup \left\{ \left| \mathbf{E}(P_t) - \frac{1}{2} \right| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\}$. On pourra raisonner par contraposée.

D'après l'inégalité triangulaire,

$$\left| P_t - \frac{1}{2} \right| \leq |P_t - \mathbf{E}(P_t)| + \left| \mathbf{E}(P_t) - \frac{1}{2} \right|.$$

Donc si $|P_t - \mathbf{E}(P_t)| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $\left| \mathbf{E}(P_t) - \frac{1}{2} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$, alors $\left| P_t - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$.

Par contraposée :

$$\left\{ \left| P_t - \frac{1}{2} \right| \geq \varepsilon \right\} \implies \left\{ |P_t - \mathbf{E}(P_t)| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \text{ ou } \left\{ \left| \mathbf{E}(P_t) - \frac{1}{2} \right| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

Dans sa version ensembliste : $\left\{ \left| P_t - \frac{1}{2} \right| \geq \varepsilon \right\} \subset \left\{ |P_t - \mathbf{E}(P_t)| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \cup \left\{ \left| \mathbf{E}(P_t) - \frac{1}{2} \right| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\}$

c) En déduire que, pour tout $\eta > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, il existe $t_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $t \geq t_0$, $\mathbf{P} \left(\left| P_t - \frac{1}{2} \right| \geq \varepsilon \right) \leq \eta$.

On a ainsi montré que, lorsque le nombre de particules est grand, après une phase transitoire, la « pression » tend à être identique dans les deux urnes.

Soient $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ fixés.

Fixons $n_0 = \left\lfloor \frac{1}{2\eta\varepsilon^2} \right\rfloor + 1$ de sorte que $\forall n \geq n_0$, $\frac{1}{2n_0\varepsilon^2} \leq \eta$.

Soit $n \geq n_0$ fixé.

Par linéarité de l'espérance et d'après la question 11, l'entier n étant fixé,

$$\forall t \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{E}(P_t) = \frac{\mathbf{E}(X_t)}{2n} = \frac{1}{2} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n} \right)^t}_{\xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0} + \frac{1}{2}$$

$$\text{donc } \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{E}(P_t) = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, en appliquant la définition de la limite, il existe $t_0 \in \mathbb{N}$ (dépendant du n fixé a priori) tel que

$$\forall t \geq t_0, \quad \left| \mathbf{E}(P_t) - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pour tout $t \geq t_0$, l'événement $\left(\left| \mathbf{E}(P_t) - \frac{1}{2} \right| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right)$ est donc impossible si bien que

$$\mathbf{P} \left(\left| \mathbf{E}(P_t) - \frac{1}{2} \right| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right) = 0$$

D'après la question 14.a),

$$\mathbf{P} \left(|P_t - \mathbf{E}(P_t)| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right) \leq \frac{1}{2n\varepsilon^2} \leq \frac{1}{2n_0\varepsilon^2} \leq \eta \quad \text{par choix de } n_0.$$

Ainsi, en utilisant la croissance puis la sous-additivité de la probabilité,

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(\left| P_t - \frac{1}{2} \right| \geq \varepsilon \right) &\leq \mathbf{P} \left(\left\{ |P_t - \mathbf{E}(P_t)| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \cup \left\{ \left| \mathbf{E}(P_t) - \frac{1}{2} \right| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right) \\ &\leq \mathbf{P} \left(|P_t - \mathbf{E}(P_t)| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right) + \mathbf{P} \left(\left| \mathbf{E}(P_t) - \frac{1}{2} \right| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right) \\ &\leq \eta + 0 = \eta. \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall \eta > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq n_0$, il existe $t_0 \in \mathbb{N}$: $\forall t \geq t_0$, $\mathbf{P} \left(\left| P_t - \frac{1}{2} \right| \geq \varepsilon \right) \leq \eta$.

Partie III - Étude d'endomorphismes autoadjoints positifs

Dans cette partie nous considérons un espace vectoriel euclidien E de dimension N dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et la norme $\| \cdot \|$.

Soit u un endomorphisme de E que nous supposons

- **autoadjoint** ce qui signifie $\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$,
- et **positif** ce qui signifie $\forall x \in E, \langle u(x), x \rangle \geq 0$.

On associe à u la « forme quadratique » $q_u \left| \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & E \\ x & \mapsto & \langle u(x), x \rangle \end{array} \right.$.

On admet que le caractère autoadjoint de u permet d'affirmer qu'il existe un entier naturel $p \geq 1$ et p nombres réels $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_p$ tels que, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, le sous-espace $E_{\lambda_i} = \ker(u - \lambda_i \text{Id}_E)$ n'est pas réduit à $\{0_E\}$ et l'espace E est égal à la somme directe de ces p sous-espaces :

$$E = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p} = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i},$$

ce qui signifie que tout vecteur $x \in E$ se décompose de manière unique sous la forme $x = \sum_{i=1}^p x_i$ où, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $x_i \in E_{\lambda_i}$.

On remarquera que, pour tout vecteur $x \in E$, $x \in E_{\lambda_i} \iff u(x) = \lambda_i \cdot x$.

15. Montrer que $\lambda_1 \geq 0$. On pourra étudier $q_u(x)$ pour $x \in E_{\lambda_1}$.

Par définition du sous-espace E_{λ_1} , il n'est pas réduit à $\{0_E\}$ donc il existe $x_1 \in E_{\lambda_1}$ tel que $x \neq 0_E$. On a alors, par positivité de u ,

$$0 \leq \langle u(x_1), x_1 \rangle = \langle \lambda_1 \cdot x_1, x_1 \rangle = \lambda_1 \cdot \underbrace{\langle x_1, x_1 \rangle}_{>0} = \lambda_1 \|x_1\|^2$$

donc, en multipliant par $\frac{1}{\|x_1\|^2} \geq 0$,

on obtient $\lambda_1 \geq 0$.

16. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$ tels que $i \neq j$. Montrer que E_{λ_i} et E_{λ_j} sont orthogonaux, en utilisant le caractère auto-adjoint de u .

Soient $\varepsilon_i \in E_{\lambda_i}$ et $\varepsilon_j \in E_{\lambda_j}$ fixés quelconques.

D'une part, en utilisant que $\varepsilon_i \in E_{\lambda_i}$ ce qui implique $u(\varepsilon_i) = \lambda_i \cdot \varepsilon_i$,

$$\langle u(\varepsilon_i), \varepsilon_j \rangle = \langle \lambda_i \cdot \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = \lambda_i \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle$$

et d'autre part, en utilisant le caractère auto-adjoint de u puis $u(\varepsilon_j) = \lambda_j \cdot \varepsilon_j$,

$$\langle u(\varepsilon_i), \varepsilon_j \rangle = \langle \varepsilon_i, u(\varepsilon_j) \rangle = \langle \varepsilon_i, \lambda_j \cdot \varepsilon_j \rangle = \lambda_j \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle$$

si bien qu'en effectuant la différence des deux égalités,

$$0 = \underbrace{(\lambda_i - \lambda_j)}_{\neq 0 \text{ car } i \neq j} \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle \quad \text{donc} \quad \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = 0$$

Ainsi, les sous-espaces E_{λ_i} et E_{λ_j} sont orthogonaux.

17. On suppose, dans cette question uniquement, $p \geq 2$. Soit $x \in E_{\lambda_1}^\perp$. Montrer que $q_u(x) \geq \lambda_2 \|x\|^2$.

Sachant que $E = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}$, il existe $(x_1, \dots, x_p) \in E_{\lambda_1} \times \dots \times E_{\lambda_p}$ tels que $x = x_1 + \dots + x_p = \sum_{i=1}^p x_i$.

★ Montrons que $x_1 = 0_E$.

Calculons de deux manières $\langle x, x_1 \rangle$: d'une part, puisque $x \in E_{\lambda_1}^\perp$ (par hypothèse),

$$\langle x, x_1 \rangle = 0 \quad \text{car } x_1 \in E_{\lambda_1}$$

et d'autre part, par linéarité du produit scalaire en le second vecteur,

$$\langle x, x_1 \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^p x_i, x_1 \right\rangle = \sum_{i=1}^p \underbrace{\langle x_i, x_1 \rangle}_{\substack{=0 \text{ si } i \neq 1 \\ \text{car } E_{\lambda_1} \perp E_{\lambda_i} \text{ (quest. 16)}}} = \langle x_1, x_1 \rangle = \|x_1\|^2$$

En égalant les deux expressions, $\|x_1\|^2 = 0$ donc $\|x_1\| = 0$ donc $x_1 = 0_E$.

★ Calculons $q_u(x)$ après avoir remarqué que

$$u(x) = u\left(\sum_{i=2}^p x_i\right) = \sum_{i=2}^p u(x_i) = \sum_{i=2}^p \lambda_i \cdot x_i$$

puis en développant le produit scalaire par bilinéarité,

$$q_u(x) = \langle u(x), x \rangle = \left\langle \sum_{i=2}^p \lambda_i \cdot x_i, \sum_{j=2}^p x_j \right\rangle = \sum_{2 \leq i, j \leq p} \lambda_i \underbrace{\langle x_i, x_j \rangle}_{\substack{=0 \text{ si } i \neq j \\ \text{car } E_{\lambda_i} \perp E_{\lambda_j} \text{ (quest. 16)}}} = \sum_{i=2}^p \underbrace{\lambda_i}_{\geq \lambda_2} \|x_i\|^2 \geq \lambda_2 \sum_{i=2}^p \|x_i\|^2 \quad (2)$$

Enfin, observons qu'un calcul analogue donne

$$\|x\|^2 = \left\langle \sum_{i=2}^p x_i, \sum_{j=2}^p x_j \right\rangle = \sum_{2 \leq i, j \leq p} \underbrace{\langle x_i, x_j \rangle}_{\substack{=0 \text{ si } i \neq j \\ \text{car } E_{\lambda_i} \perp E_{\lambda_j} \text{ (quest. 16)}}} = \sum_{i=2}^p \|x_i\|^2$$

si bien que la minoration (2) devient $q_u(x) \geq \lambda_2 \|x\|^2$.

Ainsi, pour tout $x \in E_{\lambda_1}^\perp$, $q_u(x) \geq \lambda_2 \|x\|^2$.

18. On suppose, dans cette question uniquement, que u n'est pas injectif et que u n'est pas l'endomorphisme nul. Justifier que $\lambda_1 = 0$, $p \geq 2$ puis que

$$\forall x \in \ker(u)^\perp, \quad q_u(x) \geq \lambda_2 \|x\|^2.$$

★ u n'est pas injectif, donc $\text{Ker } u \neq \{0\}$ et donc $E_0 = \text{Ker}(u - 0\text{id})$ n'est pas réduit à $\{0\}$.

Donc 0 est valeur propre.

Toutes les valeurs propres sont positives, λ_1 est la plus petite.

Donc nécessairement $\lambda_1 = 0$.

- ★ Par l'absurde, si $p = 1$ alors $E = E_{\lambda_1} = \ker(u)$ (car $\lambda_1 = 0$) donc u est l'endomorphisme nul ce qui contredit les hypothèses donc $p \neq 1$, or $p \geq 1$ donc

$$\boxed{p \geq 2.}$$

- ★ Appliquons la question précédente à l'endomorphisme u considéré ici : $\lambda_1 = 0$ donc $E_{\lambda_1} = \ker(u)$ si bien que l'on obtient

$$\boxed{\forall x \in \ker(u)^\perp, \quad q_u(x) \geq \lambda_2 \|x\|^2.}$$

Partie IV - Convergence de $H_t[i, j]$

On cherche à modéliser un système ayant N états numérotés de 1 à N . À l'instant initial le système est dans l'état 1. Le système est soumis à des impulsions aléatoires qui le font changer d'état.

On suppose que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2$, à chaque impulsion, si le système est dans l'état i , il se retrouve dans l'état j avec une probabilité $p_{i,j}$ qui ne dépend que de l'état où il était avant l'impulsion.

On note Z_0 la variable certaine de valeur 1. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on note Z_k la variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket 1, N \rrbracket$ qui correspond à l'état du système après k impulsions. Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2$ et tout $k \in \mathbb{N}$ tels que $\mathbf{P}(Z_k = i) \neq 0$ on a donc $\mathbf{P}_{Z_k=i}(Z_{k+1} = j) = \mathbf{P}(Z_{k+1} = j | Z_k = i) = p_{i,j}$. En particulier, cette probabilité ne dépend pas de k .

On considère la matrice $K \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2, \quad K[i, j] = p_{i,j}.$$

19.a) Justifier que K est un noyau de Markov.

- ★ Pour tout $i, j \in \llbracket 1, N \rrbracket^2$, $K[i, j] = p_{i,j} \geq 0$ (c'est une probabilité). Donc (M_1) est vérifié.

- ★ Pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$,

$$\sum_{j=1}^N K[i, j] = \sum_{j=1}^N p_{i,j} = \sum_{j=1}^N \mathbf{P}_{Z_k=i}(Z_{k+1} = j) = \mathbf{P}_{Z_k=i}(\Omega) = 1$$

car Z_{k+1} est une variable aléatoire, donc $(Z_{k+1} = j)_{1 \leq j \leq N}$ est un système complet d'événements. Ainsi, (M_2) est vérifié.

$$\boxed{K \text{ est un noyau de Markov.}}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$ montrer que $\mathbf{P}(Z_n = j) = K^n[1, j]$.

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n : \ll \forall j \in \llbracket 1, N \rrbracket, \mathbf{P}(Z_n = j) = K^n[1, j]. \gg$

On fera bien attention à l'endroit où se trouve le $\forall j \dots$

— Pour tout $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $\mathbf{P}(Z_0 = j) = \delta_{1,j} = K^0[1, j]$.

car K^0 est l'identité. On regarde sa première ligne.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Soit $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$.

On applique la formule des probabilités totales, avec le système complet associé à la variable Z_n :

$$\mathbf{P}(Z_{n+1} = j) = \sum_{k=1}^N \mathbf{P}(Z_n = k) \mathbf{P}_{Z_n=k}(Z_{n+1} = j) = \sum_{k=1}^n \underbrace{K^n[1, k]}_{\mathcal{P}_n} K[k, j] = K^{n+1}[1, j]$$

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

On rappelle que H_t est défini pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $(i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2$ par $H_t[i, j] = e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{K^n[i, j]}{n!} t^n$.

On admettra que H_t est le noyau de Markov obtenu en observant à l'instant t le système sachant qu'il y a eu un nombre aléatoire d'impulsions entre les instants 0 et t , ce nombre suivant une loi de Poisson de paramètre t .

On suppose que $\text{Ker}(K - I_N)$ est un espace vectoriel de **dimension** 1.

On appelle **probabilité sur** $\mathbb{R}^N$ un vecteur ligne $\mu \in \mathcal{M}_{1,N}(\mathbb{R})$ tel que

$$(P_1) \quad \forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, \mu[i] \geq 0$$

$$(P_2) \quad \sum_{j=1}^N \mu[j] = 1$$

On suppose dans cette partie qu'il existe une probabilité $\pi \in \mathcal{M}_{1,N}(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$(P_3) \quad \forall j \in \llbracket 1, N \rrbracket, \pi[j] \neq 0.$$

$$(R) \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2, \pi[i]K[i, j] = K[j, i]\pi[j] \quad - \quad \text{on dit que le noyau } K \text{ est } \pi\text{-réversible.}$$

Un rapide calcul montre alors que, pour tout réel t positif, H_t est aussi un noyau de Markov π -réversible, c'est-à-dire que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2, \quad \pi[i]H_t[i, j] = H_t[j, i]\pi[j]$$

On ne demande donc pas de démontrer ce résultat.

Pour $(X, Y) \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})^2$, on pose

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^N X[i]Y[i]\pi[i]$$

Dans cette dernière partie, on cherche à déterminer pour $(i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2$ la limite de $H_t[i, j]$ quand t tend vers $+\infty$ et à majorer la vitesse de convergence vers cette limite.

20.a) Montrer que $\pi K = \pi$.

π et πK sont des matrices lignes. Pour tout $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$,

$$(\pi K)[j] = \sum_{i=1}^N \pi[i]K[i, j] = \sum_{i=1}^N \pi[j]K[j, i] = \pi[j] \sum_{i=1}^N K[j, i] = \pi[j]$$

car K est un noyau de Markov.

Ainsi $\pi K = \pi$.

21. Montrer que $(X, Y) \mapsto \langle X, Y \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$.

★ Soit $(X, Y) \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})^2$. Par commutativité de la multiplication dans $\mathbb{R}$,

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^N X[i]Y[i]\pi[i] = \sum_{i=1}^N Y[i]X[i]\pi[i] = \langle Y, X \rangle$$

donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique.

★ Soient $(X, X', Y, \lambda) \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})^2 \times \mathbb{R}$. Par distributivité de la multiplication dans $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \langle \lambda.X + X', Y \rangle &= \sum_{i=1}^N (\lambda X[i] + X'[i]) Y[i] \pi[i] = \sum_{i=1}^N (\lambda X[i] Y[i] \pi[i] + X'[i] Y[i] \pi[i]) \\ &= \lambda \sum_{i=1}^N X[i] Y[i] \pi[i] + \sum_{i=1}^N X'[i] Y[i] \pi[i] \\ &= \lambda \langle X, Y \rangle + \langle X', Y \rangle \end{aligned}$$

donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire en son premier argument, or elle est symétrique, donc c'est une application bilinéaire.

★ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})^2$ dans son corps de base $\mathbb{R}$: c'est une forme bilinéaire.

★ Soit $X \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ fixé.

$$\langle X, X \rangle = \sum_{i=1}^N \underbrace{X[i]^2}_{\geq 0} \underbrace{\pi[i]}_{\geq 0} \geq 0$$

prop. (P₁) d'une probabilité sur $\mathbb{R}^N$

donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est positif.

★ Soit $X \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ fixé tel que $\langle X, X \rangle = 0$. Alors

$$0 = \sum_{i=1}^N \underbrace{X[i]^2}_{\geq 0} \underbrace{\pi[i]}_{\geq 0}$$

prop. (P₁) d'une probabilité sur $\mathbb{R}^N$

donc $\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, X[i]^2 \pi[i] = 0$,

or la propriété (P₃) de la probabilité π garantit $\pi[i] \neq 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$,

donc $\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, X[i] = 0$ si bien que $X = 0_{\mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})}$.

Par conséquent, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est défini.

Ainsi, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$.

Dans la suite on note E l'espace euclidien $\mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ muni de ce produit scalaire et on considère l'endomorphisme de E défini par $u : X \mapsto (I_N - K)X$.

On note $p : E \rightarrow E$ la projection orthogonale sur $\ker(u)$.

22. Étude de l'endomorphisme u .

a) Montrer que $\ker(u) = \text{Vect}(U)$.

★ K est un noyau de Markov donc (question 1.a)) $KU = U$ si bien que $u(U) = (I_N - K)U = 0$ donc $U \in \ker(u)$ donc $\text{Vect}\{U\} \subset \ker(u)$.

★ Par hypothèse, $\ker(I_n - K)$ est de dimension 1, or $\dim \text{Vect}\{U\} = 1$ (car $U \neq 0$) donc l'inclusion ci-dessus est une égalité.

Ainsi, $\ker(u) = \text{Vect}\{U\}$.

b) Montrer que u est un endomorphisme autoadjoint de E .

Pour tous $(X, Y) \in E^2$,

$$\langle u(X), Y \rangle = \langle (I_N - K)X, Y \rangle = \langle X - KX, Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \langle KX, Y \rangle$$

Observons que

$$\begin{aligned}
\langle KX, Y \rangle &= \sum_{i=1}^N (KX)[i] Y[i] \pi[i] \\
&= \sum_{i=1}^N \left[\left(\sum_{j=1}^N K[i, j] X[j] \right) Y[i] \pi[i] \right] = \sum_{i=1}^N \left[\left(\sum_{j=1}^N \pi[i] K[i, j] X[j] \right) Y[i] \right] \\
&= \sum_{i=1}^N \left[\left(\sum_{j=1}^N K[j, i] \pi[j] X[j] \right) Y[i] \right] \quad \text{car } K \text{ est } \pi\text{-réversible : } \pi[i] K[i, j] = K[j, i] \pi[j] \\
&= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K[j, i] \pi[j] X[j] Y[i] = \sum_{j=1}^N \left[X[j] \left(\sum_{i=1}^N K[j, i] Y[i] \right) \pi[j] \right] \\
&= \sum_{j=1}^N X[j] (KY)[j] \pi[j] = \langle X, KY \rangle
\end{aligned}$$

si bien qu'en reprenant le calcul initial,

$$\langle u(X), Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \langle KX, Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \langle X, KY \rangle = \langle X, Y - KY \rangle = \langle X, u(Y) \rangle$$

Ainsi, u est un endomorphisme autoadjoint.

c) Montrer que pour tout $X \in E$

$$q_u(X) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (X[i] - X[j])^2 K[i, j] \pi[i] .$$

Développons le carré du membre de droite de l'égalité à prouver et utilisons la linéarité de la somme :

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (X[i] - X[j])^2 K[i, j] \pi[i] = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N X[i]^2 K[i, j] \pi[i] - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N 2X[i] X[j] K[i, j] \pi[i] + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N X[j]^2 K[i, j] \pi[i]$$

et simplifions successivement les 3 termes obtenus.

★ En utilisant la propriété (M_2) du noyau de Markov K ,

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N X[i]^2 K[i, j] \pi[i] = \sum_{i=1}^N X[i]^2 \pi[i] \underbrace{\sum_{j=1}^N K[i, j]}_{=1} = \sum_{i=1}^N X[i]^2 \pi[i] = \langle X, X \rangle$$

★ En reconnaissant le coefficient de la ligne i de la matrice colonne KX ,

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N 2X[i] X[j] K[i, j] \pi[i] = 2 \sum_{i=1}^N \left[X[i] \underbrace{\left(\sum_{j=1}^N K[i, j] X[j] \right)}_{=(KX)[i] = (KX)[i]} \pi[i] \right] = 2 \sum_{i=1}^N X[i] (KX)[i] \pi[i] = \underbrace{2 \langle X, KX \rangle}_{\langle \cdot, \cdot \rangle \text{ symétrique}} = 2 \langle KX, X \rangle$$

★ En utilisant que K est π -réversible,

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N X[j]^2 \underbrace{K[i, j] \pi[i]}_{=\pi[j] K[j, i]} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N X[j]^2 \pi[j] K[j, i] = \sum_{j=1}^N X[j]^2 \pi[j] \underbrace{\sum_{i=1}^N K[j, i]}_{=1 \text{ prop. } (M_2) \text{ noyau } K} = \langle X, X \rangle$$

En combinant les trois termes simplifiés ci-dessus et en multipliant par le facteur $\frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (X[i] - X[j])^2 K[i, j] \pi[i] = \langle X, X \rangle - \langle KX, X \rangle = \langle X - KX, X \rangle = \langle (I - K)X, X \rangle = q_u(X)$$

Ainsi, pour tout $X \in E$, $q_u(X) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (X[i] - X[j])^2 K[i, j] \pi[i]$.

d) En déduire qu'il existe $\lambda > 0$ tel que pour tout $X \in \ker(u)^\perp$,

$$q_u(X) \geq \lambda \|X\|^2$$

D'après les questions précédentes, u est un endomorphisme autoadjoint (question 22.b)) et positif (immédiat à partir de l'expression de $q_u(X)$ obtenue dans la question 22.c)) de l'espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

On peut donc lui appliquer les résultats de l'étude menée dans la partie III. Plus précisément, nous savons que u n'est pas injectif (car son noyau est de dimension 1 d'après la question 22.a)) et qu'il est différent de l'endomorphisme nul (sinon $E = \ker(u) = \ker(K - I_n)$ donc $\ker(K - I_n)$ serait de dimension N , or $N \geq 2$ donc $\dim \ker(I_n - K) \geq 2$ ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle il est de dimension 1) donc nous pouvons utiliser le résultat de la question 18 pour obtenir, en prenant $\lambda = \lambda_2 > \lambda_1 = 0$ (ce qui a du sens car dans ce contexte $p \geq 2$ et $\lambda_1 = 0$),

pour tout $X \in \ker(u)^\perp$, $q_u(X) \geq \lambda \|X\|^2$.

On admet qu'un calcul analogue à celui effectué dans la question 22.b) permet d'établir que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, l'endomorphisme $h_t : X \mapsto H_t X$ est aussi un endomorphisme autoadjoint de E .

23. Étude de l'endomorphisme h_t pour $t \in \mathbb{R}_+$.

a) Montrer que, pour tout $X \in E$, $p(H_t X) = p(X)$.

Soit $X \in E$. Montrons que $H_t X - X \in \ker(u)^\perp = \text{Vect}(U)^\perp$.

$$\begin{aligned} \langle H_t X - X, U \rangle &= \langle H_t X, U \rangle - \langle X, U \rangle \quad \text{par linéarité du produit scalaire} \\ &= \langle h_t(X), U \rangle - \langle X, U \rangle \\ &= \langle X, h_t(U) \rangle - \langle X, U \rangle \quad \text{car } h_t : Y \mapsto H_t Y \text{ est un endomorphisme autoadjoint de } \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R}) \\ &= \langle X, H_t U \rangle - \langle X, U \rangle \\ &= \langle X, U \rangle - \langle X, U \rangle \quad \text{car } H_t \text{ est un noyau de Markov pour } t \in \mathbb{R}_+ \text{ (quest. 4)} \\ &\quad \text{donc } H_t U = U \text{ (quest 1.a))} \\ &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit que $H_t X - X \in \text{Vect}\{U\}^\perp$, or (question 22.a)) $\ker(u) = \text{Vect}\{U\}$ donc $H_t X - X \in \ker(u)^\perp$ si bien que, par linéarité de p ,

$$0 = p(H_t X - X) = p(H_t X) - p(X)$$

Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, pour tout $X \in E$, $p(H_t X) = p(X)$.

b) Montrer que h_t stabilise $\ker(u)^\perp$ c'est-à-dire $h_t(\ker(u)^\perp) \subset \ker(u)^\perp$.

Soit $X \in \ker(u)^\perp$. En utilisant le caractère autoadjoint de h_t ,

$$\langle h_t(X), U \rangle = \langle X, h_t(U) \rangle = \langle X, H_t U \rangle \underbrace{=}_{H_t U = U \text{ (quest 1.a)}} \langle X, U \rangle \underbrace{=}_{X \in \ker(u)^\perp = \text{Vect}\{U\}^\perp} 0$$

donc $h_t(X) \perp U$ donc $h_t(X) \in \text{Vect}\{U\}^\perp = \ker(u)^\perp$.

Ainsi, h_t stabilise $\ker(u)^\perp$

Pour tout $Z \in E$, on note φ_Z la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $\varphi_Z : t \mapsto \|H_t Z\|^2$.

Nous admettons (voir le cours de calcul différentiel de deuxième année) que la fonction φ_Z est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi'_Z(t) = -2q_u(H_t Z)$$

Soit $X \in E$. Posons $Y = X - p(X)$.

24.a) Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que pour tout réel $t \in \mathbb{R}_+$, $\varphi'_Y(t) \leq -2\lambda\varphi_Y(t)$.

Soit $t \in \mathbb{R}_+$.

Utilisons l'expression de la dérivée de φ'_X donnée par l'énoncé

$$\varphi'_Y(t) = -2q_u(H_t Y) = -2q_u(h_t(Y))$$

or

★ d'une part $Y = X - p(X) \in \ker(u)^\perp$ car $X = \underbrace{(X - p(X))}_{\in \ker(u)^\perp} + \underbrace{p(X)}_{\in \ker(u)}$ par définition de la projection

orthogonale sur $\ker(u)$,

★ d'autre part h_t stabilise $\ker(u)^\perp$ d'après la question **23.b)** donc $h_t(Y) \in \ker(u)^\perp$,
ce qui permet d'appliquer l'inégalité établie dans la question **22.d)** pour $X \leftarrow h_t(Y)$:

$$q_u(h_t(Y)) \geq \lambda \|h_t(Y)\|^2$$

donc

$$\varphi'_Y(t) = -2q_u(h_t(Y)) \leq -2\lambda \|h_t(Y)\|^2 = -2\lambda\varphi_Y(t)$$

Ainsi, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\varphi'_Y(t) \leq -2\lambda\varphi_Y(t)$.

b) En déduire, en exploitant la dérivée de $t \mapsto \varphi_Y(t)e^{2\lambda t}$, que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \|H_t X - p(X)\|^2 \leq e^{-2\lambda t} \|X - p(X)\|^2$$

Observons que l'inégalité différentielle établie dans la question précédente se reformule, après multiplication par $e^{2\lambda t} > 0$, en

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}_+, \varphi'_Y(t) \leq -2\lambda\varphi_Y(t) &\iff \varphi'_Y(t) + 2\lambda\varphi_Y(t) \leq 0 \\ &\iff \varphi'_Y(t)e^{2\lambda t} + 2\lambda\varphi_Y(t)e^{2\lambda t} \leq 0 \\ &\iff (s \mapsto \varphi_Y(s)e^{2\lambda s})'(t) \leq 0 \end{aligned}$$

donc la fonction $t \mapsto \varphi_Y(t)e^{2\lambda t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ donc

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \varphi_Y(t)e^{2\lambda t} \leq \varphi_Y(0) \underbrace{e^{2\lambda \times 0}}_{=1} = \|H_0 Y\|^2$$

De plus, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2$,

$$H_0[i, j] = e^{-0} \left(\frac{K^0[i, j]}{0!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{0^n K^n[i, j]}{n!} \right) = K^0[i, j] = \delta_{i,j}$$

donc $H_0 = I_N$ donc

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \|H_t(X - p(X))\|^2 = \varphi_Y(t) \leq e^{-2\lambda t} \|Y\|^2$$

Enfin, $p(X) \in \ker(u)$ (car p projette sur $\ker(u)$) et $\ker(u) = \text{Vect}\{U\}$ (question 22.a)) donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $p(X) = \alpha U$ si bien qu'en utilisant que H_t est un noyau de Markov,

$$H_t p(X) = H_t \times (\alpha U) = \alpha H_t U \underbrace{=}_{\text{quest. 1.a)}} \alpha U = p(X)$$

donc $\|H_t(X - p(X))\|^2 = \|H_t X - H_t p(X)\|^2 = \|H_t X - p(X)\|^2$ ce qui permet de conclure.

Ainsi, $\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \|H_t X - p(X)\|^2 \leq e^{-2\lambda t} \|X - p(X)\|^2.$

25. Soit $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ et $t \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $\|H_t E_i - \pi[i]U\| \leq e^{-\lambda t} \sqrt{\pi[i]}$.

Appliquons l'inégalité de la question précédente pour $X \leftarrow E_i$:

$$\|H_t E_i - p(E_i)\|^2 \leq e^{-2\lambda t} \|E_i - p(E_i)\|^2 \quad (3)$$

Calculons les deux membres. p étant la projection orthogonale sur la droite $\ker(u) = \text{Vect}\{U\}$, nous connaissons son expression explicite à l'aide de U :

$$\forall Z \in E, \quad p(Z) = \frac{\langle Z, U \rangle}{\|U\|^2} \cdot U$$

or $\|U\|^2 = \sum_{i=1}^N \underbrace{U[i]^2}_{=1} \pi[i] = \sum_{i=1}^N \pi[i] = 1$ (propriété (P_2) d'une probabilité) donc

$$\forall Z \in E, \quad p(Z) = \langle Z, U \rangle \cdot U = \left(\sum_{i=1}^N Z[i] \pi[i] \right) \cdot U$$

si bien que $p(E_i) = \pi[i] \cdot U$ d'où

$$H_t E_i - p(E_i) = H_t E_i - \pi[i] \cdot U \quad (4)$$

et comme p est une projection orthogonale, $E_i - p(E_i) \perp p(E_i)$. Ainsi, d'après le théorème de Pythagore,

$$\|E_i - p(E_i)\|^2 = \|E_i\|^2 - \underbrace{\|p(E_i)\|^2}_{\geq 0} \leq \|E_i\|^2 = \sum_{j=1}^n E_i[j]^2 \pi[j] = \pi[i].$$

En injectant le calcul (4) et la majoration (??) dans l'inégalité (3), on obtient

$$\|H_t E_i - \pi[i]U\|^2 \leq e^{-2\lambda t} \pi[i]$$

si bien qu'en prenant l'image des deux membres par la racine carrée (croissante d'où la conservation du sens des inégalités)

$\|H_t E_i - \pi[i]U\| \leq e^{-\lambda t} \sqrt{\pi[i]}.$

26. Montrer que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2$, et tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$H_t[i, j] - \pi[j] = \sum_{k=1}^N (H_{t/2}[i, k] - \pi[k]) (H_{t/2}[k, j] - \pi[j]) .$$

On pourra utiliser la question 5.

Soient $(i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2$ et $t \in \mathbb{R}_+$. Développons le membre de droite :

$$\sum_{k=1}^N (H_{t/2}[i, k] - \pi[k]) (H_{t/2}[k, j] - \pi[j]) = \sum_{k=1}^N H_{t/2}[i, k] H_{t/2}[k, j] - \sum_{k=1}^N \pi[k] H_{t/2}[k, j] - \sum_{k=1}^N H_{t/2}[i, k] \pi[j] + \sum_{k=1}^N \pi[k] \pi[j]$$

★ Dans le premier terme on reconnaît le coefficient (i, j) du produit matriciel $H_{t/2} \times H_{t/2}$ qui vaut H_t d'après la question 5 appliquée pour $(s, t) \leftarrow (t/2, t/2)$ ce qui est autorisé car ces deux réels sont ≥ 0 :

$$\sum_{k=1}^N H_{t/2}[i, k] H_{t/2}[k, j] = H_t[i, j]$$

★ En utilisant la π -réversibilité de $H_{t/2}$, le deuxième terme devient

$$\sum_{k=1}^N \pi[k] H_{t/2}[k, j] = \sum_{k=1}^N \pi[j] H_{t/2}[j, k] = \pi[j],$$

car $H_{t/2}$ est un noyau de Markov.

★ Le troisième terme est , comme $H_{t/2}$ est un noyau de Markov car $t/2 \geq 0$,

$$\sum_{k=1}^N H_{t/2}[i, k] \pi[j] = \pi[j] \underbrace{\sum_{k=1}^N H_{t/2}[i, k]}_{=1} = \pi[j] \quad (\text{propr. } (M_2))$$

★ Le dernier terme est

$$\sum_{k=1}^N \pi[k] \pi[j] = \pi[j] \underbrace{\sum_{k=1}^N \pi[k]}_{=1} = \pi[j] \quad (\text{propriété } (P_2) \text{ d'une probabilité})$$

Par conséquent,

$$\sum_{k=1}^N (H_{t/2}[i, k] - \pi[k]) (H_{t/2}[k, j] - \pi[j]) = H_t[i, j] - \pi[j] - \pi[j] + \pi[j] = H_t[i, j] - \pi[j]$$

Ainsi, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2$, et tout $t \in \mathbb{R}_+$, $H_t[i, j] - \pi[j] = \sum_{k=1}^N (H_{t/2}[i, k] - \pi[k]) (H_{t/2}[k, j] - \pi[j])$.

27. En déduire que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$|H_t[i, j] - \pi[j]| \leq e^{-\lambda t} \sqrt{\frac{\pi[j]}{\pi[i]}}$$

Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} H_t[i, j]$.

Reprenons l'identité établie dans la question précédente et cherchons à identifier le membre de droite au produit scalaire de deux vecteurs de E de la forme des vecteurs dont la question 25 nous permet de contrôler les normes.

Soient $(i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2$ et $t \in \mathbb{R}_+$ fixés. On a établi précédemment que

$$H_t[i, j] - \pi[j] = \sum_{k=1}^N (H_{t/2}[i, k] - \pi[k]) (H_{t/2}[k, j] - \pi[j]) \quad (5)$$

★ Observons que les coordonnées du vecteur $Z_j = H_{t/2}E_j - \pi[j].U$ sont

$$\forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad Z_j[k] = H_{t/2}[k, j] - \pi[j]$$

si bien que l'égalité (5) s'écrit

$$H_t[i, j] - \pi[j] = \sum_{k=1}^N (H_{t/2}[i, k] - \pi[k]) Z_j[k] \quad (6)$$

★ Les coordonnées du vecteur $Z_i = H_{t/2}E_i - \pi[i].U$ sont

$$\forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad Z_i[k] = H_{t/2}[k, i] - \pi[i]$$

et pour les relier aux termes $\ll H_{t/2}[i, k] - \pi[k] \gg$, utilisons la propriété de réversibilité du noyau $H_{t/2}$ (admise par l'énoncé) ainsi que la stricte positivité des coordonnées de la probabilité π (propriété (P_3)) qui permet de factoriser par $1/\pi[i]$:

$$\forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad H_{t/2}[i, k] - \pi[k] = \frac{\pi[k]}{\pi[i]} \left(\frac{\pi[i]H_{t/2}[i, k]}{\pi[k]} - \pi[i] \right) \underset{H_{t/2} \text{ révers.}}{=} \frac{\pi[k]}{\pi[i]} \left(\frac{H_{t/2}[k, i]\pi[k]}{\pi[k]} - \pi[i] \right) = \frac{\pi[k]}{\pi[i]} Z_i[k]$$

Ce calcul permet d'interpréter l'égalité (6) comme

$$H_t[i, j] - \pi[j] = \frac{1}{\pi[i]} \sum_{k=1}^N Z_i[k] Z_j[k] \pi[k] = \frac{1}{\pi[i]} \langle Z_i, Z_j \rangle$$

En prenant la valeur absolue puis en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$,

$$|H_t[i, j] - \pi[j]| = \frac{1}{\pi[i]} |\langle Z_i, Z_j \rangle| \leq \frac{1}{\pi[i]} \|Z_i\| \times \|Z_j\| \quad (7)$$

or la question 25 appliquée pour $t \leftarrow t/2$ (autorisé car $t/2 \geq 0$) nous permet de contrôler les normes

$$\|Z_i\| \leq e^{-\lambda t/2} \sqrt{\pi[i]} \text{ et } \|Z_j\| \leq e^{-\lambda t/2} \sqrt{\pi[j]}$$

de sorte que l'inégalité (7) devient

$$|H_t[i, j] - \pi[j]| \leq \frac{1}{\pi[i]} \times e^{-\lambda t/2} \sqrt{\pi[i]} e^{-\lambda t/2} \sqrt{\pi[j]} = e^{-\lambda t} \sqrt{\frac{\pi[j]}{\pi[i]}}$$

Ainsi, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$, $|H_t[i, j] - \pi[j]| \leq e^{-\lambda t} \sqrt{\frac{\pi[j]}{\pi[i]}}$.

Soient $(i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2$.

La stricte positivité de λ (question 22.d)) garantit que $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\lambda t} \sqrt{\frac{\pi[j]}{\pi[i]}} = 0$ donc le théorème d'existence

de limite par encadrement donne $\lim_{t \rightarrow +\infty} H_t[i, j] = \pi[j]$.

Ainsi, la fonction matricielle $t \rightarrow H_t$ tend vers un « noyau de Markov limite » qui est $U \times \pi$.

D Mathématiques 2 PC

Q1 - La première partie de la question est correctement traitée dans la majorité des copies. Le jury ne s'attendait pas toutefois à voir, dans les moins bonnes copies, une telle méconnaissance du produit matriciel, qui est tout de même une des opérations de base en algèbre linéaire. La relation $(AB)[i, j] = A[i, j] * B[i, j]$ a été rencontrée très fréquemment, sans parler d'autres formules plus exotiques et parfois dénuées de sens. Sur ces moins bonnes copies, on lit souvent aussi des égalités absurdes, comme par exemple entre la matrice-colonne U et une somme de coefficients scalaires.

Pour la deuxième partie : l'hypothèse $(M1)$ est parfois oubliée, ou à peine mentionnée sans justification propre, ce qui a été sanctionné. Certains candidats vérifient correctement l'hypothèse $(M2)$ par le calcul direct de la somme des éléments de la matrice AB , sans utiliser la première partie de la question.

Q2 - La question est généralement bien traitée par récurrence en utilisant la question 1. Quelques candidats oublient la base de la récurrence pour $n = 0$.

Q3 - Cette question a été rarement réussie. En effet, dans la majorité des copies l'identité $K^n[i, j] = (K[i, j])^n$ (fausse !) sert de point de départ pour appliquer la règle de d'Alembert et ainsi proposer un raisonnement faux. Dans d'autres copies, l'inégalité du début $0 \leq K^n[i, j] \leq 1$ est correcte, mais ensuite un terme général de la série (qui n'est pas positif pour tout t réel) est juste majoré par un terme de la série exponentielle. L'oubli de la valeur absolue dans cette majoration ne permet pas non plus de réussir la question.

Q4 - À la différence de la question précédente, cette question a été plutôt bien traitée. Quelques candidats ont oublié de vérifier l'hypothèse $(M1)$. La majorité des candidats ont su permuter correctement les sommes finie et infinie pour vérifier l'hypothèse $(M2)$.

Q5 - Cette question a été rarement réussie et permettait de repérer les bonnes copies. Beaucoup de candidats ont su utiliser le produit de Cauchy et identifier le binôme de Newton mais ont écrit un raisonnement erroné à cause de l'incompréhension du terme $K^n[i, j]$. En effet, $K^n[i, j]$ est un coefficient de la matrice K^n et non $(K[i, j])^n$. Ici encore, la relation fautive $(H_t H_s)[i, j] = H_t[i, j] * H_s[i, j]$ a été fréquemment rencontrée par les correcteurs.

Q6 - La question a été plutôt bien traitée, même si dans certaines copies un raisonnement rigoureux était remplacé par des explications intuitives non recevables. En particulier, la notation $(A \mid B)$ n'est pas un événement, et par conséquent $((Z_1 = j \mid Z_0 = i))_{1 \leq j \leq N}$ n'est pas un système (complet) d'événements.

Q7 - Beaucoup de candidats ne maîtrisent visiblement pas la formule des probabilités totales : le signe de sommation sur tous les états à l'instant précédent était souvent absent. Cette question s'est assez souvent soldée par un échec.

Q8 - L'indépendance de $(Z_n = j)$ et $(Y_t = n)$ pour tous $t \geq 0$, $n \in \mathbf{N}$ et $j \in \{1, \dots, N\}$ était sous-entendue mais pas explicitée dans l'énoncé. Les correcteurs ont récompensé tous les candidats qui ont appliqué correctement la formule des probabilités totales dans cette question.

Q9 - Cette question du cours a été partiellement bien traitée. Néanmoins, beaucoup de candidats présentent un énoncé incomplet, en oubliant la base orthonormale. D'autres affirment dans la deuxième partie la positivité du spectre mais en la justifiant par des arguments faux.

Q10 - C'est encore une question qui, avec les questions 3 et 5, permettait de distinguer les bonnes copies. Elle ne demandait pourtant que la maîtrise de notions de base du programme d'Algèbre linéaire : la décomposition en base orthonormée, la notion de noyau et de projection orthogonale. Les correcteurs

sont étonnés de l'insuffisance de la réponse à cette question dans la grande majorité des copies.

Q11 - La question a été bien réussie par la majorité des candidats.

Q12 - La question a été très majoritairement réussie. Toutefois, la démonstration du caractère défini du produit scalaire est souvent peu satisfaisante. Nous aimerions voir écrit clairement qu'une somme de réels positifs est nulle si et seulement si chaque terme est nul. Certains candidats veulent aussi prouver "défini" avant "positif", ce qui ne peut conduire qu'à des preuves assez bancalées.

Q13 - La majorité des candidats voient l'utilité de la question 1 pour prouver que $U \in \ker(u)$. On note toutefois une erreur de logique beaucoup trop fréquente : de la constatation que $KU = U$ (question 1), il est souvent déduit abusivement sans autre argument ("par identification" ???) que, si un vecteur X vérifie $KX = X$, alors nécessairement $X = U$, ou au moins que X est colinéaire à U . Peu nombreux sont ceux qui exploitent correctement le fait que 1 est valeur propre simple pour montrer l'inclusion dans l'autre sens. La dernière partie de la question est rarement réussie : en effet, les candidats ne pensent pas à utiliser la réversibilité de K qui était nécessaire pour aboutir.

Q14 - La première partie de la question a été assez rarement entamée et encore plus rarement réussie. Le recours à la réversibilité de K était de nouveau indispensable. En admettant le résultat de la première partie, un petit nombre de candidats a réussi la deuxième, en remarquant la positivité des valeurs propres.

Q15 - Très peu de candidats notent que la dérivabilité est une conséquence immédiate de la dérivabilité de la somme d'une série entière de rayon de convergence infini (*cf.* question 3). Certains se lancent dans la preuve de la convergence normale par une majoration sur un segment, ce qui a été récompensé sous réserve d'une preuve correcte. Ensuite, extrêmement peu de candidats prouvent l'identité demandée : le fait que $K^n[i, j] \neq (K[i, j])^n$ est à nouveau un obstacle à surmonter, comme dans les questions 3 et 5.

Q16 - Il était possible de traiter cette question en admettant le résultat de la question 15. Quelques candidats en ont profité et ont obtenu le résultat correct.

Q17 - Très peu de preuves correctes pour cette question : il était nécessaire de maîtriser le programme d'algèbre linéaire et de suivre le fil conducteur du sujet.

Q18 - La question n'a presque jamais été correctement traitée. Certains candidats ont deviné l'utilité de la question 10 mais n'ont pas su aller plus loin.

Q19 - La preuve du fait que $p(E_i) = \pi[i]U$ marque un bon début dans quelques copies rares. Dans des copies exceptionnelles la question 18 a été appliquée correctement et le calcul de $\|E_i - p(E_i)\|^2$ réussi.

Q20 - Cette question a été bien réussie dans un certain nombre de copies par les candidats qui ont compris le fil conducteur du sujet.

Q21 - Il était exceptionnel de réussir la première partie de cette question. Or, beaucoup de candidats déduisent le résultat final $\pi[j]$, qu'il fallait encore proprement justifier, notamment en remarquant la positivité de λ .

[↑RETOUR](#)