

CONCOURS BLANC

Sujet donné le lundi 15 juin 2026, 4h.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

La notation tiendra particulièrement compte de la **qualité de la rédaction**, la **précision des raisonnements** et l'**énoncé des formules utilisées**. Les réponses aux questions seront numérotées et séparées par un trait horizontal. Les résultats essentiels devront être encadrés ou soulignés.

CHAÎNE DE MARKOV EN TEMPS CONTINU

Dans tout le sujet on se fixe un entier naturel $N \geq 2$.

- Soient p, q deux entiers naturels non nuls et $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$, on note $A[i, j]$ le coefficient à la ligne i et la colonne j de A . Par abus, si A est une matrice colonne ($q = 1$), on note $A[i]$ pour $A[i, 1]$. De même, si A est une matrice ligne ($p = 1$) on note $A[i]$ pour $A[1, i]$.
 $(AB)[i, j]$ est donc l'élément à la ligne i et la colonne j de la matrice produit $A \times B$.
 Pour tout entier naturel n , A^n désigne la puissance n de la matrice A , $A^n[i, j]$ est donc l'élément à la ligne i et la colonne j de A^n . On adopte la convention usuelle $A^0 = I_N$ où I_N est la matrice identité de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.
- On identifie $\mathbb{R}^N$ avec $\mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$. Pour tout $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$ on note $E_k \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ la matrice colonne dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la k -ième ligne qui vaut 1.
 On rappelle que $(E_1, \dots, E_N)$ est une base de $\mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$.
 On note $U \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ le vecteur colonne dont toutes les coordonnées sont égales à 1. On a donc pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $U[i] = 1$.
- On appelle **noyau de Markov** une matrice $K \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ telle que

$$(M_1) \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2, K[i, j] \geq 0$$

$$(M_2) \quad \forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, \sum_{j=1}^N K[i, j] = 1$$

- On suppose qu'il existe un univers Ω et une probabilité $\mathbf{P}$ tels que toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur cet univers.

Partie I - Préliminaires

1. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})^2$.

a) Montrer que A vérifie (M_2) si et seulement si $AU = U$.

b) En déduire que si A et B sont deux noyaux de Markov alors AB est encore un noyau de Markov.

On se fixe un noyau de Markov K .

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, K^n est un noyau de Markov.

3.a) Montrer, à l'aide d'une formule de Taylor soigneusement appliquée, que pour tout $t \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!}$ converge

et calculer sa somme. (On demande ici de redémontrer un résultat de cours)

b) Soient $t \in \mathbb{R}$ et $(i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2$. Justifier que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{t^n K^n[i, j]}{n!}$ converge. On sera vigilant et remarquera que

$K^n[i, j]$ est différent de $(K[i, j])^n$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on notera $H_t \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ la matrice définie par

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2, \quad H_t[i, j] = e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n K^n[i, j]}{n!}$$

4. Montrer que pour tout réel $t \in \mathbb{R}_+$, H_t est un noyau de Markov.

5. Montrer que pour $(t, s) \in \mathbb{R}^2$, $H_{t+s} = H_t \times H_s$. On pourra faire apparaître un produit de Cauchy.

Partie II - Urnes d'Ehrenfest

On considère dans cette partie un modèle de gaz introduit par Paul et Tatiana Ehrenfest (1907).

Soit n un entier naturel non nul. Deux récipients A et B sont placés côte à côte et du gaz est autorisé à passer par une ouverture qui les relie. À l'instant initial, on dispose $2n$ particules dans le récipient A . Ensuite, à chaque instant $t \in \mathbb{N}^*$ se produit une impulsion : une particule est choisie au hasard parmi les $2n$ particules. Si la particule choisie se trouve dans le récipient A , elle se déplace dans le récipient B , sinon elle est dans le récipient B et elle se déplace dans le récipient A .

On note $X_0 = 2n$, puis, pour tout t entier naturel, X_t le nombre de particules qui se trouvent dans la chambre A après t impulsions.

Soit $t \in \mathbb{N}$.

6.a) Proposer un ensemble raisonnable pour $X_t(\Omega)$.

b) Montrer que, pour tout $i, j \in \llbracket 0, 2n \rrbracket \times \llbracket 1, 2n - 1 \rrbracket$,

$$\mathbf{P}_{X_t=i}(X_{t+1}=j) = \begin{cases} 0 & \text{si } |i-j| \neq 1, \\ \frac{i}{2n} & \text{si } j = i-1, \\ \frac{2n-i}{2n} & \text{si } j = i+1. \end{cases}$$

Que valent $\mathbf{P}_{X_t=i}(X_{t+1}=0)$ et $\mathbf{P}_{X_t=i}(X_{t+1}=2n)$?

La réponse à la question précédente donne un résultat indépendant de t . Ainsi, pour $t \in \mathbb{N}$ quelconque, on note $K = (\mathbf{P}_{X_t=i-1}(X_{t+1}=j-1))_{1 \leq i, j \leq 2n+1}$.

c) Expliciter la matrice K (on précisera explicitement le contenu du bloc carré de taille 4 en haut à gauche, celui du bloc carré de taille 2 en bas à droite et on utilisera des pointillés pour indiquer comment se remplissent les autres coefficients) et vérifier qu'il s'agit d'un noyau de Markov.

d) On note $\pi \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ la matrice ligne définie par $\forall i \in \llbracket 1, 2n+1 \rrbracket, \pi[i] = \binom{2n}{i-1} \frac{1}{2^{2n}}$.

Montrer que $\pi K = \pi$.

7. Pour tout $i \in \llbracket 1, 2n-1 \rrbracket$, exprimer $\mathbf{P}(X_{t+1}=i)$ en fonction de $(\mathbf{P}(X_t=j))_{j \in \llbracket 0, 2n \rrbracket}$.

On note G_t la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $G_t(u) = \sum_{k=0}^{2n} \mathbf{P}(X_t=k) u^k = \mathbf{E}(u^{X_t})$. La fonction G_t est le polynôme générateur de la variable aléatoire X_t .

8. Calculer $G_t(1)$ et montrer que $G'_t(1) = \mathbf{E}(X_t)$.

9. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{N}$ et tout $u \in \mathbb{R}$,

$$G_{t+1}(u) = uG_t(u) + \frac{1-u^2}{2n} G'_t(u)$$

10. En déduire que $\mathbf{E}(X_{t+1}) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \mathbf{E}(X_t) + 1$.

11. En déduire une expression de $\mathbf{E}(X_t)$, pour tout $t \in \mathbb{N}$.

12. Exprimer $\mathbf{V}(X_t)$ en fonction de $G'_t(1)$ et $G''_t(1)$.

On note $P_t = \frac{X_t}{2n}$ la proportion de particules se trouvant dans l'urne A (P_t représente la pression dans l'urne A). On admettra que la relation de récurrence précédente permet d'obtenir, en notant $\alpha = 1 - \frac{1}{n}$ et $\beta = 1 - \frac{2}{n}$ que

$$\forall t \in \mathbb{N}, \mathbf{V}(P_t) = \frac{1-\beta^t}{8n} + \frac{\beta^t - \alpha^{2t}}{4}.$$

13. Comparer α^{2t} et β^t pour en déduire une majoration de $\mathbf{V}(P_t)$ en fonction de n et indépendante de t .

14. Soit $\varepsilon > 0$.

a) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(|P_t - \mathbf{E}(P_t)| \geq \varepsilon) = 0$.

b) Montrer que $\left\{ \left| P_t - \frac{1}{2} \right| \geq \varepsilon \right\} \subset \left\{ |P_t - \mathbf{E}(P_t)| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \cup \left\{ \left| \mathbf{E}(P_t) - \frac{1}{2} \right| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\}$. On pourra raisonner par contraposée.

c) En déduire que, pour tout $\eta > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, il existe $t_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $t \geq t_0$, $\mathbf{P} \left(\left| P_t - \frac{1}{2} \right| \geq \varepsilon \right) \leq \eta$.

On a ainsi montré que, lorsque le nombre de particules est grand, après une phase transitoire, la « pression » tend à être identique dans les deux urnes.

Partie III - Étude d'endomorphismes autoadjoints positifs

Dans cette partie nous considérons un espace vectoriel euclidien E de dimension N dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et la norme $\| \cdot \|$.

Soit u un endomorphisme de E que nous supposons

- **autoadjoint** ce qui signifie $\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$,
- et **positif** ce qui signifie $\forall x \in E, \langle u(x), x \rangle \geq 0$.

On associe à u la « forme quadratique » $q_u \left| \begin{array}{l} E \rightarrow E \\ x \mapsto \langle u(x), x \rangle \end{array} \right.$.

On admet que le caractère autoadjoint de u permet d'affirmer qu'il existe un entier naturel $p \geq 1$ et p nombres réels $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_p$ tels que, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, le sous-espace $E_{\lambda_i} = \ker(u - \lambda_i \text{Id}_E)$ n'est pas réduit à $\{0_E\}$ et l'espace E est égal à la somme directe de ces p sous-espaces :

$$E = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p} = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i},$$

ce qui signifie que tout vecteur $x \in E$ se décompose de manière unique sous la forme $x = \sum_{i=1}^p x_i$ où, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $x_i \in E_{\lambda_i}$.

On remarquera que, pour tout vecteur $x \in E$, $x \in E_{\lambda_i} \iff u(x) = \lambda_i x$.

15. Montrer que $\lambda_1 \geq 0$. On pourra étudier $q_u(x)$ pour $x \in E_{\lambda_1}$.

16. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$ tels que $i \neq j$. Montrer que E_{λ_i} et E_{λ_j} sont orthogonaux, en utilisant le caractère auto-adjoint de u .

17. On suppose, dans cette question uniquement, $p \geq 2$. Soit $x \in E_{\lambda_1}^\perp$. Montrer que $q_u(x) \geq \lambda_2 \|x\|^2$.

18. On suppose, dans cette question uniquement, que u n'est pas injectif et que u n'est pas l'endomorphisme nul. Justifier que $\lambda_1 = 0$, $p \geq 2$ puis que

$$\forall x \in \ker(u)^\perp, q_u(x) \geq \lambda_2 \|x\|^2.$$

Partie IV - Convergence de $H_t[i, j]$

On cherche à modéliser un système ayant N états numérotés de 1 à N . À l'instant initial le système est dans l'état 1. Le système est soumis à des impulsions aléatoires qui le font changer d'état.

On suppose que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2$, à chaque impulsion, si le système est dans l'état i , il se retrouve dans l'état j avec une probabilité $p_{i,j}$ qui ne dépend que de l'état où il était avant l'impulsion.

On note Z_0 la variable certaine de valeur 1. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on note Z_k la variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket 1, N \rrbracket$ qui correspond à l'état du système après k impulsions. Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2$ et tout $k \in \mathbb{N}$ tels que $\mathbf{P}(Z_k = i) \neq 0$ on a donc $\mathbf{P}_{Z_k=i}(Z_{k+1} = j) = \mathbf{P}(Z_{k+1} = j | Z_k = i) = p_{i,j}$. En particulier, cette probabilité ne dépend pas de k .

On considère la matrice $K \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2, K[i, j] = p_{i,j}.$$

19.a) Justifier que K est un noyau de Markov.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$ montrer que $\mathbf{P}(Z_n = j) = K^n[1, j]$.

On rappelle que H_t est défini pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $(i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2$ par $H_t[i, j] = e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{K^n[i, j]}{n!} t^n$.

On admettra que H_t est le noyau de Markov obtenu en observant à l'instant t le système sachant qu'il y a eu un nombre aléatoire d'impulsions entre les instants 0 et t , ce nombre suivant une loi de Poisson de paramètre t .

On suppose que $\text{Ker}(K - I_N)$ est un espace vectoriel de **dimension** 1.

On appelle **probabilité sur** $\mathbb{R}^N$ un vecteur ligne $\mu \in \mathcal{M}_{1,N}(\mathbb{R})$ tel que

$$\begin{aligned} (P_1) \quad & \forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, \mu[i] \geq 0 \\ (P_2) \quad & \sum_{j=1}^N \mu[j] = 1 \end{aligned}$$

On suppose dans cette partie qu'il existe une probabilité $\pi \in \mathcal{M}_{1,N}(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$(P_3) \quad \forall j \in \llbracket 1, N \rrbracket, \pi[j] \neq 0.$$

$$(R) \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2, \pi[i]K[i, j] = K[j, i]\pi[j] \quad - \quad \text{on dit que le noyau } K \text{ est } \pi\text{-réversible.}$$

Un rapide calcul montre alors que, pour tout réel t positif, H_t est aussi un noyau de Markov π -réversible, c'est-à-dire que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2, \quad \pi[i]H_t[i, j] = H_t[j, i]\pi[j]$$

On ne demande donc pas de démontrer ce résultat.

Pour $(X, Y) \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})^2$, on pose

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^N X[i]Y[i]\pi[i]$$

Dans cette dernière partie, on cherche à déterminer pour $(i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2$ la limite de $H_t[i, j]$ quand t tend vers $+\infty$ et à majorer la vitesse de convergence vers cette limite.

20.a) Montrer que $\pi K = \pi$.

21. Montrer que $(X, Y) \mapsto \langle X, Y \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$.

Dans la suite on note E l'espace euclidien $\mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ muni de ce produit scalaire et on considère l'endomorphisme de E défini par $u : X \mapsto (I_N - K)X$.

On note $p : E \rightarrow E$ la projection orthogonale sur $\ker(u)$.

22. Étude de l'endomorphisme u .

a) Montrer que $\ker(u) = \text{Vect}(U)$.

b) Montrer que u est un endomorphisme autoadjoint de E .

c) Montrer que pour tout $X \in E$

$$q_u(X) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (X[i] - X[j])^2 K[i, j]\pi[i].$$

d) En déduire qu'il existe $\lambda > 0$ tel que pour tout $X \in \ker(u)^\perp$,

$$q_u(X) \geq \lambda \|X\|^2$$

On admet qu'un calcul analogue à celui effectué dans la question **22.b)** permet d'établir que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, l'endomorphisme $h_t : X \mapsto H_t X$ est aussi un endomorphisme autoadjoint de E .

23. Étude de l'endomorphisme h_t pour $t \in \mathbb{R}_+$.

a) Montrer que, pour tout $X \in E$, $p(H_t X) = p(X)$.

b) Montrer que h_t stabilise $\ker(u)^\perp$ c'est-à-dire $h_t(\ker(u)^\perp) \subset \ker(u)^\perp$.

Pour tout $Z \in E$, on note φ_Z la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $\varphi_Z : t \mapsto \|H_t Z\|^2$.

Nous admettrons (voir le cours de calcul différentiel de deuxième année) que la fonction φ_Z est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'_Z(t) = -2q_u(H_t Z)$$

Soit $X \in E$. Posons $Y = X - p(X)$.

24.a) Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que pour tout réel $t \in \mathbb{R}_+$, $\varphi'_Y(t) \leq -2\lambda\varphi_Y(t)$.

b) En déduire, en exploitant la dérivée de $t \mapsto \varphi_Y(t)e^{2\lambda t}$, que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \|H_t X - p(X)\|^2 \leq e^{-2\lambda t} \|X - p(X)\|^2$$

25. Soit $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ et $t \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $\|H_t E_i - \pi[i]U\| \leq e^{-\lambda t} \sqrt{\pi[i]}$.

26. Montrer que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2$, et tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$H_t[i, j] - \pi[j] = \sum_{k=1}^N (H_{t/2}[i, k] - \pi[k]) (H_{t/2}[k, j] - \pi[j]).$$

On pourra utiliser la question **5**.

27. En déduire que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$|H_t[i, j] - \pi[j]| \leq e^{-\lambda t} \sqrt{\frac{\pi[j]}{\pi[i]}}$$

Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} H_t[i, j]$.