



Leçon 7 - Trigonométrie



⇒ Construction historique de la trigonométrie

1. Problèmes

2. Fonctions trigonométriques

- 2.1. Construction historique
- 2.2. Fonctions sinus et cosinus
- 2.3. Fonction tangente

3. Formules trigonométriques

- 3.1. Formules de Regiomontanus



⇒ Construction historique de la trigonométrie

1. Problèmes

2. Fonctions trigonométriques

2.1. Construction historique

2.2. Fonctions sinus et cosinus

2.3. Fonction tangente

3. Formules trigonométriques

3.1. Formules de Regiomontanus



Problèmes

Problème - Fonctions définies sur des angles nulles et droits. Et plus loin ?



Problèmes

Problème - Fonctions définies sur des angles nulles et droits. Et plus loin ?

Problème - Unicité de mesures d'angles



Problèmes

Problème - Fonctions définies sur des angles nulles et droits. Et plus loin ?

Problème - Unicité de mesures d'angles

Problème - Relation entre les formules de trigonométrie



Problèmes

Problème - Fonctions définies sur des angles nulles et droits. Et plus loin ?

Problème - Unicité de mesures d'angles

Problème - Relation entre les formules de trigonométrie

Problème - Equation polynomiale et trigonométrie



Problèmes

Problème - Fonctions définies sur des angles nulles et droits. Et plus loin ?

Problème - Unicité de mesures d'angles

Problème - Relation entre les formules de trigonométrie

Problème - Equation polynomiale et trigonométrie

Problème - Fonction réciproque



⇒ Construction historique de la trigonométrie

1. Problèmes

2. Fonctions trigonométriques

2.1. Construction historique

2.2. Fonctions sinus et cosinus

2.3. Fonction tangente

3. Formules trigonométriques

3.1. Formules de Regiomontanus



Histoire des maths

Analyse Triangles rectangles semblables



Histoire des maths

Analyse Triangles rectangles semblables

Analyse Simplification : hypothénuse égale à 1



Histoire des maths

Analyse Triangles rectangles semblables

Analyse Simplification : hypoténuse égale à 1

Analyse Mesure naturelle d'angle



⇒ Construction historique de la trigonométrie

1. Problèmes

2. Fonctions trigonométriques

2.1. Construction historique

2.2. Fonctions sinus et cosinus

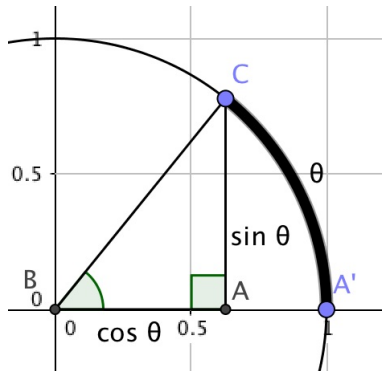
2.3. Fonction tangente

3. Formules trigonométriques

3.1. Formules de Regiomontanus



Représentation



Périodicité et symétrie

On a alors les résultats suivants (à savoir retrouver)

Exercice

Compléter les résultats suivants :

$$\sin(-\theta) = \quad \cos(-\theta) = \quad \sin(\theta + \pi) = \quad \cos(\theta + \pi) =$$

$$\sin(\pi - \theta) = \quad \cos(\pi - \theta) = \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) =$$



Congruence

Définition - Congruence modulo α

Soient θ, θ' et α trois réels.

On dit que θ est congru à θ' modulo α

s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = \theta' + k\alpha$ tel que

$$\theta \equiv \theta'[\alpha] \iff \exists k \in \mathbb{Z}; \theta = \theta' + k\alpha$$

Proposition - Propriétés des congruences

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a pour tout $(\theta, \theta', \theta'') \in \mathbb{R}^3$:

- $\theta \equiv \theta[\alpha]$ (reflexivité)
- $\theta \equiv \theta'[\alpha] \Rightarrow \theta' \equiv \theta[\alpha]$ (symétrie)
- $(\theta \equiv \theta'[\alpha] \text{ et } \theta' \equiv \theta''[\alpha]) \Rightarrow \theta \equiv \theta''[\alpha]$ (transitivité)

On dit que la congruence modulo α est une relation d'équivalence.



Congruence

Définition - Congruence modulo α

Soient θ, θ' et α trois réels.

On dit que θ est congru à θ' modulo α

s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = \theta' + k\alpha$ tel que

$$\theta \equiv \theta'[\alpha] \iff \exists k \in \mathbb{Z}; \theta = \theta' + k\alpha$$

Proposition - Propriétés des congruences

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a pour tout $(\theta, \theta', \theta'') \in \mathbb{R}^3$:

- $\theta \equiv \theta[\alpha]$ (reflexivité)
- $\theta \equiv \theta'[\alpha] \Rightarrow \theta' \equiv \theta[\alpha]$ (symétrie)
- $(\theta \equiv \theta'[\alpha] \text{ et } \theta' \equiv \theta''[\alpha]) \Rightarrow \theta \equiv \theta''[\alpha]$ (transitivité)

On dit que la congruence modulo α est une relation d'équivalence.

Démonstration



Savoir-faire

Savoir-faire. Cas d'égalité de sinus ou de cosinus

Pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\sin \theta = \sin \theta' \iff$$

$$\cos \theta = \cos \theta' \iff$$



Savoir-faire

Savoir-faire. Cas d'égalité de sinus ou de cosinus

Pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\sin \theta = \sin \theta' \iff \theta \equiv \theta' [2\pi] \text{ ou } \theta \equiv \pi - \theta' [2\pi]$$

$$\cos \theta = \cos \theta' \iff \theta \equiv \theta' [2\pi] \text{ ou } \theta \equiv -\theta' [2\pi]$$



⇒ Construction historique de la trigonométrie

1. Problèmes

2. Fonctions trigonométriques

2.1. Construction historique

2.2. Fonctions sinus et cosinus

2.3. Fonction tangente

3. Formules trigonométriques

3.1. Formules de Regiomontanus



Définition

Définition - Tangente d'un angle

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$. On appelle *tangente* de θ le réel, noté $\tan \theta$, défini par :

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$



Définition

Définition - Tangente d'un angle

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$. On appelle *tangente* de θ le réel, noté $\tan \theta$, défini par :

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

Remarque Fonction cotangente



Propriétés

Proposition - (Im)parité et périodicité

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$. On a

$$\tan(-\theta) = -\tan \theta \quad \tan(\pi + \theta) = \tan \theta \quad \tan(\pi - \theta) = -\tan \theta$$



Propriétés

Proposition - (Im)parité et périodicité

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$. On a

$$\tan(-\theta) = -\tan \theta \quad \tan(\pi + \theta) = \tan \theta \quad \tan(\pi - \theta) = -\tan \theta$$

Démonstration



Représentation

Exercice

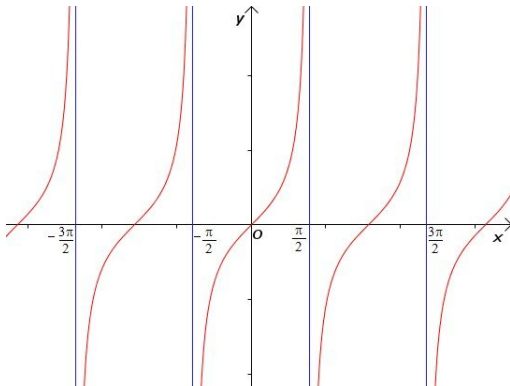
Etudier et représenter la fonction $\tan$



Représentation

Exercice

Etudier et représenter la fonction $\tan$



Cas d'égalité

Proposition - Cas d'égalité de tangentes

Pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\tan \theta = \tan \theta' \iff \theta \equiv \theta'[\pi]$$



⇒ Construction historique de la trigonométrie

1. Problèmes

2. Fonctions trigonométriques

2.1. Construction historique

2.2. Fonctions sinus et cosinus

2.3. Fonction tangente

3. Formules trigonométriques

3.1. Formules de Regiomontanus



A savoir!!!

Très important ! A connaître par coeur, absolument ! Il peut être bon d'avoir un moyen mnémotechnique auprès de soi...

Proposition. Formules fondamentales

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \quad 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \text{ où } \cos^2 \theta = (\cos \theta)^2$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \quad \sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$



Conclusion

Objectifs

⇒ Construction historique de la trigonométrie



Conclusion

Objectifs

⇒ Construction historique de la trigonométrie

- Définition bancaire de $\sin$ et $\cos$ (à partir d'un triangle rectangle). Puis $\tan$



Conclusion

Objectifs

⇒ Construction historique de la trigonométrie

- Définition bancaire de $\sin$ et $\cos$ (à partir d'un triangle rectangle). Puis $\tan$
- Définition naturelle de la mesure d'angle en radian



Conclusion

Objectifs

⇒ Construction historique de la trigonométrie

- Définition bancale de $\sin$ et $\cos$ (à partir d'un triangle rectangle). Puis $\tan$
- Définition naturelle de la mesure d'angle en radian
- Inégalité fondamentale : $\sin x \leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x}$



Conclusion

Objectifs

⇒ Construction historique de la trigonométrie

- Définition bancale de $\sin$ et $\cos$ (à partir d'un triangle rectangle). Puis $\tan$
- Définition naturelle de la mesure d'angle en radian
- Inégalité fondamentale : $\sin x \leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x}$
- Extension de $\cos$ et $\sin$ pour des angles non compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$



Conclusion

Objectifs

⇒ Construction historique de la trigonométrie

- Définition bancale de $\sin$ et $\cos$ (à partir d'un triangle rectangle). Puis $\tan$
- Définition naturelle de la mesure d'angle en radian
- Inégalité fondamentale : $\sin x \leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x}$
- Extension de $\cos$ et $\sin$ pour des angles non compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$
- Propriétés simples de symétrie et parité (à savoir retrouver)



Conclusion

Objectifs

⇒ Construction historique de la trigonométrie

Pour la prochaine fois

- Lecture du cours : chapitre 3
4. Trigonométrie réciproque
- Exercice n° 47 & 55
- TD : 8h-10h : 52, 57, 53, 59, 49a (T_n), 51b
10h-12h : 50, 56, 54, 60, 49b (U_n), 51a
- Cahier de calcul (vendredi) : Fiche n°3 et fiche n°8

