



Leçon 8 - Trigonométrie





⇒ Formule de Regiomontanus et conséquence

1. Problèmes

2. Fonctions trigonométriques

3. Formules trigonométriques

3.1. Formules de Regiomontanus

3.2. Produit en somme et réciproquement

3.3. Angle moitié





⇒ Formule de Regiomontanus et conséquence

1. Problèmes

2. Fonctions trigonométriques

3. Formules trigonométriques

3.1. Formules de Regiomontanus

3.2. Produit en somme et réciproquement

3.3. Angle moitié





A savoir!!!

Très important ! A connaître par coeur, absolument ! Il peut être bon d'avoir un moyen mnémotechnique auprès de soi...

Proposition. Formules fondamentales

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \quad 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \text{ où } \cos^2 \theta = (\cos \theta)^2$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \quad \sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$





Piste pour retenir...

Trucs et astuces. Exploiter les symétries du calcul

Une piste pour retrouver la formule $\cos(a + b)$.

Nous savons qu'il existe une relation, mais laquelle. Notons

$$\varphi(a, b) = \cos(a + b).$$

La relation doit vérifier :

- $\varphi(b, a) = \varphi(a, b)$, cela ne peut donc pas être $\varphi(a, b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$.
- $\varphi(-a, -b) = \varphi(a, b)$, cela ne peut donc pas être $\varphi(a, b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$.
- $\varphi(a, -a) = \cos(0) = 1$, cela ne peut donc pas être $\varphi(a, b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$, dans ce cas $\varphi(a, -a) = \cos^2 a - \sin^2 a \neq 1$ (pour la plupart des a)





Démonstration

Démonstration





Autre démonstration

Exercice

On peut aussi exploiter les équations différentielles.

On note $f : x \mapsto \cos(a + x)$. Montrer que f est solution du problème de

$$\text{Cauchy : } \begin{cases} y'' + y &= 0 \\ y(0) &= \cos a \\ y'(0) &= -\sin(a) \end{cases} .$$

En déduire une expression de f .





Autre démonstration

Exercice

On peut aussi exploiter les équations différentielles.

On note $f : x \mapsto \cos(a + x)$. Montrer que f est solution du problème de

$$\text{Cauchy : } \begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = \cos a \\ y'(0) = -\sin(a) \end{cases}.$$

En déduire une expression de f .

Nouveau moyen mnemotechnique

Trucs et astuces. Combinaison linéaire en $\cos x$ et $\sin x$

$x \mapsto \cos(a + x)$ est une fonction, combinaison linéaire de $\cos x$ et $\sin x$.

Il existe A, B indépendant de x tel que $\cos(a + x) = A \cos x + B \sin x$.

En particulier pour $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$: $\cos a = A \times 1 + B \times 0$ et

$\cos(a + \frac{\pi}{2}) = -\sin a = A \times 0 + B \times 1$.

Donc pour tout $a, x \in \mathbb{R}$: $\cos(a + x) = \cos a \cos x - \sin a \sin x$.



Autre démonstration

Exercice

On peut aussi exploiter les équations différentielles.

On note $f : x \mapsto \cos(a + x)$. Montrer que f est solution du problème de

$$\text{Cauchy : } \begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = \cos a \\ y'(0) = -\sin(a) \end{cases}.$$

En déduire une expression de f .

Nouveau moyen mnemotechnique

Trucs et astuces. Combinaison linéaire en $\cos x$ et $\sin x$

$x \mapsto \sin(a + x)$ est une fonction, combinaison linéaire de $\cos x$ et $\sin x$.

Il existe C, D indépendant de x tel que $\sin(a + x) = C \cos x + D \sin x$.

En particulier pour $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$: $\sin a = C \times 1 + D \times 0$ et

$\sin(a + \frac{\pi}{2}) = \cos a = C \times 0 + D \times 1$.

Donc pour tout $a, x \in \mathbb{R}$: $\sin(a + x) = \sin a \cos x + \cos a \sin x$.



Formules essentielles

Savoir les déduire ou les retrouver.

Proposition - Formules fondamentales (bis)

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

$$= 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$





Formules essentielles

Savoir les déduire ou les retrouver.

Proposition - Formules fondamentales (bis)

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

$$= 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

Exercice

Démontrer ces formules





⇒ Formule de Regiomontanus et conséquence

1. Problèmes

2. Fonctions trigonométriques

3. Formules trigonométriques

3.1. Formules de Regiomontanus

3.2. Produit en somme et réciproquement

3.3. Angle moitié





Formules essentielles

Proposition - Transformation de produit en somme

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a + b) + \cos(a - b))$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} (\cos(a - b) - \cos(a + b))$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} (\sin(a + b) + \sin(a - b))$$





Formules essentielles

Proposition - Transformation de produit en somme

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} (\cos(a-b) - \cos(a+b))$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} (\sin(a+b) + \sin(a-b))$$

Exercice

Comment exploiter les symétries du calcul pour « deviner » les égalités





Formules essentielles

Proposition - Transformation de produit en somme

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} (\cos(a-b) - \cos(a+b))$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} (\sin(a+b) + \sin(a-b))$$

Exercice

Comment exploiter les symétries du calcul pour « deviner » les égalités

Exercice

Démontrer ces formules





Notation exponentielle

Remarque Notation exponentielle.

Avec les notations exponentielles, le résultats sera plus immédiat (on pourra le trouver dans le sens direct).

On notera en particulier les calculs parallèle sur le $\cos$ (partie réelle) et le $\sin$ (partie imaginaire)





Et toujours des propriétés

Proposition - Transformation de somme en produit

$$\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p - \sin q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$





Et toujours des propriétés

Proposition - Transformation de somme en produit

$$\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p - \sin q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Exercice

Démontrer ces formules





Application

Attention. Remarque

Il n'y a pas de formule générale pour transformer $\cos p \pm \sin q$.
Sauf à exploiter $\sin q = \cos(\frac{\pi}{2} - q)$. . .





Application

Attention. Remarque

Il n'y a pas de formule générale pour transformer $\cos p \pm \sin q$.
Sauf à exploiter $\sin q = \cos(\frac{\pi}{2} - q)$. . .

Exemple Calcul de $\sum_{k=0}^n \cos kt$ pour $t \in]0, \pi]$

On commencera par multiplier par $2 \sin \frac{t}{2}$





⇒ Formule de Regiomontanus et conséquence

1. Problèmes

2. Fonctions trigonométriques

3. Formules trigonométriques

3.1. Formules de Regiomontanus

3.2. Produit en somme et réciproquement

3.3. Angle moitié





Tangente de l'angle moitié

Proposition - Utilisation de la tangente de l'angle moitié

On note $t = \tan \frac{\theta}{2}$. Alors :

$$\sin \theta = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\tan \theta = \frac{2t}{1-t^2}$$





Tangente de l'angle moitié

Proposition - Utilisation de la tangente de l'angle moitié

On note $t = \tan \frac{\theta}{2}$. Alors :

$$\sin \theta = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\tan \theta = \frac{2t}{1-t^2}$$

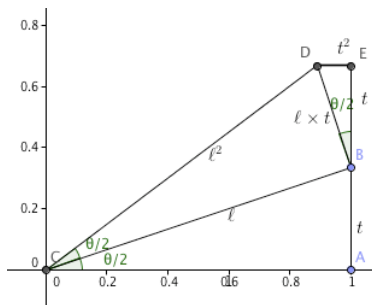
Remarque Calcul intégral





Démonstration

Démonstration





Auto-contrôle et usage de e^{it}

Remarque Trucs pour ne pas écrire de bêtises. . .





Auto-contrôle et usage de e^{it}

Remarque Trucs pour ne pas écrire de bêtises. . .

Exercice

Exemple d'emploi des notations exponentielles.

Notons α l'argument du complexe $z = 1 + it$.

Calculer z^2 , quel est l'argument du complexe z^2 ? En déduire les relations recherchées ?

Sauriez-vous en déduire l'expression de $\cos \theta$ en fonction de $r = \tan \frac{\theta}{3}$?





Transformation physicienne (changement de phase)

Savoir-faire. Méthode pour transformer $a \cos t + b \sin t$ en $A \cos(t - \phi)$

On écrit $a \cos t + b \sin t = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos t + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin t \right)$

Comme $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1$, il existe $\phi \in \mathbb{R}$ tel que

$$\cos \phi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ et } \sin \phi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Avec $A = \sqrt{a^2 + b^2}$:

$$a \cos t + b \sin t = A (\cos \phi \cos t + \sin \phi \sin t) = A \cos(t - \phi)$$

La fonction $s : t \mapsto a \cos t + b \sin t$ représente donc un signal sinusoïdal d'amplitude A de phase initiale $-\phi$ (instant $t = 0$) .





Transformation physicienne (changement de phase)

Savoir-faire. Méthode pour transformer $a \cos t + b \sin t$ en $A \cos(t - \phi)$

On écrit $a \cos t + b \sin t = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos t + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin t \right)$

Comme $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1$, il existe $\phi \in \mathbb{R}$ tel que

$$\cos \phi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ et } \sin \phi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Avec $A = \sqrt{a^2 + b^2}$:

$$a \cos t + b \sin t = A (\cos \phi \cos t + \sin \phi \sin t) = A \cos(t - \phi)$$

La fonction $s : t \mapsto a \cos t + b \sin t$ représente donc un signal sinusoïdal d'amplitude A de phase initiale $-\phi$ (instant $t = 0$) .

Exercice

Factoriser $\sin \theta + \cos \theta$, $\sqrt{3} \cos x - \sin x$.





Conclusion

Objectifs

⇒ Formule de Regiomontanus





Conclusion

Objectifs

⇒ Formule de Regiomontanus

- Base : $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ et $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.





Conclusion

Objectifs

⇒ Formule de Regiomontanus

- Base : $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ et $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.
- $\tan(a + b)$, $\cos 2\theta$...





Conclusion

Objectifs

⇒ Formule de Regiomontanus

- Base : $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ et $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.
- $\tan(a + b)$, $\cos 2\theta \dots$
- Connaître l'usage de la tangente moitié : $\cos \theta = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$, $\sin \theta = \frac{2t}{1 + t^2}$ et $\tan \theta = \frac{2t}{1 - t^2}$





Conclusion

Objectifs

⇒ Formule de Regiomontanus

- Base : $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ et $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.
- $\tan(a + b)$, $\cos 2\theta \dots$
- Connaître l'usage de la tangente moitié : $\cos \theta = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$, $\sin \theta = \frac{2t}{1 + t^2}$ et $\tan \theta = \frac{2t}{1 - t^2}$
- Savoir effectuer la transformation du physicien : $A \cos t + B \sin t = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(t - \varphi) \dots$





Conclusion

Objectifs

⇒ Formule de Regiomontanus

Pour la prochaine fois

- Lecture du cours : chapitre 3. Fonctions réciproques
- Exercice n° 63

