



Leçon 9 - Trigonométrie



⇒ Etudier les fonctions réciproques de cos, sin et tan

1. Problèmes

2. Fonctions trigonométriques

3. Formules trigonométriques

4. Trigonométrie réciproque

4.1. Arcsinus

4.2. Arccosinus

4.3. Arctangente



⇒ Etudier les fonctions réciproques de cos, sin et tan

1. Problèmes

2. Fonctions trigonométriques

3. Formules trigonométriques

4. Trigonométrie réciproque

4.1. Arcsinus

4.2. Arccosinus

4.3. Arctangente



Définition

Définition - Arcsinus

Pour tout $x \in [-1, 1]$ il existe un unique $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ vérifiant $x = \sin \theta$.
Ce réel θ est appelé arcsinus de x et noté $\arcsin x$ On a donc :

$$\theta = \arcsin x \Leftrightarrow \left(\sin \theta = x \text{ et } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \right)$$



Définition

Définition - Arcsinus

Pour tout $x \in [-1, 1]$ il existe un unique $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ vérifiant $x = \sin \theta$.
Ce réel θ est appelé arcsinus de x et noté $\arcsin x$. On a donc :

$$\theta = \arcsin x \Leftrightarrow \left(\sin \theta = x \text{ et } \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \right)$$

Attention. Intervalle d'arrivée

De même qu'il a été choisi de prendre l'unique racine positive de a , lorsqu'on écrit $\sqrt{a}$ (et non $-\sqrt{a}$ qui vérifie également $(-\sqrt{a})^2 = a$) ; on choisit ici un résultat dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, il faut donc penser à ajouter un angle...

$$\sin \theta = x \iff \theta \equiv \arcsin(x)[2\pi] \text{ ou } \theta \equiv \pi - \arcsin(x)[2\pi]$$





Valeurs remarquables

Il faut connaître les valeurs remarquables suivantes :

x	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$						



Valeurs remarquables

Il faut connaître les valeurs remarquables suivantes :

x	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$



Valeurs remarquables

Il faut connaître les valeurs remarquables suivantes :

x	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

Exercice

Calculer $\arcsin(\sin \frac{2\pi}{3})$, $\arcsin(\sin \frac{23\pi}{6})$.





Compositions

Proposition - Composition de fonctions trigonométriques et arcsin

On a :

$$\forall \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \arcsin(\sin \theta) = \theta$$

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \sin(\arcsin x) = x$$

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$$



Compositions

Proposition - Composition de fonctions trigonométriques et arcsin

On a :

$$\forall \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \arcsin(\sin \theta) = \theta$$

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \sin(\arcsin x) = x$$

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$$

Démonstration



⇒ Etudier les fonctions réciproques de cos, sin et tan

1. Problèmes

2. Fonctions trigonométriques

3. Formules trigonométriques

4. Trigonométrie réciproque

4.1. Arcsinus

4.2. Arccosinus

4.3. Arctangente



Définition

Définition - Arccosinus

Pour tout $x \in [-1, 1]$ il existe un unique $\theta \in [0, \pi]$ vérifiant $x = \cos \theta$. Ce réel θ est appelé arccosinus de x et noté $\arccos x$ On a donc :

$$\theta = \arccos x \Leftrightarrow \left(\cos \theta = x \text{ et } \theta \in [0, \pi] \right)$$





Définition

Définition - Arccosinus

Pour tout $x \in [-1, 1]$ il existe un unique $\theta \in [0, \pi]$ vérifiant $x = \cos \theta$. Ce réel θ est appelé arccosinus de x et noté $\arccos x$ On a donc :

$$\theta = \arccos x \Leftrightarrow \left(\cos \theta = x \text{ et } \theta \in [0, \pi] \right)$$

Attention. Intervalle d'arrivée

Comme précédemment :

$$\cos \theta = x \iff \theta \equiv \arccos(x)[2\pi] \text{ ou } \theta \equiv -\arccos(x)[2\pi]$$





Valeurs remarquables

Il faut connaître les valeurs remarquables suivantes :

x	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arccos x$						





Valeurs remarquables

Il faut connaître les valeurs remarquables suivantes :

x	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

Exercice Calculer $\arccos(\cos \frac{4\pi}{3})$, $\arccos(\cos \frac{25\pi}{6})$.



Composition

Proposition - Composition de fonctions trigonométriques et arccos

On a :

$$\forall \theta \in [0, \pi], \quad \arccos(\cos \theta) = \theta$$

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \cos(\arccos x) = x$$

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$$



Composition

Proposition - Composition de fonctions trigonométriques et arccos

On a :

$$\forall \theta \in [0, \pi], \quad \arccos(\cos \theta) = \theta$$

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \cos(\arccos x) = x$$

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$$

Exercice

Faire la démonstration



⇒ Etudier les fonctions réciproques de cos, sin et tan

1. Problèmes

2. Fonctions trigonométriques

3. Formules trigonométriques

4. Trigonométrie réciproque

4.1. Arcsinus

4.2. Arccosinus

4.3. Arctangente





Définition

Définition - Arctangente

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe un unique $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ vérifiant $x = \tan \theta$. Ce réel θ est appelé arctangente de x et noté $\arctan x$. On a donc :

$$\theta = \arctan x \Leftrightarrow \left(\tan \theta = x \text{ et } \theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\right)$$



Valeurs remarquables

Il faut connaître les valeurs remarquables suivantes :

x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\arctan x$				



Valeurs remarquables

Il faut connaître les valeurs remarquables suivantes :

x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\arctan x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$





Composition

Proposition - Composition de fonctions trigonométriques et arctan

On a :

$$\forall \theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \quad \arctan(\tan \theta) = \theta$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tan(\arctan x) = x$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$



Composition

Proposition - Composition de fonctions trigonométriques et arctan

On a :

$$\forall \theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \quad \arctan(\tan \theta) = \theta$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tan(\arctan x) = x$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Démonstration



Exploitation des nombres complexes

Proposition - Relation complexe

Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $\arg(1 + ix) = \arctan(x)$



Exploitation des nombres complexes

Proposition - Relation complexe

Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $\arg(1 + ix) = \arctan(x)$

Démonstration



Exploitation des nombres complexes

Proposition - Relation complexe

Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $\arg(1 + ix) = \arctan(x)$

Démonstration

Remarque Aspect analytique



Conclusion

Objectifs

⇒ Etudier les fonctions réciproques de cos, sin et tan



Conclusion

Objectifs

⇒ Etudier les fonctions réciproques de cos, sin et tan

- arcsin. Attention, il faut restreindre l'intervalle d'étude : sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$!



Conclusion

Objectifs

⇒ Etudier les fonctions réciproques de cos, sin et tan

- arcsin. Attention, il faut restreindre l'intervalle d'étude : sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$!
- arccos. Attention, il faut restreindre l'intervalle d'étude : sur $[0, \frac{\pi}{2}]$!



Conclusion

Objectifs

⇒ Etudier les fonctions réciproques de cos, sin et tan

- arcsin. Attention, il faut restreindre l'intervalle d'étude : sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$!
- arccos. Attention, il faut restreindre l'intervalle d'étude : sur $[0, \frac{\pi}{2}]$!
- Valeurs remarquables à connaître





Conclusion

Objectifs

⇒ Etudier les fonctions réciproques de cos, sin et tan

- arcsin. Attention, il faut restreindre l'intervalle d'étude : sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$!
- arccos. Attention, il faut restreindre l'intervalle d'étude : sur $[0, \frac{\pi}{2}]$!
- Valeurs remarquables à connaître
- Quelques formules : $\cos(\arcsin(x)) = \dots$



Conclusion

Objectifs

⇒ Etudier les fonctions réciproques de cos, sin et tan

- arcsin. Attention, il faut restreindre l'intervalle d'étude : sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$!
- arccos. Attention, il faut restreindre l'intervalle d'étude : sur $[0, \frac{\pi}{2}]$!
- Valeurs remarquables à connaître
- Quelques formules : $\cos(\arcsin(x)) = \dots$
- arctan est défini sur $\mathbb{R}$ entier mais à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.





Conclusion

Objectifs

⇒ Etudier les fonctions réciproques de cos, sin et tan

- arcsin. Attention, il faut restreindre l'intervalle d'étude : sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$!
- arccos. Attention, il faut restreindre l'intervalle d'étude : sur $[0, \frac{\pi}{2}]$!
- Valeurs remarquables à connaître
- Quelques formules : $\cos(\arcsin(x)) = \dots$
- arctan est défini sur $\mathbb{R}$ entier mais à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
- Valeurs remarquables à connaître



Conclusion

Objectifs

⇒ Etudier les fonctions réciproques de cos, sin et tan

- arcsin. Attention, il faut restreindre l'intervalle d'étude : sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$!
- arccos. Attention, il faut restreindre l'intervalle d'étude : sur $[0, \frac{\pi}{2}]$!
- Valeurs remarquables à connaître
- Quelques formules : $\cos(\arcsin(x)) = \dots$
- arctan est défini sur $\mathbb{R}$ entier mais à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
- Valeurs remarquables à connaître
- Quelques formules : $\cos(\arctan(x)) = \dots$





Conclusion

Objectifs

⇒ Etudier les fonctions réciproques de cos, sin et tan

- arcsin. Attention, il faut restreindre l'intervalle d'étude : sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$!
- arccos. Attention, il faut restreindre l'intervalle d'étude : sur $[0, \frac{\pi}{2}]$!
- Valeurs remarquables à connaître
- Quelques formules : $\cos(\arcsin(x)) = \dots$
- arctan est défini sur $\mathbb{R}$ entier mais à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
- Valeurs remarquables à connaître
- Quelques formules : $\cos(\arctan(x)) = \dots$
- On a $\arctan x = \arg(1 + ix)$.



Conclusion

Objectifs

⇒ Etudier les fonctions réciproques de cos, sin et tan

Pour la prochaine fois

- Lecture du cours : chapitre 7. Utilisation de la dérivation
- Exercice n°58

