Devoir à la maison n°3

La notation tiendra particuliérement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

Problème

Dans tout le problème, on admet la propriété suivante :

> Soit f définie sur $I =]a,b[$ (avec $a < b$, pouvant être infini) et $x_0 \in I$.
> Si f est croissante sur I, alors
> • f admet une limite (finie) à gauche en x_0
> • f admet une limite (finie) à droite en x_0
> • $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \leqslant \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$

A. Définitions

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Pour tout $a \in I$, on définie $\Delta_a : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

1. Montrer l'équivalence :

$$\forall\, a \in I, \Delta_a \text{ est croissante } \iff \forall\, x, y \in I^2, \forall\, \lambda \in [0,1], f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

2. A quoi serait équivalent la proposition : $\forall\, a \in I, \Delta_a$ est strictement croissante .

> On dit que f est **convexe**, si $\forall\, x, y \in I^2, \forall\, \lambda \in [0,1], f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$

3. Justifier que l'on peut traduire cette propriété par la formulation : « *le graphe de f est au-dessus de toutes ses cordes* ».

Pour la suite de cette partie, f est supposée convexe.

4. Montrer que f vérifie :

$$\forall\, a, b, c \in I, a < b < c \qquad \frac{f(a) - f(b)}{a - b} \leqslant \frac{f(a) - f(c)}{a - c} \leqslant \frac{f(b) - f(c)}{b - c}$$

   C'est le théorème des trois pentes. (On pourra démontrer et exploiter l'égalité $\Delta_c(a) = \Delta_a(c)$).

5. Montrer que $f : x \mapsto x^2$ est convexe.

B. Fonctions convexes dérivables

On suppose dans cette partie que $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe et dérivable sur I.

1. Montrer que la fonction f' est croissante.
   La réciproque est-elle vraie ? (on attend un contre-exemple ou une démonstration)
2. Montrer que pour tout $x, a \in I$, $f(x) \geqslant f'(a)(x - a) + f(a)$.
   La réciproque est-elle vraie ? (on attend un contre-exemple ou une démonstration)
3. On suppose ici que f est de classe $\mathcal{C}^2$.
   Quel critère simple concernant f'' donne une information sur la convexité de f.
   Est-ce une condition nécessaire, suffisante ou nécessaire et suffisante ?
4. Exemples
   (a) Montrer que $f_1 : x \mapsto \exp(x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que $f_2 : x \mapsto \exp(-x^2)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
   (c) La fonction sin est-elle convexe ? Donner le plus grand intervalle contenant 0 sur lequel sin est convexe.

C. Inégalités

On suppose dans cette partie que $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe sur I.

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, si $(x_i) \in I^n$ et $(\alpha_i) \in [0,1]^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, alors

$$\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i x_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)$$

2. En déduire (avec B.3.b) l'inégalité arithmético-géométrique

$$\sqrt[n]{t_1 t_2 \cdots t_n} \leqslant \frac{t_1 + t_2 + \cdots + t_n}{n}$$

3. Démontrer également l'inégalité de Hölder

$$\forall\ p, q \in \mathbb{R}_+^* \text{tels que} \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \forall\ (a_i), (b_i) \in (\mathbb{R}_+^*)^n \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}$$