



Leçon 12 - Utilisation de la dérivation





⇒ Dérivation des fonctions à valeurs complexes

1. Problèmes

2. Dérivation

3. Quelques utilisations de la dérivation

4. Dérivation de fonctions réelles à valeurs complexes

4.1. Fonctions à valeurs complexes

4.2. Dérivation d'une fonction d'une variable réelle à valeurs complexes

4.3. Propriétés

4.4. Composition avec l'exponentielle complexe





⇒ Dérivation des fonctions à valeurs complexes

1. Problèmes

2. Dérivation

3. Quelques utilisations de la dérivation

4. Dérivation de fonctions réelles à valeurs complexes

4.1. Fonctions à valeurs complexes

4.2. Dérivation d'une fonction d'une variable réelle à valeurs complexes

4.3. Propriétés

4.4. Composition avec l'exponentielle complexe





Exponentielle complexe

Définition - Exponentielle complexe

Soit $z \in \mathbb{C}$. On définit l'exponentielle complexe de z par

$$\exp z = e^z = e^{\operatorname{Re}(z)} e^{i\operatorname{Im}(z)}.$$

Son module est $e^{\operatorname{Re}(z)}$ et un argument est $\operatorname{Im}(z)$.



Propriété classique

Proposition - Elargissement

On retrouve les propriétés classiques de l'exponentielle :

- L'exponentielle complexe coïncide bien avec l'exponentielle sur $\mathbb{R}$ pour les réels ou avec l'exponentielle des imaginaires purs.
- Pour $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, on a : $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$ et $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$.





Propriété classique

Proposition - Elargissement

On retrouve les propriétés classiques de l'exponentielle :

- L'exponentielle complexe coïncide bien avec l'exponentielle sur $\mathbb{R}$ pour les réels ou avec l'exponentielle des imaginaires purs.
- Pour $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, on a : $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$ et $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$.

Démonstration





Equation classique

Exercice

1. Résoudre $e^z = 1$.
2. Résoudre $e^z = 1 - i\sqrt{3}$.
3. Résoudre plus généralement $e^z = z_0$
4. Déterminer l'image d'une droite d'équation $x = a$ par l'application $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$.
5. Déterminer l'image d'une droite d'équation $y = b$ par l'application $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$.





Equation classique

Exercice

1. Résoudre $e^z = 1$.
2. Résoudre $e^z = 1 - i\sqrt{3}$.
3. Résoudre plus généralement $e^z = z_0$
4. Déterminer l'image d'une droite d'équation $x = a$ par l'application $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$.
5. Déterminer l'image d'une droite d'équation $y = b$ par l'application $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$.

Proposition - Résolution d'équation

- Pour $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $\exp z = \exp z'$ si et seulement si $z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$.
- Tout complexe $z_0 \neq 0$ peut s'écrire sous la forme $\exp z$.





Equation classique

Exercice

1. Résoudre $e^z = 1$.
2. Résoudre $e^z = 1 - i\sqrt{3}$.
3. Résoudre plus généralement $e^z = z_0$
4. Déterminer l'image d'une droite d'équation $x = a$ par l'application $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$.
5. Déterminer l'image d'une droite d'équation $y = b$ par l'application $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$.

Proposition - Résolution d'équation

- Pour $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $\exp z = \exp z'$ si et seulement si $z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$.
- Tout complexe $z_0 \neq 0$ peut s'écrire sous la forme $\exp z$.

Démonstration





Découpage en deux

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition - « Découpage » d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$

Soient $f_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $f_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$.

On pose : $\forall x \in I, f(x) = f_1(x) + i f_2(x)$.

$f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$ (si I n'est pas précisé au départ, son domaine de définition est l'intersection de ceux de f_1 et f_2).

On définit les fonctions $\operatorname{Re}(f)$ (partie réelle de f) et $\operatorname{Im}(f)$ (partie imaginaire de f) à valeurs dans $\mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(f) = f_1 : \quad I &\rightarrow \mathbb{R} & \operatorname{Im}(f) = f_2 : \quad I &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \operatorname{Re}(f(x)) & x &\mapsto \operatorname{Im}(f(x)) \end{aligned}$$

On dit que f est continue sur I si f_1 et f_2 sont continues sur I .



Application

Exemple $t \mapsto e^{it}$





Application

Exemple $t \mapsto e^{it}$

Analyse Justifions que sa base est bien e^i





⇒ Dérivation des fonctions à valeurs complexes

1. Problèmes

2. Dérivation

3. Quelques utilisations de la dérivation

4. Dérivation de fonctions réelles à valeurs complexes

4.1. Fonctions à valeurs complexes

4.2. Dérivation d'une fonction d'une variable réelle à valeurs complexes

4.3. Propriétés

4.4. Composition avec l'exponentielle complexe





Définition généralisée

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition - Dérivation d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, une fonction à valeurs complexes.

Soient $f_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $f_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\forall x \in I, f(x) = f_1(x) + if_2(x)$.

On dit que f est dérivable, respectivement de classe $\mathcal{C}^1$ sur I si f_1 et f_2 sont dérivables, respectivement de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .

Si f est dérivable sur I , on définit sa dérivée par :

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = f_1'(x) + if_2'(x).$$

On note $\mathcal{C}(I, \mathbb{C})$ (resp. $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{C})$) l'ensemble des fonctions continues (resp. de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathbb{C}$).





Définition généralisée

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition - Dérivation d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, une fonction à valeurs complexes.

Soient $f_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $f_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\forall x \in I, f(x) = f_1(x) + i f_2(x)$.

On dit que f est dérivable, respectivement de classe $\mathcal{C}^1$ sur I si f_1 et f_2 sont dérivables, respectivement de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .

Si f est dérivable sur I , on définit sa dérivée par :

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = f_1'(x) + i f_2'(x).$$

On note $\mathcal{C}(I, \mathbb{C})$ (resp. $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{C})$) l'ensemble des fonctions continues (resp. de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathbb{C}$).

Remarque Commutativité de la dérivation complexe et de la partie réelle ou imaginaire





Propriétés

Proposition - Constance et dérivation

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ dérivable sur I . Alors f est constante sur I si et seulement si f' est nulle sur I .





Propriétés

Proposition - Constance et dérivation

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ dérivable sur I . Alors f est constante sur I si et seulement si f' est nulle sur I .

Pour la démonstration, on admet ces résultats pour des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Démonstration





⇒ Dérivation des fonctions à valeurs complexes

1. Problèmes

2. Dérivation

3. Quelques utilisations de la dérivation

4. Dérivation de fonctions réelles à valeurs complexes

4.1. Fonctions à valeurs complexes

4.2. Dérivation d'une fonction d'une variable réelle à valeurs complexes

4.3. Propriétés

4.4. Composition avec l'exponentielle complexe





Propriétés (1)

Attention. Croissance sur $\mathbb{C}$?

Parler de croissance (ou de décroissance) d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$ n'a pas de sens.





Propriétés (1)

Attention. Croissance sur $\mathbb{C}$?

Parler de croissance (ou de décroissance) d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$ n'a pas de sens.

Propriété - Opérations

Soient f et g deux fonctions dérivables sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$.

Alors $f + g$, fg et αf sont dérivables sur I et

$$\forall x \in I, \quad (f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$(\alpha f)' = \alpha f'$$

Si g ne s'annule pas, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont dérivables sur I et

$$\forall x \in I, \quad \left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{-g'(x)}{g(x)^2} \quad \text{et} \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$



Propriétés (1)

Attention. Croissance sur $\mathbb{C}$?

Parler de croissance (ou de décroissance) d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$ n'a pas de sens.

Propriété - Opérations

Soient f et g deux fonctions dérivables sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$.

Alors $f + g$, fg et αf sont dérivables sur I et

$$\forall x \in I, \quad (f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$(\alpha f)' = \alpha f'$$

Si g ne s'annule pas, alors $\frac{f}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont dérivables sur I et

$$\forall x \in I, \quad \left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{-g'(x)}{g(x)^2} \quad \text{et} \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

Exercice Faire les démonstration.



⇒ Dérivation des fonctions à valeurs complexes

1. Problèmes

2. Dérivation

3. Quelques utilisations de la dérivation

4. Dérivation de fonctions réelles à valeurs complexes

4.1. Fonctions à valeurs complexes

4.2. Dérivation d'une fonction d'une variable réelle à valeurs complexes

4.3. Propriétés

4.4. Composition avec l'exponentielle complexe





Dérivation de l'exponentielle complexe

Théorème - Dérivée de l'exponentielle complexe

Soit $\phi : I \rightarrow \mathbb{C}$ dérivable sur I . Alors

$$\begin{aligned}\psi : I &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto e^{\phi(x)}\end{aligned}$$

est dérivable sur I et : $\forall x \in I, \quad \psi'(x) = \phi'(x)e^{\phi(x)}$





Dérivation de l'exponentielle complexe

Théorème - Dérivée de l'exponentielle complexe

Soit $\phi : I \rightarrow \mathbb{C}$ dérivable sur I . Alors

$$\begin{aligned}\psi : I &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto e^{\phi(x)}\end{aligned}$$

est dérivable sur I et : $\forall x \in I, \quad \psi'(x) = \phi'(x)e^{\phi(x)}$

Démonstration





Applications

Attention. i joue un rôle comparable à celle d'un nombre réel

On fera bien attention à ne pas oublier le i dans la dérivation !





Applications

Attention. i joue un rôle comparable à celle d'un nombre réel

On fera bien attention à ne pas oublier le i dans la dérivation !

Exercice

Calculer la dérivée $f : x \mapsto (\arcsin(x))e^{2x+ix^2}$.





Applications

Attention. i joue un rôle comparable à celle d'un nombre réel

On fera bien attention à ne pas oublier le i dans la dérivation !

Exercice

Calculer la dérivée $f : x \mapsto (\arcsin(x))e^{2x+ix^2}$.

Application Fonction polaire





Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions à valeurs complexes





Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions à valeurs complexes

- Décomposition : $z(t) = a(t) + ib(t)$, addition de deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, puis dérivabilité.





Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions à valeurs complexes

- Décomposition : $z(t) = a(t) + ib(t)$, addition de deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, puis dérivabilité.
- Dérivation de la fonction $t \mapsto \exp(z(t))$ sous $z'(t) \times \exp(z(t))$





Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions à valeurs complexes

- Décomposition : $z(t) = a(t) + ib(t)$, addition de deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, puis dérivabilité.
- Dérivation de la fonction $t \mapsto \exp(z(t))$ sous $z'(t) \times \exp(z(t))$
- Tout découle (dont la dérivée $z'(t)$)





Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions à valeurs complexes

Pour la prochaine fois

- Lecture du cours : chapitre 7 - Fonctions usuelles (à la Euler)
- Exercice n° 163 & 172

