



Leçon 13 - Fonctions *à la Euler*





⇒ Rappels généraux sur les fonctions

⇒ Bijection & Asymptotes

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

- 2.1. Définition et opérations sur les fonctions
- 2.2. Représentation d'une fonction
- 2.3. Vocabulaire d'analyse sur les fonctions
- 2.4. Bijections et réciproques
- 2.5. Etude des branches infinies en ∞





Problèmes

Problème - L'application $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ est-elle une fonction ?





Problèmes

Problème - L'application $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ est-elle une fonction ?

Problème - Comment calculer π^e ?





Problèmes

Problème - L'application $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ est-elle une fonction ?

Problème - Comment calculer π^e ?

Problème - Interpolation de la suite géométrique





Problèmes

Problème - L'application $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ est-elle une fonction ?

Problème - Comment calculer π^e ?

Problème - Interpolation de la suite géométrique

Problème - De la multiplication à l'addition



Ensemble des applications

Définition - Ensemble des applications

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point.

On note $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ (on parle aussi d'applications de I dans $\mathbb{R}$)





Opérations

Définition - Opérations classiques

Dans $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ on définit les opérations suivantes :

- Addition : $\forall x \in I, (f + g)(x) = f(x) + g(x)$ (ou $f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$)
- Multiplication par un réel : $\forall x \in I, (\lambda f)(x) = \lambda \times f(x)$
- Produit de deux fonctions : $\forall x \in I, (f \cdot g)(x) = f(x) \times g(x)$
- Valeur absolue d'une fonction : $\forall x \in I, |f|(x) = |f(x)|$





Opérations

Définition - Opérations classiques

Dans $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ on définit les opérations suivantes :

- Addition : $\forall x \in I, (f + g)(x) = f(x) + g(x)$ (ou $f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$)
- Multiplication par un réel : $\forall x \in I, (\lambda f)(x) = \lambda \times f(x)$
- Produit de deux fonctions : $\forall x \in I, (f \cdot g)(x) = f(x) \times g(x)$
- Valeur absolue d'une fonction : $\forall x \in I, |f|(x) = |f(x)|$

Lois internes





Composition

Définition - Composée

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $f(I) \subset J$. On définit la composée $g \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in I, (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$





Composition

Définition - Composée

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}, g : J \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $f(I) \subset J$. On définit la composée $g \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in I, (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Attention. Non commutativité

En général, même lorsque les deux fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$ ont un sens, elles sont différentes.





Composition

Définition - Composée

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $f(I) \subset J$. On définit la composée $g \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in I, (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Attention. Non commutativité

En général, même lorsque les deux fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$ ont un sens, elles sont différentes.

Exercice

Définir proprement les deux composées (si cela est possible) des fonctions suivantes (ou de leurs restrictions) :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 - 1 \quad \text{et} \quad x \mapsto \frac{1}{x}$$





Représentation d'un graphe dans $\mathbb{R}^2$

Définition - Graphe dans $\mathbb{R}^2$

Soit $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

On note $\Gamma_H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid H(x, y) = 0\}$, une sous-partie de $\mathbb{R}^2$.

On dit que $H(x, y) = 0$ est une équation du graphe Γ .

Sans condition supplémentaire sur H , Γ peut être très varié.





Représentation d'un graphe dans $\mathbb{R}^2$

Définition - Graphe dans $\mathbb{R}^2$

Soit $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

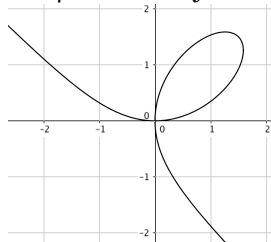
On note $\Gamma_H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid H(x, y) = 0\}$, une sous-partie de $\mathbb{R}^2$.

On dit que $H(x, y) = 0$ est une équation du graphe Γ .

Sans condition supplémentaire sur H , Γ peut être très varié.

Exemple Folium de Descartes

DESCARTES et ROBERTVAL ont étudié dans leur correspondance la courbe $\mathcal{F}$ d'équation $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ (cubique).





Cas d'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$

Définition - Exemple. Graphe d'une fonction

Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on appelle représentation graphique de f (ou graphe de f), la courbe $\mathcal{C} = \{(x, f(x)); x \in \mathcal{D}_f\}$.

On dit que $\mathcal{C}$ a pour équation $y = f(x)$ (car $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}$).

On appelle aussi représentation graphique ou courbe représentative de f la représentation de cet ensemble dans le plan. La courbe représentative a pour équation $y = f(x)$.

Dans ce cas $H : (x, y) \mapsto y - f(x)$. Une telle courbe ne peut « revenir en arrière ». En effet, cela signifierait qu'un nombre x_0 aurait deux images.





Cas d'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$

Définition - Exemple. Graphe d'une fonction

Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on appelle représentation graphique de f (ou graphe de f), la courbe $\mathcal{C} = \{(x, f(x)); x \in \mathcal{D}_f\}$.

On dit que $\mathcal{C}$ a pour équation $y = f(x)$ (car $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}$).

On appelle aussi représentation graphique ou courbe représentative de f la représentation de cet ensemble dans le plan. La courbe représentative a pour équation $y = f(x)$.

Définition - Image de $\mathcal{D}$ par une fonction. Fonction restreinte

Si $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}_f$ ($\mathcal{D}'$ sous ensemble de $\mathcal{D}_f$), on note $f(\mathcal{D}')$ l'ensemble des images des éléments de $\mathcal{D}'$: $f(\mathcal{D}') = \{f(x); x \in \mathcal{D}'\}$. $f(\mathcal{D}')$ s'appelle l'ensemble image (ou image directe) de $\mathcal{D}'$ par f .

Soit $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et I un intervalle inclus dans $\mathcal{D}_f$. On appelle restriction de f à I la fonction g définie sur I par : $\forall x \in I, g(x) = f(x)$. On la note $f|_I$.





Transformations graphiques (1)

On commence par un travail d'analyse essentiel.

Analyse Symétrique

Heuristique. Lieu des transformations

Pour les transformations suivantes, on notera qu'il peut y avoir un impact sur $\mathcal{C}$ d'équation $y = f(x)$:

- sur l'axe des abscisses, lorsque la transformation g est du type $f \circ g$
- sur l'axe des ordonnées, lorsque la transformation g est du type $g \circ f$





Transformations graphiques (1)

On commence par un travail d'analyse essentiel.

Analyse Symétrique

Heuristique. Lieu des transformations

Pour les transformations suivantes, on notera qu'il peut y avoir un impact sur $\mathcal{C}$ d'équation $y = f(x)$:

- sur l'axe des abscisses, lorsque la transformation g est du type $f \circ g$
- sur l'axe des ordonnées, lorsque la transformation g est du type $g \circ f$





Transformations graphiques - translation

Proposition - Translations

Le graphe de la fonction $x \mapsto \overrightarrow{f(x+a)}$ s'obtient à partir de celui de f par une translation du vecteur $-a \overrightarrow{j}$. Le graphe de la fonction $x \mapsto \overrightarrow{f(x)} + a$ s'obtient à partir de celui de f par une translation du vecteur $a \overrightarrow{j}$.





Transformations graphiques - translation

Proposition - Translations

Le graphe de la fonction $x \mapsto \underline{f}(x + a)$ s'obtient à partir de celui de f par une translation du vecteur $-a \underline{j}$. Le graphe de la fonction $x \mapsto \underline{f}(x) + a$ s'obtient à partir de celui de f par une translation du vecteur $a \underline{j}$.

Exemple



$$y = f(x + 2)$$

$$y = f(x) + 2$$

$y = f(x)$ est la courbe épaisse



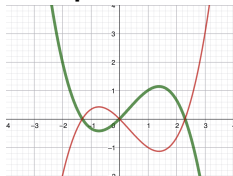
Transformations graphiques - symétrie

Proposition - Symétries

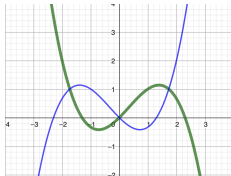
Le graphe de la fonction $x \mapsto f(-x)$ s'obtient à partir de celui de f par une symétrie par rapport à (Oy) .

Le graphe de la fonction $x \mapsto -f(x)$ s'obtient à partir de celui de f par une symétrie par rapport à (Ox) .

Exemple



$$y = f(-x)$$



$$y = -f(x)$$



Transformations graphiques - affinité

Pour la transformation suivante, on parle habituellement d'affinité (nom officiel des ces transformations), car il s'agit de dilatation/contraction selon une seule dimension (abscisse ou l'ordonnée) et non de deux dimensions (sinon ce serait une homothétie).

Proposition - Dilatation/contraction

Soit $\lambda > 0$.

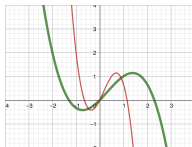
Le graphe de la fonction $x \mapsto f(\lambda \cdot x)$ s'obtient à partir de celui de f par une contraction horizontale de rapport λ (si $\lambda > 1$) et une dilatation horizontale de rapport $\frac{1}{\lambda}$ (si $\lambda < 1$).

Le graphe de la fonction $x \mapsto \lambda \cdot f(x)$ s'obtient à partir de celui de f par une dilatation verticale de rapport λ (si $\lambda > 1$) et une contraction verticale de rapport $\frac{1}{\lambda}$ (si $\lambda < 1$).

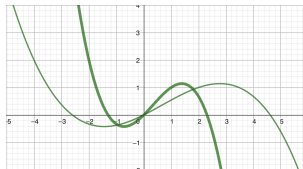


Transformations graphiques - affinité

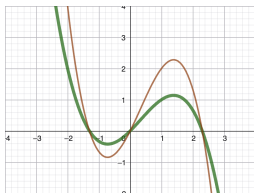
Exemple Dilation/contraction



$$y = f(2x)$$



$$y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$$



$$y = 2f(x)$$



$$y = \frac{1}{2}f(x)$$





Transformations graphiques - Bilan

Savoir-faire. Transformation sur le graphe

Soient $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.

Comment obtient-on les domaines de définition ainsi que les graphes (ou représentations graphiques) des fonctions $x \mapsto f(x) + a$,

$x \mapsto f(x + a)$, $x \mapsto f(a - x)$, $x \mapsto af(x)$?

$x \mapsto f(x) + a : \mathcal{D}_1 = \mathcal{D}$ et translation de a vect j ,

$x \mapsto f(x + a) : \mathcal{D}_2 = \{x \mid x + a \in \mathcal{D}\} = \mathcal{D} - a$ et translation de $-a$ vect i ,

$x \mapsto f(a - x) : \mathcal{D}_3 = \{x \mid a - x \in \mathcal{D}\}$ (ex : si $\mathcal{D} = [c, d[$, alors $\mathcal{D}_3 =]a - d, a - c]$) et réflexion (symétrie) d'axe d'équation $x = \frac{a}{2}$

$x \mapsto af(x) : \mathcal{D}_4 = \mathcal{D}$ et homotétie-axiale de rapport a et de « centre » l'axe des abscisses.





Transformations graphiques - Bilan

Savoir-faire. Transformation sur le graphe

Soient $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.

Comment obtient-on les domaines de définition ainsi que les graphes (ou représentations graphiques) des fonctions $x \mapsto f(x) + a$,

$x \mapsto f(x + a)$, $x \mapsto f(a - x)$, $x \mapsto af(x)$?

$x \mapsto f(x) + a : \mathcal{D}_1 = \mathcal{D}$ et translation de a avec j ,

$x \mapsto f(x + a) : \mathcal{D}_2 = \{x \mid x + a \in \mathcal{D}\} = \mathcal{D} - a$ et translation de $-a$ avec i ,

$x \mapsto f(a - x) : \mathcal{D}_3 = \{x \mid a - x \in \mathcal{D}\}$ (ex : si $\mathcal{D} = [c, d[$, alors $\mathcal{D}_3 =]a - d, a - c]$) et réflexion (symétrie) d'axe d'équation $x = \frac{a}{2}$

$x \mapsto af(x) : \mathcal{D}_4 = \mathcal{D}$ et homotétie-axiale de rapport a et de « centre » l'axe des abscisses.

Exercice

Tracer $y = \sin x$.

Puis les représentations de $y = \sin(2x)$, $y = \frac{1}{2} \sin(x + \pi)$,

$y = 3 \sin(x) + \pi$



⇒ Rappels généraux sur les fonctions

⇒ Bijection & Asymptotes

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

2.1. Définition et opérations sur les fonctions

2.2. Représentation d'une fonction

2.3. Vocabulaire d'analyse sur les fonctions

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Etude des branches infinies en ∞





Parité, périodicité

Définition - Vocabulaire (et propriétés)

Soit $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction

- On dit que f est *paire* si $\forall x \in \mathcal{D}_f, -x \in \mathcal{D}_f$ et $f(-x) = f(x)$

$\mathcal{C}_f$ est alors symétrique par rapport à Oy

- On dit que f est *impaire* si $\forall x \in \mathcal{D}_f, -x \in \mathcal{D}_f$ et $f(-x) = -f(x)$

$\mathcal{C}_f$ est alors symétrique par rapport à O .

- $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est dite *périodique* s'il existe $T > 0$ tel que

$\forall x \in \mathcal{D}_f, x + T \in \mathcal{D}_f, x - T \in \mathcal{D}_f$ et $f(x + T) = f(x)$.

T est une période de f . $\mathcal{C}_f$ est alors invariante par translation de vecteur $T\vec{i}$.





Fonctions monotones

Définition - Fonction croissante, décroissante et monotone

On dit qu'une fonction f

- est croissante sur I si $\forall (x, y) \in I^2, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
- est décroissante sur I si $\forall (x, y) \in I^2, x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.
- est monotone sur I si elle est croissante sur I ou décroissante sur I .
- est *strictement* croissante sur I si $\forall (x, y) \in I^2, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.
- est *strictement* décroissante sur I si $\forall (x, y) \in I^2, x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.





Proposition

Proposition - Composition et monotonie

La composée de deux applications monotones de même sens de variation (respectivement de sens contraire) est une application croissante (respectivement décroissante).

Démonstration





Fonctions convexes/concaves

Définition - Fonction convexe, concave

On dit qu'une fonction f

- est convexe sur I si

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1] f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

- est strictement convexe sur I si

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in]0, 1[f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

- est concave sur I si

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1] f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

- est strictement concave sur I si

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in]0, 1[f(\lambda x + (1 - \lambda)y) > \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$



Fonctions (ou applications) bornées

Définition - Fonctions majorées, minorées, bornées

On dit qu'une fonction f :

- est majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I, f(x) \leq M$.
- est minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I, m \leq f(x)$.
- est bornée si elle est majorée et minorée.





Fonctions (ou applications) bornées

Définition - Fonctions majorées, minorées, bornées

On dit qu'une fonction f :

- est majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I, f(x) \leq M$.
- est minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I, m \leq f(x)$.
- est bornée si elle est majorée et minorée.

Proposition - Bilan

Une application $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est bornée

si et seulement si il existe $M > 0$ tel que $\forall x \in I, |f(x)| \leq M$.





Fonctions (ou applications) bornées

Définition - Fonctions majorées, minorées, bornées

On dit qu'une fonction f :

- est majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I, f(x) \leq M$.
- est minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I, m \leq f(x)$.
- est bornée si elle est majorée et minorée.

Proposition - Bilan

Une application $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est bornée

si et seulement si il existe $M > 0$ tel que $\forall x \in I, |f(x)| \leq M$.

Démonstration





Extremums

Définition - Maximum, minimum et extremum

On dit que $M \in \mathbb{R}$ est un maximum sur I de f si

- $\forall x \in I, f(x) \leq M$
- et il existe $a \in I$ tel que $f(a) = M$
on dit que f présente un maximum en a .

On dit que $m \in \mathbb{R}$ est un minimum sur I de f si

- $\forall x \in I, f(x) \geq m$
- et il existe $a \in I$ tel que $f(a) = m$
on dit que f présente un minimum en a .

On parle d'extremum lorsque l'on a un maximum ou un minimum. On note

$$M = \max_{x \in I} f(x) \text{ et } m = \min_{x \in I} f(x)$$





Extremum local

Définition - Maximum local

On dit que $M = f(a)$ est un *maximum local* (maximum ou minimum)

s'il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $x \in]a - \epsilon, a + \epsilon[\cap D_f$, $f(x) \leq f(a)$.

On parle de *maximum strict*, lorsque pour $x \in]a - \epsilon, a + \epsilon[\cap D_f$ et $x \neq a$, $f(x) < f(a)$.





Extremum local

Définition - Maximum local

On dit que $M = f(a)$ est un *maximum local* (maximum ou minimum)

s'il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $x \in]a - \epsilon, a + \epsilon[\cap D_f$, $f(x) \leq f(a)$.

On parle de *maximum strict*, lorsque pour $x \in]a - \epsilon, a + \epsilon[\cap D_f$ et $x \neq a$, $f(x) < f(a)$.

Remarque Voisinage de a (dans $\mathbb{R}$)





Extremum local

Définition - Maximum local

On dit que $M = f(\alpha)$ est un *maximum local* (maximum ou minimum)

s'il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $x \in]a - \epsilon, a + \epsilon[\cap D_f$, $f(x) \leq f(a)$.

On parle de *maximum strict*, lorsque pour $x \in]a - \epsilon, a + \epsilon[\cap D_f$ et $x \neq a$, $f(x) < f(a)$.

Remarque Voisinage de a (dans $\mathbb{R}$)

Remarque Extension de définition



⇒ Rappels généraux sur les fonctions

⇒ Bijection & Asymptotes

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

2.1. Définition et opérations sur les fonctions

2.2. Représentation d'une fonction

2.3. Vocabulaire d'analyse sur les fonctions

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Etude des branches infinies en ∞



Théorème

Définition -Bijection

Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $J \subset \mathbb{R}$.

On dit que f est bijective de D sur J (ou réalise une bijection de D sur J)

- si tout élément de D a son image dans J
- si tout élément de J admet un unique antécédent par f dans D

Formellement :

$$\forall x \in D, f(x) \in J \quad \text{et} \quad \forall y \in J, \exists! x \in D, y = f(x).$$



Théorème

Définition -Bijection

Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $J \subset \mathbb{R}$.

On dit que f est bijective de D sur J (ou réalise une bijection de D sur J)

- si tout élément de D a son image dans J
- si tout élément de J admet un unique antécédent par f dans D

Formellement :

$$\forall x \in D, f(x) \in J \quad \text{et} \quad \forall y \in J, \exists! x \in D, y = f(x).$$

Remarque Si, par convention $J = f(D)$



Théorème

Définition -Bijection

Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $J \subset \mathbb{R}$.

On dit que f est bijective de D sur J (ou réalise une bijection de D sur J)

- si tout élément de D a son image dans J
- si tout élément de J admet un unique antécédent par f dans D

Formellement :

$$\forall x \in D, f(x) \in J \quad \text{et} \quad \forall y \in J, \exists! x \in D, y = f(x).$$

Remarque Si, par convention $J = f(D)$

Exemple Application exponentielle





Que dire de l'application réciproque ?

Définition - Application (bijection) réciproque

Si f est bijective de D sur J , on définit une fonction g par

$$g: J \rightarrow D$$

$$y \mapsto x \quad | \quad y = f(x) \text{ (unique antécédent de } y \text{ par } f)$$

Cette fonction g est elle-même bijective et appelée bijection réciproque de f , et notée f^{-1} .



Théorèmes (1)

Proposition - Application (sens directe)

Si f est une bijection de D sur J , on a

$$\forall x \in D, (f^{-1} \circ f)(x) = x;$$

$$\forall y \in J, (f \circ f^{-1})(y) = y;$$

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$



Théorèmes (1)

Théorème - Réciproque et représentation graphique

Soit $f : I \rightarrow J$ une bijection et $f^{-1} : J \rightarrow I$ sa bijection réciproque.
Alors

- dans un repère orthonormé, $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice (droite d'équation $y = x$).
- Si f est monotone sur I alors f^{-1} est monotone sur J , de même sens de variations.





Théorèmes (2)

On admet les théorèmes qui suivent et qui seront démontrés ultérieurement :

Théorème - Théorème de la bijection

Soit f une fonction définie sur I , continue, strictement monotone sur I (intervalle de $\mathbb{R}$),

alors f est bijective de I sur $J = f(I)$.

Sa bijection réciproque f^{-1} est continue sur J .



⇒ Rappels généraux sur les fonctions

⇒ Bijection & Asymptotes

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

2.1. Définition et opérations sur les fonctions

2.2. Représentation d'une fonction

2.3. Vocabulaire d'analyse sur les fonctions

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Etude des branches infinies en ∞





Allure

Le but est de préciser l'allure de la courbe représentative de f au voisinage de (+ ou -) l'infini.





Allure

Le but est de préciser l'allure de la courbe représentative de f au voisinage de (+ ou -) l'infini.

Savoir-faire. Etude des branches infinies (et définition)

Soit f une fonction définie au voisinage de $\pm\infty$.

2. si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, on calcule $\frac{f(x)}{x}$.

2.1. si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, il y a une **branche parabolique horizontale** (ou de direction Ox).

2.2 si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$, il y a une **branche parabolique verticale** (ou de direction Oy).

2.3. si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a$, $a \in \mathbb{R}^*$, il faut calculer $f(x) - ax$.



Allure

Le but est de préciser l'allure de la courbe représentative de f au voisinage de (+ ou -) l'infini.

Savoir-faire. Etude des branches infinies (et définition)

Soit f une fonction définie au voisinage de $\pm\infty$.

2. si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, on calcule $\frac{f(x)}{x}$.

2.3. si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a$, $a \in \mathbb{R}^*$, il faut calculer $f(x) - ax$.

2.3.1. si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax = b \in \mathbb{R}$, la courbe admet une **asymptote oblique** d'équation $y = ax + b$.

2.3.2. si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax = \infty$ il y a une **branche parabolique oblique de direction** $y = ax$.



Exemple

Exercice

Énoncer des fonctions présentant :

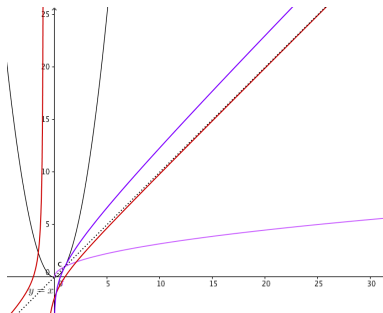
1. une asymptote horizontale (on donnera l'équation de cette asymptote)
2. une branche parabolique horizontale
3. une branche parabolique verticale
4. une asymptote oblique (on donnera l'équation de cette asymptote)
5. une branche parabolique oblique (on donnera la direction), mais pas d'asymptote oblique



Exemple

Exercise

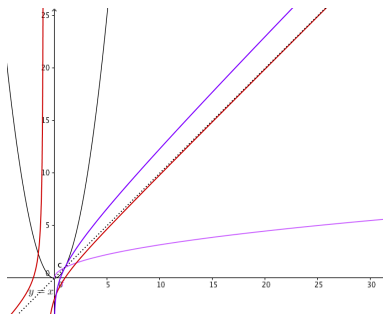
Indiquer sous chacun des quatre graphiques suivants lesquels présentent des branches paraboliques, des asymptotes. . .



Exemple

Exercice

Indiquer sous chacun des quatre graphiques suivants lesquels présentent des branches paraboliques, des asymptotes. . .



Remarque Courbe asymptote



Conclusion

Objectifs

⇒ Rappels généraux sur les fonctions

⇒ Bijection & Asymptotes





Conclusion

Objectifs

⇒ Rappels généraux sur les fonctions

- Ensemble de définition, ensemble image





Conclusion

Objectifs

⇒ Rappels généraux sur les fonctions

- Ensemble de définition, ensemble image
- Représentation graphique et opérations sur les fonctions
- Fonction restreinte
- Parité, imparité, périodicité



Conclusion

Objectifs

- ⇒ Rappels généraux sur les fonctions
- ⇒ Bijection & Asymptotes



Conclusion

Objectifs

⇒ Rappels généraux sur les fonctions

⇒ Bijection & Asymptotes

- Fonctions bijectives et réciproque



Conclusion

Objectifs

⇒ Rappels généraux sur les fonctions

⇒ Bijection & Asymptotes

- Fonctions bijectives et réciproque
- Etude à l'infini :



Conclusion

Objectifs

⇒ Rappels généraux sur les fonctions

⇒ Bijection & Asymptotes

- Fonctions bijectives et réciproque

- Etude à l'infini :

- a. $\lim_{x \rightarrow \ell} \frac{f(x)}{x} = \ell$





Conclusion

Objectifs

⇒ Rappels généraux sur les fonctions

⇒ Bijection & Asymptotes

- Fonctions bijectives et réciproque
- Etude à l'infini :
 - a. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \ell$
 - b. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - \ell x \dots$



Conclusion

Objectifs

- ⇒ Rappels généraux sur les fonctions
- ⇒ Bijection & Asymptotes

Pour la prochaine fois

- Lecture du cours : chapitre 5
 - 3. Fonctions circulaires et réciproques
 - 4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles
- Exercice N°125, 126 & 127

