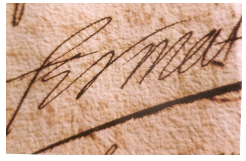


Leçon 14 - Fonctions *à la Euler*



⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

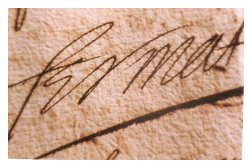
⇒ Fonction puissance et polynomiale

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique
   - 3.1. Fonctions circulaires
   - 3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles
   - 4.1. Fonction puissance entière relative
   - 4.2. Fonctions polynomiales
   - 4.3. Fonction puissance rationnelle



⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

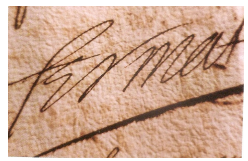
⇒ Fonction puissance et polynomiale

1. Problèmes

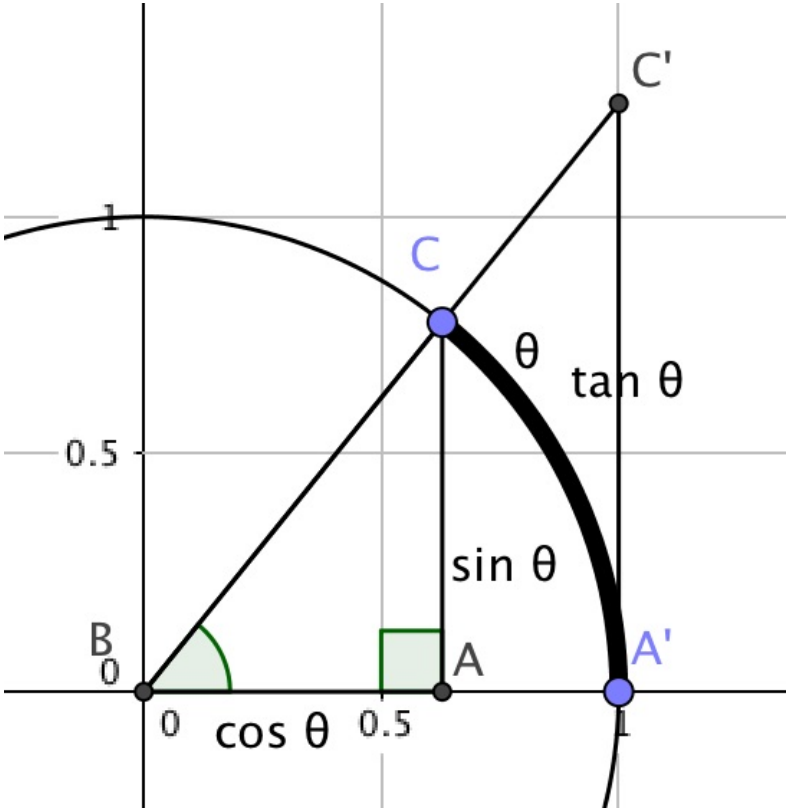
2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique
   - 3.1. Fonctions circulaires
   - 3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles
   - 4.1. Fonction puissance entière relative
   - 4.2. Fonctions polynomiales
   - 4.3. Fonction puissance rationnelle



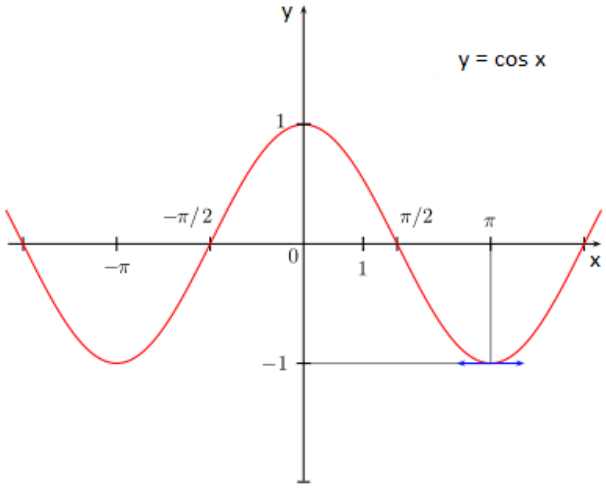
Cercle trigonométrique

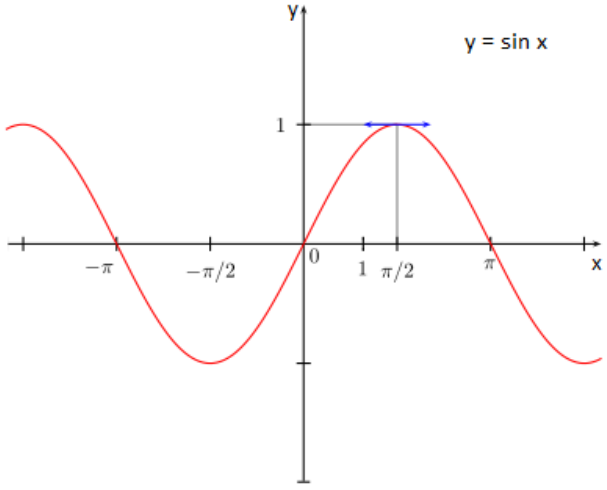


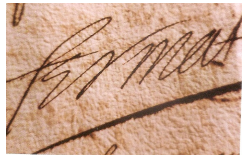
On reprend, de manière analytique (où le paramètre x devient une variable) les fonctions trigonométriques vues précédemment.



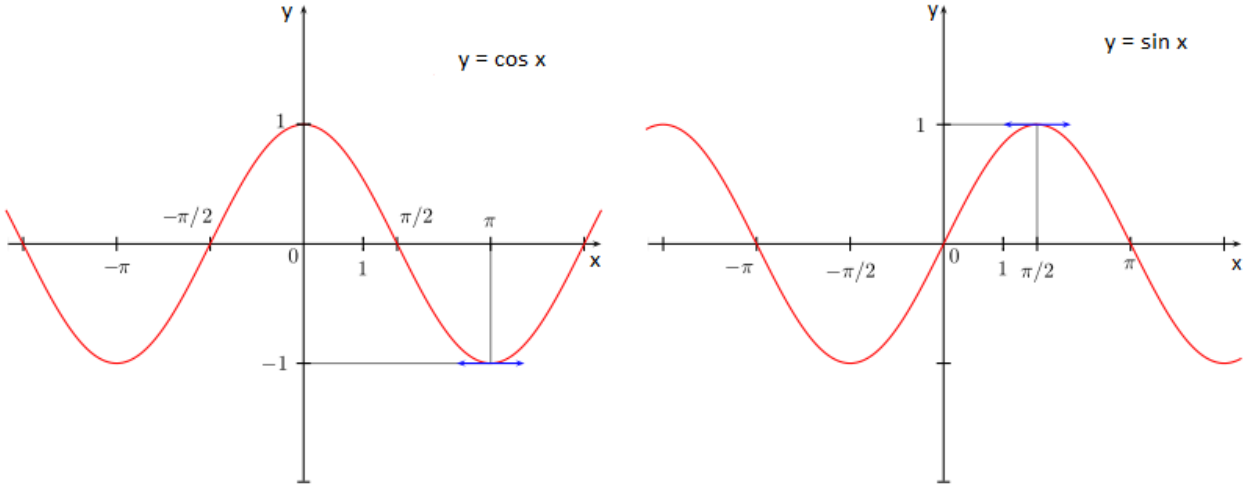
Fonctions cosinus et sinus







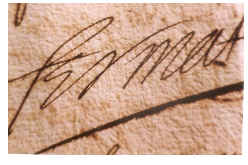
Fonctions cosinus et sinus



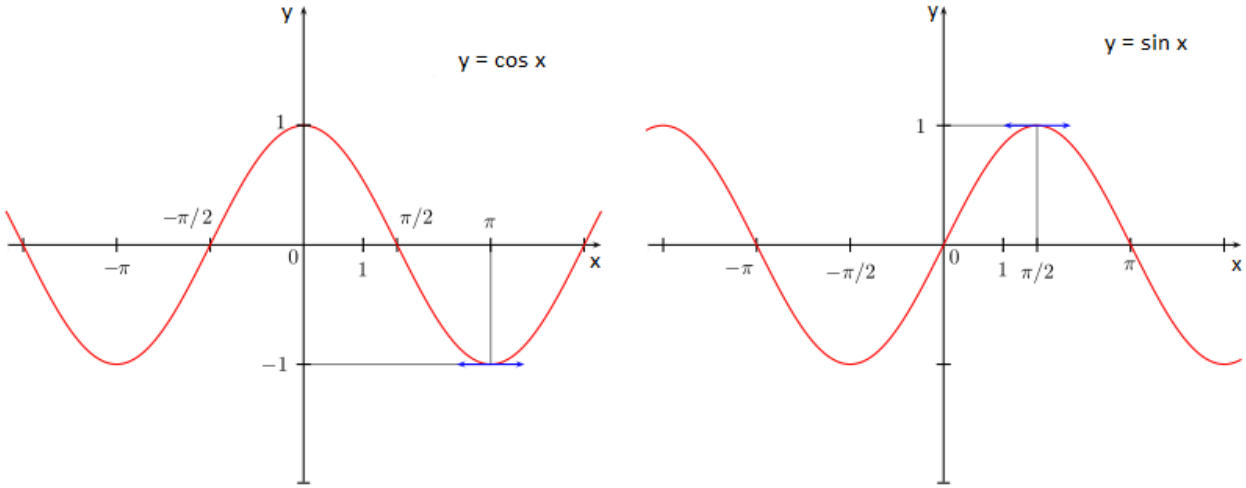
Proposition - Aspect analytique

Les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques.

$\sin$ est une fonction impaire alors que $\cos$ est une fonction paire.



Fonctions cosinus et sinus



Proposition - Aspect analytique

Les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques.

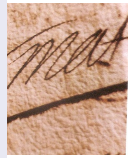
$\sin$ est une fonction impaire alors que $\cos$ est une fonction paire.

Savoir-faire. Transférer un problème trigonométrique « en a »vers « en 0 ».

Il faut exploiter les formules trigonométriques

$\sin(a+h) = \sin a \cos h + \cos a \sin h$ et

$\cos(a+h) = \cos a \cos h - \sin a \sin h$, à connaître par coeur.



Inégalité

Analyse Inégalité fondamentale



Inégalité

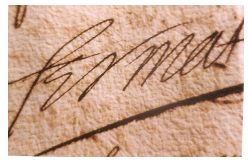
Analyse Inégalité fondamentale

Proposition - Inégalité

On a pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,

$$|\sin x| \leqslant |x| \leqslant |\tan x| = \frac{|\sin x|}{\cos x}$$

Et en particulier $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$



Inégalité

Analyse Inégalité fondamentale

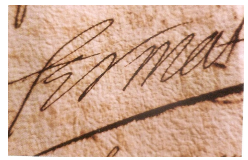
Proposition - Inégalité

On a pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,

$$|\sin x| \leqslant |x| \leqslant |\tan x| = \frac{|\sin x|}{\cos x}$$

Et en particulier $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

Démonstration



Inégalité

Analyse Inégalité fondamentale

Proposition - Inégalité

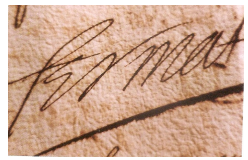
On a pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,

$$|\sin x| \leqslant |x| \leqslant |\tan x| = \frac{|\sin x|}{\cos x}$$

Et en particulier $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

Démonstration

Exemple Calculatrice. Calculer $\sin(0,01234)$



Inégalité

Analyse Inégalité fondamentale

Proposition - Inégalité

On a pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,

$$|\sin x| \leqslant |x| \leqslant |\tan x| = \frac{|\sin x|}{\cos x}$$

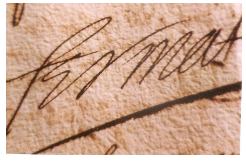
Et en particulier $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

Démonstration

Exemple Calculatrice. Calculer $\sin(0,01234)$

Exercice

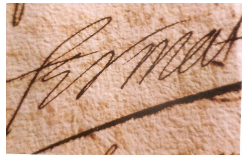
En majorant le module de $e^{ix} - 1$, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin^2 x + (\cos x - 1)^2 \leqslant x^2$.



Tangente

Proposition - Fonction tangente - Aspect analytique

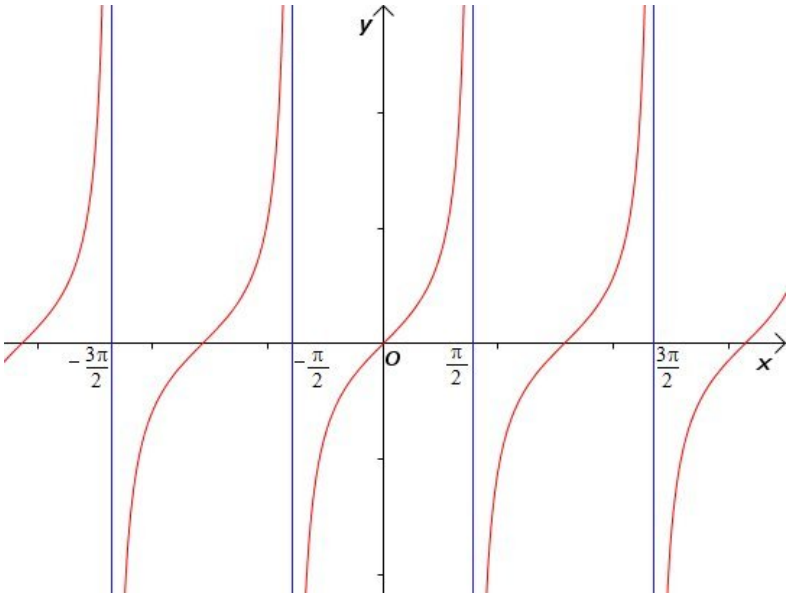
La fonction tangente est ainsi définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ ($\mathbb{R}$ privé des points de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$).
$\tan$ est impaire, π-périodique

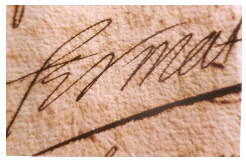


Tangente

Proposition - Fonction tangente - Aspect analytique

La fonction tangente est ainsi définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ ($\mathbb{R}$ privé des points de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$).
$\tan$ est impaire, π-périodique

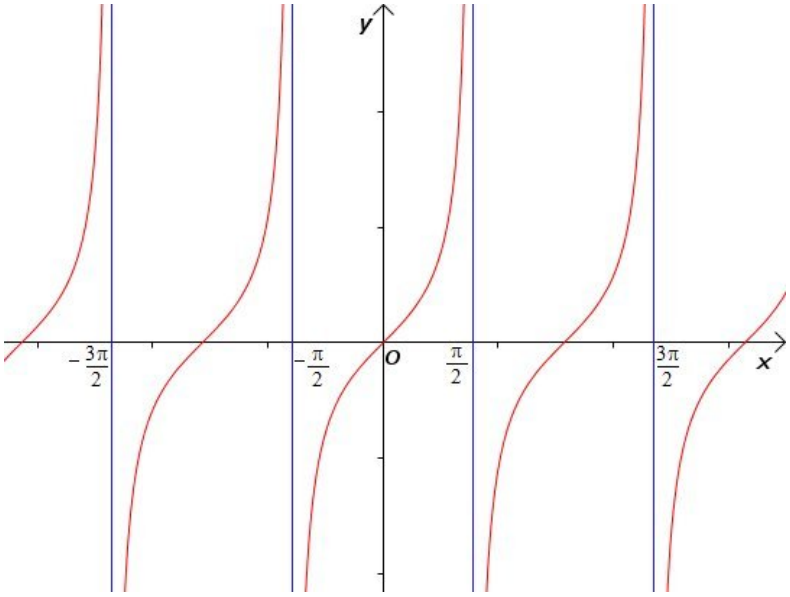




Tangente

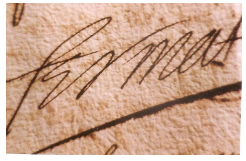
Proposition - Fonction tangente - Aspect analytique

La fonction tangente est ainsi définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ ($\mathbb{R}$ privé des points de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$).
$\tan$ est impaire, π-périodique



Exercice

Etudier et représenter la fonction $\tan$



⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

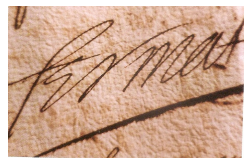
⇒ Fonction puissance et polynomiale

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique
   - 3.1. Fonctions circulaires
   - 3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles
   - 4.1. Fonction puissance entière relative
   - 4.2. Fonctions polynomiales
   - 4.3. Fonction puissance rationnelle



Fonction arcsin

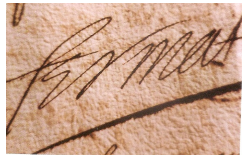
Définition - Arcsinus

La fonction sinus est continue et strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ donc réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$.

La bijection réciproque s'appelle arcsinus, $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Elle est impaire, strictement croissante. On a donc :

$$t = \arcsin x \Leftrightarrow \left(\sin t = x \text{ et } t \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]\right)$$



Fonction arcsin

Définition - Arcsinus

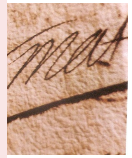
La fonction sinus est continue et strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ donc réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$.
La bijection réciproque s'appelle arcsinus, $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Elle est impaire, strictement croissante. On a donc :

$$t = \arcsin x \Leftrightarrow \left(\sin t = x \text{ et } t \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]\right)$$

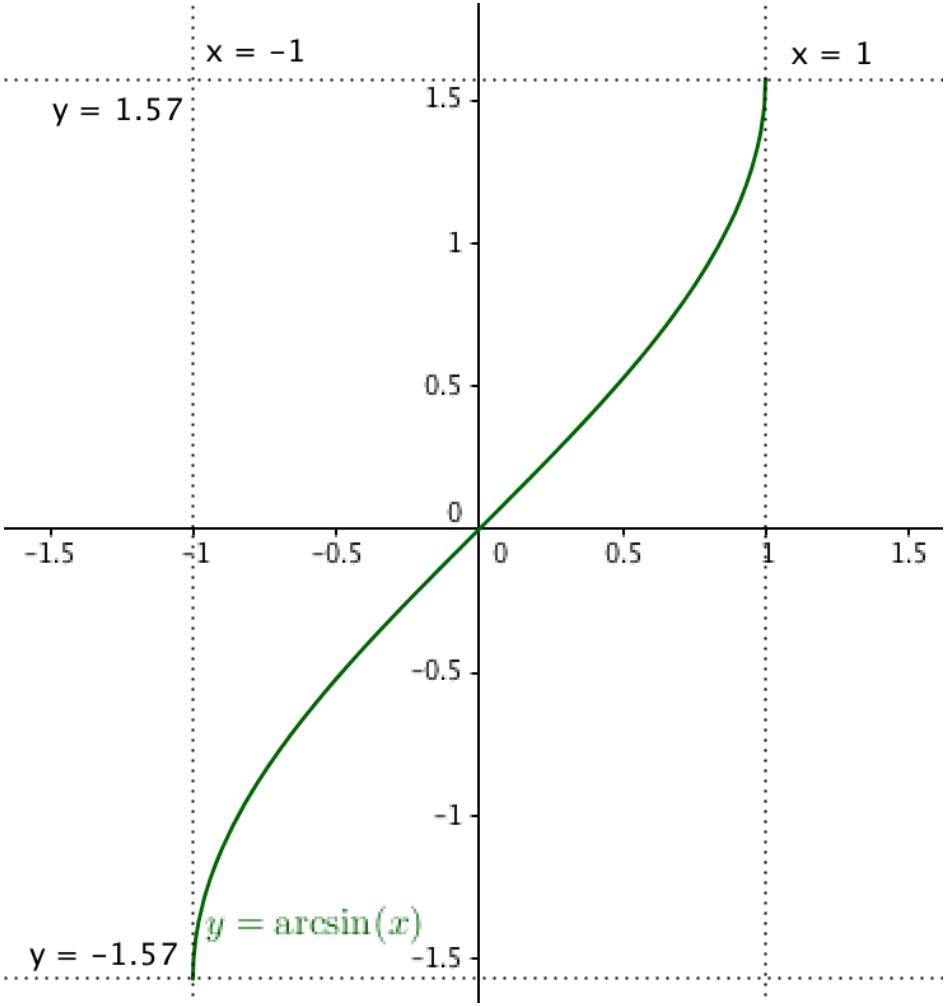
Proposition - Rappels

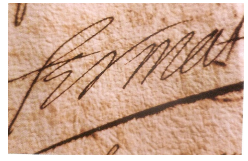
On a :

- $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad \arcsin(\sin x) = x$
- $\forall x \in [-1, 1], \quad \sin(\arcsin x) = x$
- $\forall x \in [-1, 1], \quad \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$
- $\forall x \in]-1, 1[, \quad \tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$



Fonction arcsin





Fonction arcsin

Analyse Questions

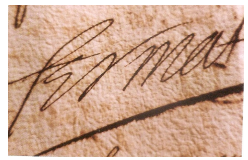


Fonction arcsin

Analyse Questions

Il faut connaître les valeurs remarquables suivantes :

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$



Fonction arccos

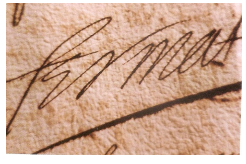
Définition - Arccosinus

La fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur $[0,\pi]$ donc réalise une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$.

La bijection réciproque s'appelle arccosinus, $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$.

Elle est strictement décroissante et on a donc :

$$t = \arccos x \Leftrightarrow \Big(\cos t = x \text{ et } t \in [0,\pi]\Big)$$



Fonction arccos

Définition - Arccosinus

La fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur $[0,\pi]$ donc réalise une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$.

La bijection réciproque s'appelle arccosinus, $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$.

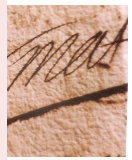
Elle est strictement décroissante et on a donc :

$$t = \arccos x \Leftrightarrow \Big(\cos t = x \text{ et } t \in [0,\pi]\Big)$$

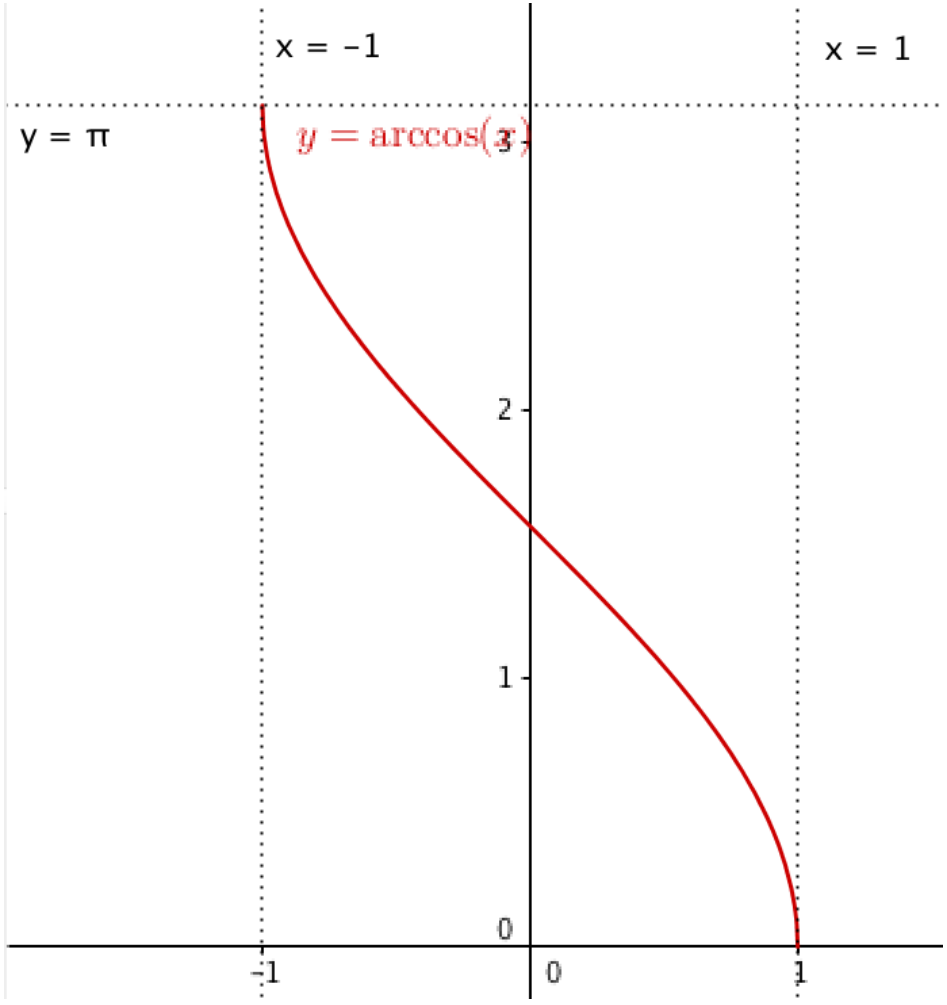
Proposition - Rappels

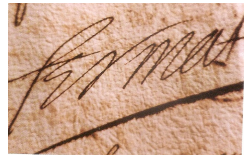
On a :

- $\forall x \in [0,\pi], \quad \arccos(\cos x) = x$
- $\forall x \in [-1,1], \quad \cos(\arccos x) = x$
- $\forall x \in [-1,1], \quad \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$
- $\forall x \in [-1,1], x \neq 0, \quad \tan(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$
- $\forall x \in [-1,1], \quad \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$



Fonction arccos





Fonction arccos

Il faut connaître les valeurs remarquables suivantes :

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0



Fonction arctan

Définition - Arctangente

La fonction tangente est continue et strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ donc réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$.

La bijection réciproque s'appelle arctangente, $\arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

Elle est impaire, strictement croissante et on a donc :

$$t = \arctan x \Leftrightarrow \left(\tan t = x \text{ et } t \in]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}[\right)$$

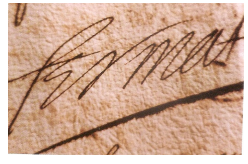


Fonction arctan

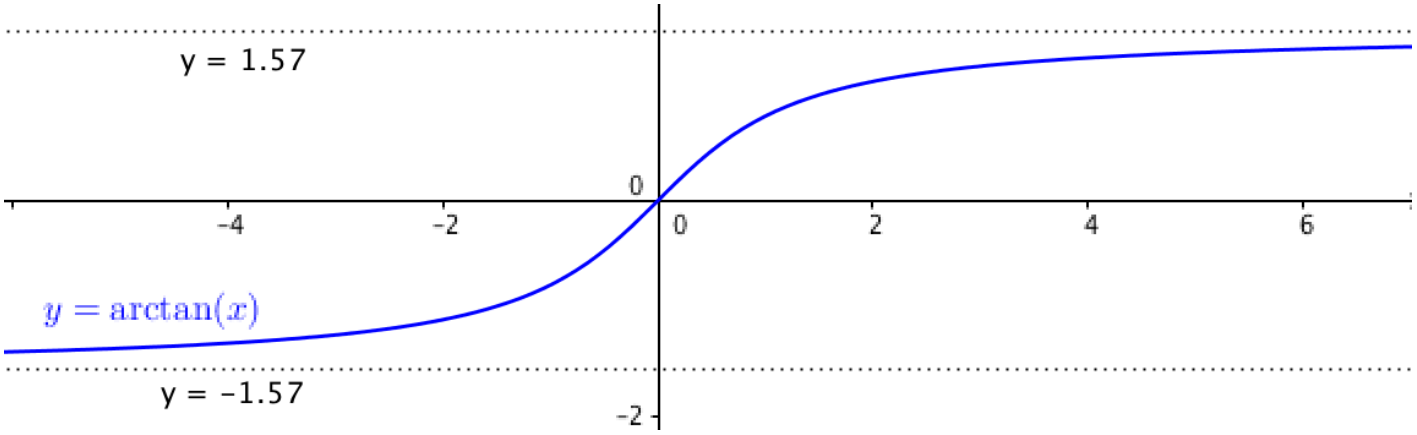
Proposition - Rappels

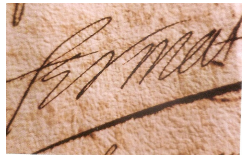
On a :

- $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \quad \arctan(\tan x) = x$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tan(\arctan x) = x$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$



Fonction arctan





Fonction arctan

Il faut connaître les valeurs remarquables suivantes :

x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\arctan x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$



⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

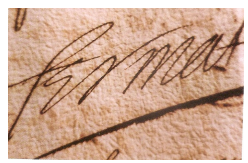
⇒ Fonction puissance et polynomiale

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique
   - 3.1. Fonctions circulaires
   - 3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles
   - 4.1. Fonction puissance entière relative
   - 4.2. Fonctions polynomiales
   - 4.3. Fonction puissance rationnelle



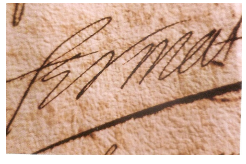
Définitions

Définition - Puissance entière > 0

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on qualifie de fonction puissance entière l'application $x \mapsto x^n$, i.e. définie par récurrence par $x \mapsto x \times x^{n-1}$ et $x^0 = 1$.

Son ensemble de définition est $\mathbb{R}$. C'est une fonction continue.

Cette application est paire si n est pair, et impaire si n est impair.



Définitions

Définition - Puissance entière > 0

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on qualifie de fonction puissance entière l'application $x \mapsto x^n$, i.e. définie par récurrence par $x \mapsto x \times x^{n-1}$ et $x^0 = 1$.
Son ensemble de définition est $\mathbb{R}$. C'est une fonction continue.
Cette application est paire si n est pair, et impaire si n est impair.

Définition - Puissance entière < 0

Soit $m \in \mathbb{Z}_-$, on qualifie de fonction puissance entière négative l'application $x \mapsto x^m = \dfrac{1}{x^{-n}}$, i.e. définie par récurrence par $x \mapsto \dfrac{1}{x} \times x^{m+1}$ et $x^0 = 1$.
Son ensemble de définition est $\mathbb{R}^*$. C'est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.
Cette application est paire si n est pair, et impaire si n est impair.



Définitions

Définition - Puissance entière > 0

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on qualifie de fonction puissance entière l'application $x \mapsto x^n$, i.e. définie par récurrence par $x \mapsto x \times x^{n-1}$ et $x^0 = 1$.
Son ensemble de définition est $\mathbb{R}$. C'est une fonction continue.
Cette application est paire si n est pair, et impaire si n est impair.

Définition - Puissance entière < 0

Soit $m \in \mathbb{Z}_-$, on qualifie de fonction puissance entière négative l'application $x \mapsto x^m = \dfrac{1}{x^{-n}}$, i.e. définie par récurrence par $x \mapsto \dfrac{1}{x} \times x^{m+1}$ et $x^0 = 1$.
Son ensemble de définition est $\mathbb{R}^*$. C'est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.
Cette application est paire si n est pair, et impaire si n est impair.



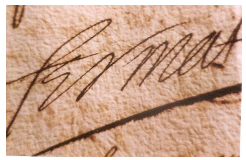
Il faut savoir représenter ces fonctions, en particulier l'hyperbole $\mathscr{C}$

Morphisme

Proposition - Morphisme

On a pour tout $m, n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}^*$, $x^m \times x^n = x^{m+n}$.

Vrai également en $x = 0$ si $m, n > 0$.

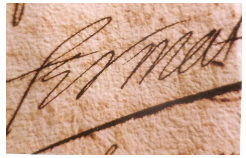


Morphisme

Proposition - Morphisme

On a pour tout $m, n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}^*$, $x^m \times x^n = x^{m+n}$.
Vrai également en $x = 0$ si $m, n > 0$.

Exercice A démontrer



Inégalités de croissance

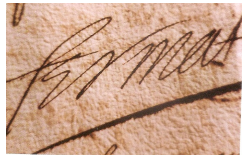
Pour étudier les limites variées (à l'infini, ou calculer des dérivées), on a besoin d'encadrement.



Inégalités de croissance

Pour étudier les limites variées (à l'infini, ou calculer des dérivées), on a besoin d'encadrement.

Fixons $n \in \mathbb{N}$. Pour la croissance de $x \mapsto x^n$, on exploite le binôme de Newton. Par exemple :



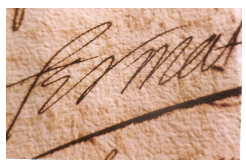
Inégalités de croissance

Pour étudier les limites variées (à l'infini, ou calculer des dérivées), on a besoin d'encadrement.
Fixons $n \in \mathbb{N}$. Pour la croissance de $x \mapsto x^n$, on exploite le binôme de Newton. Par exemple :

Proposition - Binôme de Newton. Croissance

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $(a+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} x^k$.

Avec $a, x > 0$, on a donc $x < x' \Rightarrow x^n < (x')^n$, soit la croissance de $x \to x^n$ sur $\mathbb{R}$.



Inégalités de croissance

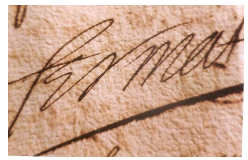
Pour étudier les limites variées (à l'infini, ou calculer des dérivées), on a besoin d'encadrement.
Fixons $n \in \mathbb{N}$. Pour la croissance de $x \mapsto x^n$, on exploite le binôme de Newton. Par exemple :

Proposition - Binôme de Newton. Croissance

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $(a+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} x^k$.

Avec $a, x > 0$, on a donc $x < x' \Rightarrow x^n < (x')^n$, soit la croissance de $x \to x^n$ sur $\mathbb{R}$.

Démonstration



Inégalités de croissance

Pour étudier les limites variées (à l'infini, ou calculer des dérivées), on a besoin d'encadrement.
Fixons $n \in \mathbb{N}$. Pour la croissance de $x \mapsto x^n$, on exploite le binôme de Newton. Par exemple :

Proposition - Binôme de Newton. Croissance

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $(a+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} x^k$.

Avec $a, x > 0$, on a donc $x < x' \Rightarrow x^n < (x')^n$, soit la croissance de $x \to x^n$ sur $\mathbb{R}$.

Démonstration

Exercice Faire la démonstration par récurrence.

On fera bien attention aux variables fixées et à celles qui sont libres.

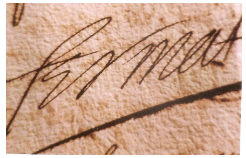


Inégalité de Bernoulli

Proposition - Inégalités de Bernoulli

Soit $x \in]-1, +\infty[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geqslant 1+nx$.

Pour $x \in]-1, \frac{1}{n}[$, $(1+x)^n \leqslant \dfrac{1}{1-nx}$



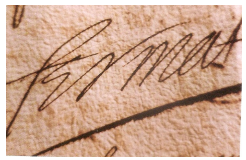
Inégalité de Bernoulli

Proposition - Inégalités de Bernoulli

Soit $x \in]-1, +\infty[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geqslant 1+nx$.

Pour $x \in]-1, \frac{1}{n}[$, $(1+x)^n \leqslant \dfrac{1}{1-nx}$

Démonstration



Inégalité de Bernoulli

Proposition - Inégalités de Bernoulli

Soit $x \in]-1, +\infty[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geqslant 1+nx$.

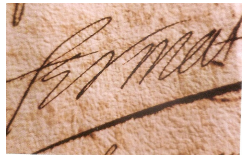
Pour $x \in]-1, \frac{1}{n}[$, $(1+x)^n \leqslant \dfrac{1}{1-nx}$

Démonstration

L'exercice suivant permet de montrer la continuité des fonctions puissances rationnelles.

Exercice

On fixe $n \in \mathbb{N}$.Montrer que $\lim_{x \to 0+}(1+x)^n = 1$, puis la continuité à droite de $t \mapsto t^n$ en 1 et en tout $x \in \mathbb{R}$.



⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

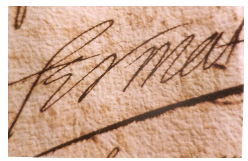
⇒ Fonction puissance et polynomiale

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique
   - 3.1. Fonctions circulaires
   - 3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles
   - 4.1. Fonction puissance entière relative
   - 4.2. Fonctions polynomiales
   - 4.3. Fonction puissance rationnelle



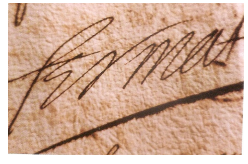
Définition

Définition - Fonction polynomiale

On appelle fonction polynomiale une fonction de la forme :

$$f : x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

où $\forall\ k \in [\![0, n]\!]$, $a_k \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) ;
Il s'agit d'une combinaison linéaire finie de puissances entières de la variable x. On parle de polynôme simple ou de polynôme à une variable.
On dit que $f(x) = b$ est une équation polynomiale si f est une fonction polynomiale.



Définition

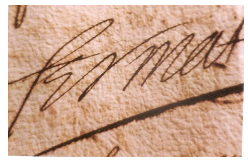
Définition - Fonction polynomiale

On appelle fonction polynomiale une fonction de la forme :

$$f : x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

où $\forall\ k \in [\![0, n]\!]$, $a_k \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) ;
Il s'agit d'une combinaison linéaire finie de puissances entières de la variable x. On parle de polynôme simple ou de polynôme à une variable.
On dit que $f(x) = b$ est une équation polynomiale si f est une fonction polynomiale.

Remarque Notations



Stabilité opératoire

Par propriétés calculatoires sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:



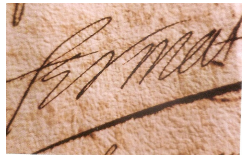
Stabilité opératoire

Par propriétés calculatoires sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:

Proposition - Propriété de l'ensemble des fonctions polynomiales

Si f et g sont deux fonctions polynomiales, alors :

- $f+g$ est une fonction polynomiale
- $f \times g$ est une fonction polynomiale
- $f \circ g$ est une fonction polynomiale.



Stabilité opératoire

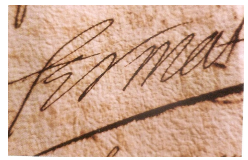
Par propriétés calculatoires sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:

Proposition - Propriété de l'ensemble des fonctions polynomiales

Si f et g sont deux fonctions polynomiales, alors :

- $f+g$ est une fonction polynomiale
- $f \times g$ est une fonction polynomiale
- $f \circ g$ est une fonction polynomiale.

Démonstration



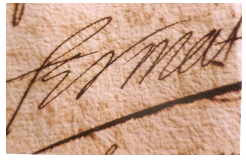
Factorisation multiple

Rappelons :

Théorème - Factorisation multiple

Soit f une fonction polynomiale de degré n. Soit $p \leqslant n$
Si $x_1, x_2, \ldots x_p$, p solutions différentes de l'équation $f(x) = 0$ (racines de f).
Alors il existe g_p, fonction polynomiale de degré $n - p$ tel que

$$\forall\ x \in \mathbb{K}, \qquad f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_p) \times g_p(x)$$



Factorisation multiple

Rappelons :

Théorème - Factorisation multiple

Soit f une fonction polynomiale de degré n. Soit $p \leqslant n$
Si $x_1, x_2, \ldots x_p$, p solutions différentes de l'équation $f(x) = 0$ (racines de f).
Alors il existe g_p, fonction polynomiale de degré $n - p$ tel que

$$\forall\ x \in \mathbb{K}, \qquad f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_p) \times g_p(x)$$

Corollaire - Nombre maximal de solution

Une équation polynomiale de degré n admet au plus n solutions différentes



⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

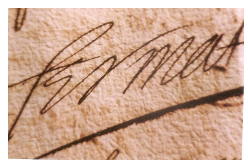
⇒ Fonction puissance et polynomiale

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique
   - 3.1. Fonctions circulaires
   - 3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles
   - 4.1. Fonction puissance entière relative
   - 4.2. Fonctions polynomiales
   - 4.3. Fonction puissance rationnelle



Racine

Analyse Bijection de $x \longmapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$



Racine

Analyse Bijection de $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$

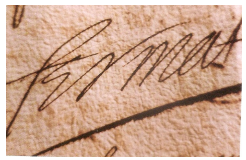
Définition - Racine n-ième

On note $\sqrt[n]{.}$ la bijection réciproque de $x \mapsto x^n$.
On a donc :

$$\text{si } n \text{ est pair} \quad \sqrt[n]{x} = x^{1/n} \quad \text{pour } x \geqslant 0$$

$$\text{si } n \text{ est impair} \quad \sqrt[n]{x} = \begin{cases} x^{1/n} & \text{pour } x \geqslant 0 \\ -|x|^{1/n} = -(-x)^{1/n} & \text{pour } x \leqslant 0 \end{cases}$$

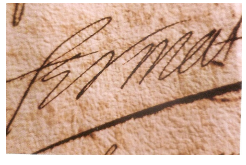
Pour n impair on a donc $\sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x}$.



Puissance fractionnaire

Définition - Puissance rationnelle

Soit $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^*$ (avec $q \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{Z}$), on qualifie de fonction puissance rationnelle l'application $x \mapsto x^r$ où x^r vérifie $(x^r)^q = x^p$.
Son ensemble de définition est $\mathbb{R}_+$. C'est une fonction croissante et continue (nous le verrons plus tard).

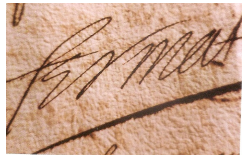


Puissance fractionnaire

Définition - Puissance rationnelle

Soit $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^*$ (avec $q \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{Z}$), on qualifie de fonction puissance rationnelle l'application $x \mapsto x^r$ où x^r vérifie $(x^r)^q = x^p$.
Son ensemble de définition est $\mathbb{R}_+$. C'est une fonction croissante et continue (nous le verrons plus tard).

Exemple $5^{2/3}$



Inégalités complémentaires

Analyse Image de $[0,1[$ et image de $]1,+\infty[$ par $x \mapsto x^r$

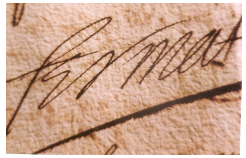


Inégalités complémentaires

Analyse Image de $[0,1[$ et image de $]1,+\infty[$ par $x \mapsto x^r$

Proposition - Comparaison des fonctions puissances

Soient $r < r' \in \mathbb{Q}$.
Alors pour tout $x > 1$, $x^r < x^{r'}$. Et si $x < 1$, $x^r > x^{r'}$



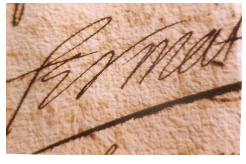
Inégalités complémentaires

Analyse Image de $[0,1[$ et image de $]1,+\infty[$ par $x \mapsto x^r$

Proposition - Comparaison des fonctions puissances

Soient $r < r' \in \mathbb{Q}$.
Alors pour tout $x > 1$, $x^r < x^{r'}$. Et si $x < 1$, $x^r > x^{r'}$

Demonstration



Inégalités complémentaires

Analyse Image de $[0,1[$ et image de $]1,+\infty[$ par $x \mapsto x^r$

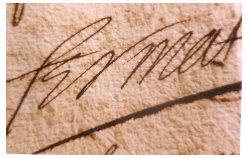
Proposition - Comparaison des fonctions puissances

Soient $r < r' \in \mathbb{Q}$.
Alors pour tout $x > 1$, $x^r < x^{r'}$. Et si $x < 1$, $x^r > x^{r'}$

Demonstration

Attention. Ne pas confondre les variables x et n

Dès maintenant, on fait bien attention lorsqu'on compare à x fixé x^r et x^s et lorsqu'on compare à r fixé : x^r et x'^r.

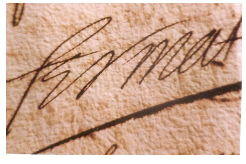


Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Fonctions puissances, fonctions polynomiales

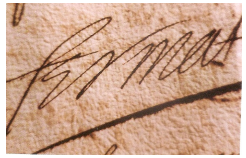


Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

- Petit point sur les fonctions à valeurs complexes et en particulier $t \mapsto e^{it}$

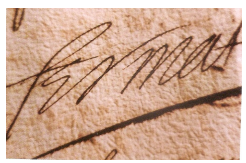


Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

- Petit point sur les fonctions à valeurs complexes et en particulier $t \mapsto e^{it}$
- Partie réelle : $\cos$ et partie imaginaire : $\sin$.

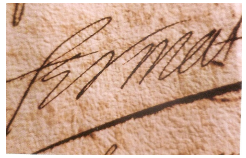


Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

- Petit point sur les fonctions à valeurs complexes et en particulier $t \mapsto e^{it}$
- Partie réelle : $\cos$ et partie imaginaire : $\sin$.
- Propriétés trigonométriques à bien connaître ! ! (cf TD précédent)

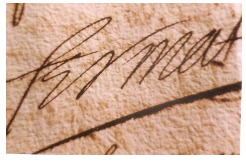


Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

- Petit point sur les fonctions à valeurs complexes et en particulier $t \mapsto e^{it}$
- Partie réelle : $\cos$ et partie imaginaire : $\sin$.
- Propriétés trigonométriques à bien connaître ! ! (cf TD précédent)
- Fonction tangente

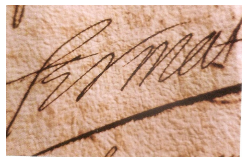


Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

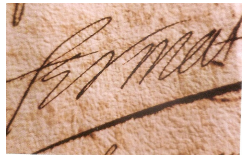
- Petit point sur les fonctions à valeurs complexes et en particulier $t \mapsto e^{it}$
- Partie réelle : $\cos$ et partie imaginaire : $\sin$.
- Propriétés trigonométriques à bien connaître ! ! (cf TD précédent)
- Fonction tangente
- Inégalité fondamentale : pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin x \leqslant x \leqslant \tan x$ (et imparité)



Conclusion

Objectifs

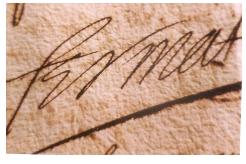
⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque



Conclusion

Objectifs

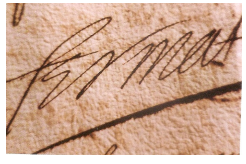
⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque



Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

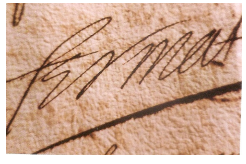


Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Fonctions puissances, fonctions polynomiales



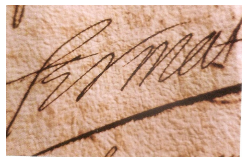
Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Fonctions puissances, fonctions polynomiales

- Par récurrence, on définit $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto x^{-m} = \dfrac{1}{x^{-m}}$



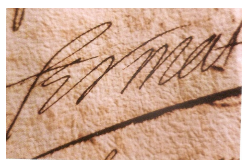
Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Fonctions puissances, fonctions polynomiales

- Par récurrence, on définit $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto x^{-m} = \dfrac{1}{x^{-m}}$
- Par bijectivité de $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$, on définit $x \mapsto (x^n)^{-1} = x^{-n} = x^{\frac{1}{n}}$



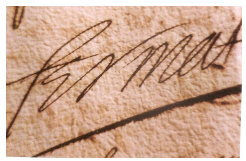
Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Fonctions puissances, fonctions polynomiales

- Par récurrence, on définit $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto x^{-m} = \dfrac{1}{x^{-m}}$
- Par bijectivité de $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$, on définit $x \mapsto (x^n)^{-1} = x^{-n} = x^{\frac{1}{n}}$
- On note alors pour $x > 0$ et $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $x^r = (x^p)^{1/q}$.



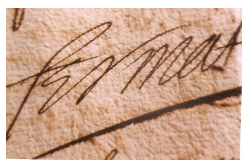
Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Fonctions puissances, fonctions polynomiales

- Par récurrence, on définit $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto x^{-m} = \dfrac{1}{x^{-m}}$
- Par bijectivité de $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$, on définit $x \mapsto (x^n)^{-1} = x^{-n} = x^{\frac{1}{n}}$
- On note alors pour $x > 0$ et $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $x^r = (x^p)^{1/q}$.
- L'application $x \mapsto x^r$ est continue.



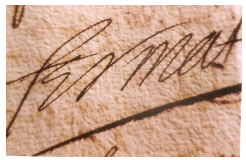
Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Fonctions puissances, fonctions polynomiales

- Par récurrence, on définit $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto x^{-m} = \dfrac{1}{x^{-m}}$
- Par bijectivité de $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$, on définit $x \mapsto (x^n)^{-1} = x^{-n} = x^{\frac{1}{n}}$
- On note alors pour $x > 0$ et $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $x^r = (x^p)^{1/q}$.
- L'application $x \mapsto x^r$ est continue.
- Si $r < r'$. Si $x > 1$, alors $x^r < x^{r'}$, si $x < 1$, alors $x^r > x^{r'}$.



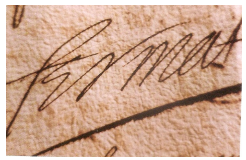
Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Fonctions puissances, fonctions polynomiales

- Par récurrence, on définit $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto x^{-m} = \dfrac{1}{x^{-m}}$
- Par bijectivité de $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$, on définit $x \mapsto (x^n)^{-1} = x^{-n} = x^{\frac{1}{n}}$
- On note alors pour $x > 0$ et $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $x^r = (x^p)^{1/q}$.
- L'application $x \mapsto x^r$ est continue.
- Si $r < r'$. Si $x > 1$, alors $x^r < x^{r'}$, si $x < 1$, alors $x^r > x^{r'}$.
- Polynômes : Stabilité par addition, multiplication et composition des fonctions polynomiales



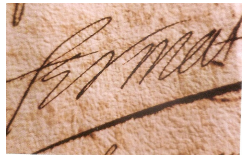
Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Fonctions puissances, fonctions polynomiales

- Par récurrence, on définit $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto x^{-m} = \dfrac{1}{x^{-m}}$
- Par bijectivité de $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$, on définit $x \mapsto (x^n)^{-1} = x^{-n} = x^{\frac{1}{n}}$
- On note alors pour $x > 0$ et $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $x^r = (x^p)^{1/q}$.
- L'application $x \mapsto x^r$ est continue.
- Si $r < r'$. Si $x > 1$, alors $x^r < x^{r'}$, si $x < 1$, alors $x^r > x^{r'}$.
- Polynômes : Stabilité par addition, multiplication et composition des fonctions polynomiales
- Polynômes (rappels) : factorisation et nombre maximale de racines.



Conclusion

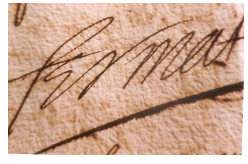
Objectifs

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Fonctions puissances, fonctions polynomiales

- Par récurrence, on définit $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto x^{-m} = \dfrac{1}{x^{-m}}$
- Par bijectivité de $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$, on définit $x \mapsto (x^n)^{-1} = x^{-n} = x^{\frac{1}{n}}$
- On note alors pour $x > 0$ et $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $x^r = (x^p)^{1/q}$.
- L'application $x \mapsto x^r$ est continue.
- Si $r < r'$. Si $x > 1$, alors $x^r < x^{r'}$, si $x < 1$, alors $x^r > x^{r'}$.
- Polynômes : Stabilité par addition, multiplication et composition des fonctions polynomiales
- Polynômes (rappels) : factorisation et nombre maximale de racines.
- Inégalités : pour $n \in \mathbb{N}$ et pour $x \in]-1, +\infty[$, $(1+x)^n \leqslant 1+nx$

  et pour $x \in]-1, \frac{1}{n}[$, $(1+x)^n \geqslant \dfrac{1}{1-nx}$



Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Fonctions puissances, fonctions polynomiales

Pour la prochaine fois

- Lecture du cours : chapitre 3. Fonctions à la Euler
  5. Fonctions exponentielles (et logarithmes)
- Exercice N°139 & 141
- TD maths :
  8h-10h : N° 131, 135, 140, 143, 146
  10h-12h : N° 134, 137, 142, 145, 147
- Contrôle de calculs :
  Fiche 4 (racines carrées) et Fiche 7 : exponentielle et logarithme

