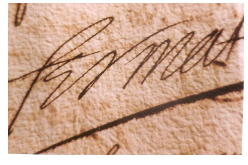


Leçon 16 - Fonctions *à la Euler*



⇒ **Fonctions (exponentielles et) logarithmes**

⇒ **Trigonométrie hyperbolique**

1. Problèmes
2. Fonctions trigonométrique
3. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles
4. Exponentielles et logarithmes
   - 4.1. ExponentielleS
   - 4.2. LA fonction exponentielle
   - 4.3. LogarithmeS
   - 4.4. Retour sur les fonctions puissances, avec un exposant non rationnel
   - 4.5. Croissances comparées
   - 4.6. Fonctions hyperboliques directes
5. Sommes numériques infinies



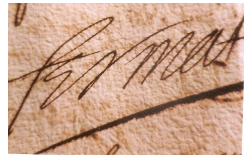
⇒ Fonctions (exponentielles et) logarithmes
⇒ Trigonométrie hyperbolique

1. Problèmes
2. Fonctions trigonométrique
3. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles
4. Exponentielles et logarithmes
   - 4.1. ExponentielleS
   - 4.2. LA fonction exponentielle
   - 4.3. LogarithmeS
   - 4.4. Retour sur les fonctions puissances, avec un exposant non rationnel
   - 4.5. Croissances comparées
   - 4.6. Fonctions hyperboliques directes
5. Sommes numériques infinies



Réciproque

Les fonctions exponentielles non constante égale à 0 ou 1 sont continues et strictement monotone, elles admettent donc une fonction récipropque.



Réciproque

Les fonctions exponentielles non constante égale à 0 ou 1 sont continues et strictement monotone, elles admettent donc une fonction récipropque.

Définition - Fonctions logarithmes

On appelle fonctions logarithmes toute fonctions g réciproques de fonctions exponentielles f non constantes.
Si cette dernière est $x \mapsto a^x$ (avec $a \notin \{0, 1\}$), alors la fonction logarithme est qualifiée « de base a ». On note souvent $g = \log_a$ ou $\ln_a$.
Elle est définie sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et vérifie alors

$$\forall\ x, y \in \mathbb{R}_+,\ g(x \times y) = g(x) + g(y).$$



Réciproque

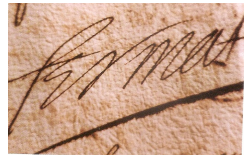
Les fonctions exponentielles non constante égale à 0 ou 1 sont continues et strictement monotone, elles admettent donc une fonction récipropque.

Définition - Fonctions logarithmes

On appelle fonctions logarithmes toute fonctions g réciproques de fonctions exponentielles f non constantes.
Si cette dernière est $x \mapsto a^x$ (avec $a \notin \{0,1\}$), alors la fonction logarithme est qualifiée « de base a ». On note souvent $g = \log_a$ ou $\ln_a$.
Elle est définie sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et vérifie alors

$$\forall\ x, y \in \mathbb{R}_+,\ g(x \times y) = g(x) + g(y).$$

Exemple Différents logarithmes bien connus



Réciproque

Les fonctions exponentielles non constante égale à 0 ou 1 sont continues et strictement monotone, elles admettent donc une fonction récipropque.

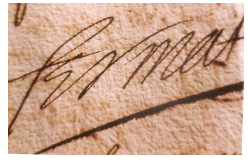
Définition - Fonctions logarithmes

On appelle fonctions logarithmes toute fonctions g réciproques de fonctions exponentielles f non constantes.
Si cette dernière est $x \mapsto a^x$ (avec $a \notin \{0,1\}$), alors la fonction logarithme est qualifiée « de base a ». On note souvent $g = \log_a$ ou $\ln_a$.
Elle est définie sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et vérifie alors

$$\forall\ x, y \in \mathbb{R}_+,\ g(x \times y) = g(x) + g(y).$$

Exemple Différents logarithmes bien connus

Démonstration



Bilan

Théorème - Fonctions logarithmes. Bilan

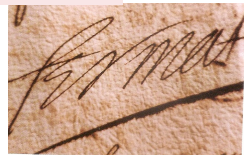
Les fonctions logaritmes sont continues, définies sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Elles vérifient : $g(1) = 0$ et pour tout $x, y, t \in \mathbb{R}_+$, $g(x \times y) = g(x) + g(y)$ et $g(x^t) = t \times g(x)$.

Il existe $a (= f(1)) \in \mathbb{R}$ tel que $g(a) = 1$.

Si $a > 1$, alors g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec $\lim\limits_{0} g = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} g = +\infty$.

Si $a < 1$, alors g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, avec $\lim\limits_{0} g = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$.



Bilan

Théorème - Fonctions logarithmes. Bilan

Les fonctions logaritmes sont continues, définies sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

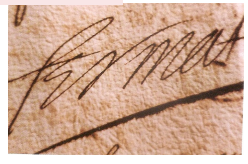
Elles vérifient : $g(1) = 0$ et pour tout $x, y, t \in \mathbb{R}_+$, $g(x \times y) = g(x) + g(y)$ et $g(x^t) = t \times g(x)$.

Il existe $a (= f(1)) \in \mathbb{R}$ tel que $g(a) = 1$.

Si $a > 1$, alors g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec $\lim\limits_{0} g = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} g = +\infty$.

Si $a < 1$, alors g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, avec $\lim\limits_{0} g = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$.

Démonstration



Logarithme en base a, à la main

Savoir-faire. Calculer « à la main »le logarithme en base a de x ?

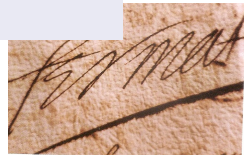
On n'a pas d'autre solution (pour le moment) mais cela est suffisant (compte-tenu de la contrainte que l'on s'est donné) de procéder par dichotomie.

On regarde la suite (a^n) et l'on trouve $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^n \leqslant x < a^{n+1}$.

Puis, on sélectionne $a_0 = n$ et $b_0 = n+1$. Puis on peut (par exemple), considérer $c = \frac{a_0+b_0}{2} \in \mathbb{Q}$, évaluer a^c.

Si $a^c < x$, on prend $a_1 = c$ et $b_1 = b_0$, sinon on prend $a_1 = a_0$ et $b_1 = c \ldots$

On a deux suites adjacentes (a_n) et (b_n) convergente vers y avec $a^y \equiv x$, donc $y = \log_a(x)$.



Logarithme naturel

Définition - Le logarithme naturel

La fonction logarithme réciproque de la fonction exponentielle, donc le logarithme en base $e = \exp 1$ est appelé logarithme naturel.

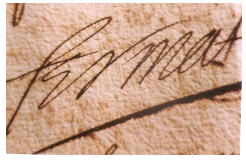
On le note $\ln$.

$\ln$ est définie, continue et croissante sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Numériquement : $\ln(1) = 0$, $\ln e = 1$, $\lim_{0} \ln = -\infty$ et $\lim_{+\infty} \ln = +\infty$.

On a les propriétés algébrique : $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, $\ln(a^b) = b \ln a \ldots$

On a pour tout $u \in]0, 2[$, $\ln u \leqslant u - 1$.



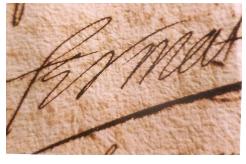
Logarithme naturel

Définition - Le logarithme naturel

La fonction logarithme réciproque de la fonction exponentielle, donc le logarithme en base $e = \exp 1$ est appelé logarithme naturel.
On le note $\ln$.
$\ln$ est définie, continue et croissante sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Numériquement : $\ln(1) = 0$, $\ln e = 1$, $\lim_0 \ln = -\infty$ et $\lim_{+\infty} \ln = +\infty$.
On a les propriétés algébrique : $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, $\ln(a^b) = b \ln a \ldots$
On a pour tout $u \in]0, 2[$, $\ln u \leqslant u - 1$.

Tout est immédiat, sauf l'inégalité qu'on démontre :

Démonstration

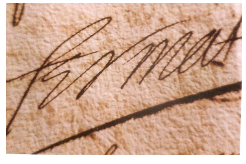


Ecriture explicite

Proposition - Ecriture en fonction du logarithme naturel

Soit g la fonction logarithme de base a, réciproque de $f : x \mapsto a^x$.
Alors on a :

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, f(x) = a^x = \exp(x \times \ln a) \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}_+, g(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$



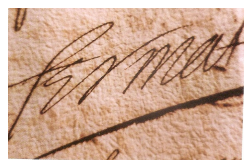
Ecriture explicite

Proposition - Ecriture en fonction du logarithme naturel

Soit g la fonction logarithme de base a, réciproque de $f : x \mapsto a^x$.
Alors on a :

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, f(x) = a^x = \exp(x \times \ln a) \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}_+, g(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Démonstration



⇒ Fonctions (exponentielles et) logarithmes
⇒ Trigonométrie hyperbolique

1. Problèmes
2. Fonctions trigonométrique
3. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles
4. Exponentielles et logarithmes
   - 4.1. ExponentielleS
   - 4.2. LA fonction exponentielle
   - 4.3. LogarithmeS
   - 4.4. Retour sur les fonctions puissances, avec un exposant non rationnel
   - 4.5. Croissances comparées
   - 4.6. Fonctions hyperboliques directes
5. Sommes numériques infinies

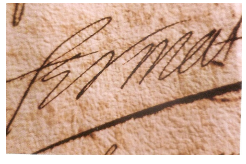


Puissance réelle

Définition - Fonction puissance réelle

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit sur $]0,+\infty[$ la fonction puissance α par :

$$\begin{array}{rccc} g_\alpha : &]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^\alpha = \exp(\alpha \ln x) \end{array}$$



Puissance réelle

Définition - Fonction puissance réelle

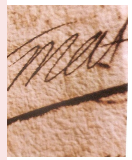
Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit sur $]0,+\infty[$ la fonction puissance α par :

$$\begin{array}{rccc} g_\alpha : &]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^\alpha = \exp(\alpha \ln x) \end{array}$$

Proposition - Fonction puissance réelle

Elle vérifie les propriétés suivantes : $\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2$, $\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$,

- $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$
- $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$
- $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$
- Si $\alpha = 0$, g_α est constante égale à 1.
- Si $\alpha > 0$, g_α est croissante et $\lim\limits_{x \to 0^+} g_\alpha(x) = 0$
- Si $\alpha < 0$, g_α est décroissante et $\lim\limits_{0^+} g_\alpha(x) = +\infty$



Puissance réelle

Définition - Fonction puissance réelle

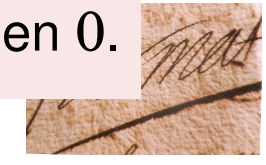
Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit sur $]0,+\infty[$ la fonction puissance α par :

$$\begin{array}{rccc} g_\alpha : &]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^\alpha = \exp(\alpha \ln x) \end{array}$$

Proposition - Fonction puissance réelle

Elle vérifie les propriétés suivantes : Pour $\alpha > 0$, on étudie l'existence d'une demi-tangente en 0 :

- Si $\alpha < 1$, la courbe $y = g_\alpha(x)$ admet une tangente verticale en 0.
- Si $\alpha = 1$, la courbe $y = g_\alpha(x)$ admet une tangente de pente 1 en 0.
- Si $\alpha > 1$, la courbe $y = g_\alpha(x)$ admet une tangente horizontale en 0.



⇒ Fonctions (exponentielles et) logarithmes
⇒ Trigonométrie hyperbolique

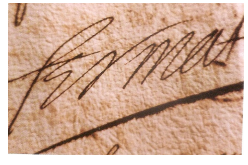
1. Problèmes
2. Fonctions trigonométrique
3. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles
4. Exponentielles et logarithmes
   - 4.1. ExponentielleS
   - 4.2. LA fonction exponentielle
   - 4.3. LogarithmeS
   - 4.4. Retour sur les fonctions puissances, avec un exposant non rationnel
   - 4.5. Croissances comparées
   - 4.6. Fonctions hyperboliques directes
5. Sommes numériques infinies



Principe mental

Heuristique. Logarithme comme nombre de chiffres

Commençons par une remarque, avec $x = 10^n$, on a
$\frac{\ln(x)}{x} = n10^{-n}\ln 10 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$
Notons que $\ln 10 \approx 2,302$, donc $\ln x = \ln(10) \times \log_{10}(x)$ et que $\log_{10}(x)$ est en première approximation le nombre de chiffres de x, alors pour x grand, $\ln x$ est le nombre de chiffres de x multiplié par un peu plus de 2.
Exemple :
$\ln(123456789) \approx 2,3 \times \log(1,23 \times 10^9) = 2,3 \times (9 + \ln(1,23)) \approx 20$, ce qui est petit



Croissances comparées

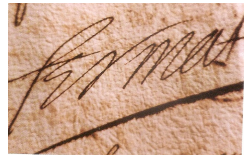
Il s'agit, a priori, de formes indéterminées. Elles sont levées :

Théorème - Croissance comparée

Soient a et b deux réels strictement positifs. On a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^b}{x^a} = 0; \quad \lim_{x\to 0^+} x^a |\ln x|^b = 0;$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{ax}}{x^b} = +\infty; \quad \lim_{x\to-\infty} |x|^b e^{ax} = 0.$$



Croissances comparées

Il s'agit, a priori, de formes indéterminées. Elles sont levées :

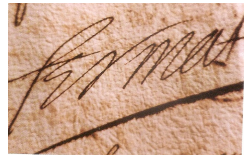
Théorème - Croissance comparée

Soient a et b deux réels strictement positifs. On a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^b}{x^a} = 0; \quad \lim_{x\to 0^+} x^a |\ln x|^b = 0;$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{ax}}{x^b} = +\infty; \quad \lim_{x\to-\infty} |x|^b e^{ax} = 0.$$

Démonstration



Croissances comparées

Il s'agit, a priori, de formes indéterminées. Elles sont levées :

Théorème - Croissance comparée

Soient a et b deux réels strictement positifs. On a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^b}{x^a} = 0; \quad \lim_{x\to 0^+} x^a |\ln x|^b = 0;$$

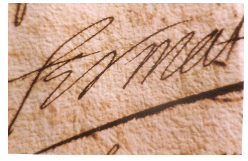
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{ax}}{x^b} = +\infty; \quad \lim_{x\to-\infty} |x|^b e^{ax} = 0.$$

Démonstration

Exercice Fixons $a, b \in \mathbb{R}_+^*$.

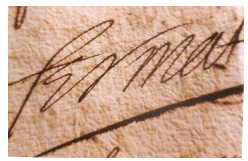
Montrer que pour x grand : $e^{\frac{a}{b+1}x} \geqslant \frac{a}{b+1}x$, en déduire

$$\frac{e^{ax}}{x^b} \geqslant \left(\frac{a}{b+1}\right)^{b+1} x.$$



⇒ Fonctions (exponentielles et) logarithmes
⇒ Trigonométrie hyperbolique

1. Problèmes
2. Fonctions trigonométrique
3. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles
4. Exponentielles et logarithmes
   - 4.1. ExponentielleS
   - 4.2. LA fonction exponentielle
   - 4.3. LogarithmeS
   - 4.4. Retour sur les fonctions puissances, avec un exposant non rationnel
   - 4.5. Croissances comparées
   - 4.6. Fonctions hyperboliques directes
5. Sommes numériques infinies

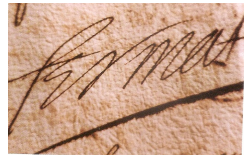


Définitions

Définition - Fonctions hyperboliques

Les fonctions ch (cosinus hyperbolique), sh (sinus hyperbolique) et $\mathrm{þ}$ (tangente hyperbolique) sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\mathrm{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \mathrm{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \mathrm{þ}x = \frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

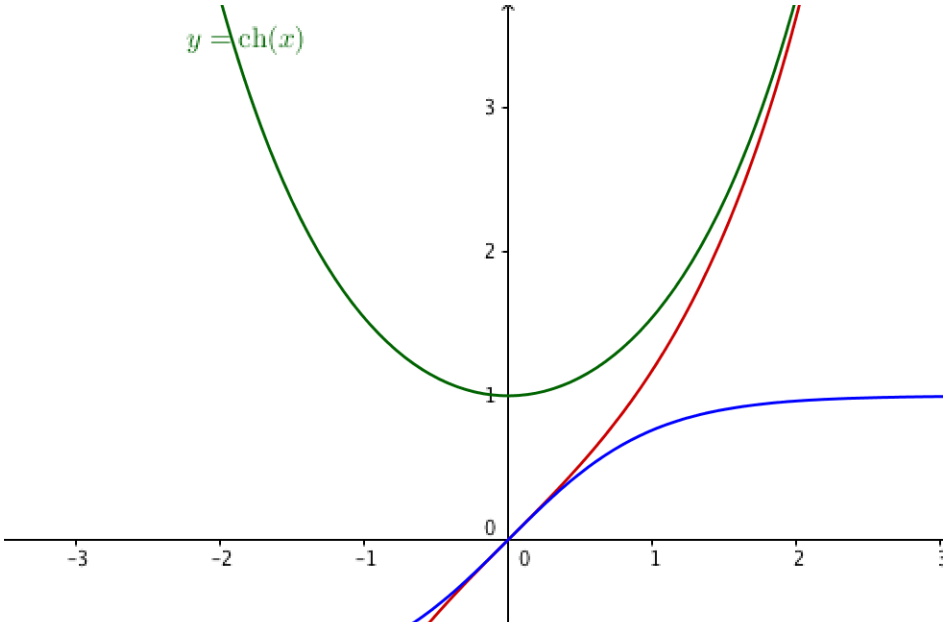


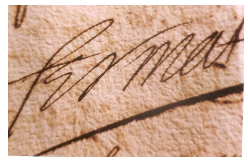
Définitions

Définition - Fonctions hyperboliques

Les fonctions ch (cosinus hyperbolique), sh (sinus hyperbolique) et þ (tangente hyperbolique) sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\mathrm{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \mathrm{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \text{þ}x = \frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$



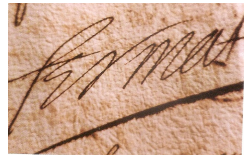


Formulaire

Proposition - Fonctions hyperboliques

La fonction ch est paire, les fonctions sh et $\mathrm{þ}$ sont impaires.

$$\mathrm{ch}(-x) = \mathrm{ch}x \qquad \mathrm{sh}(-x) = -\mathrm{sh}x$$
$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$$
$$\mathrm{ch}x + \mathrm{sh}x = e^x \qquad \mathrm{ch}x - \mathrm{sh}x = e^{-x}$$
$$\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}a\,\mathrm{ch}b + \mathrm{sh}a\,\mathrm{sh}b \qquad \mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{sh}a\,\mathrm{ch}b + \mathrm{ch}a\,\mathrm{sh}b$$
$$\mathrm{th}(a+b) = \frac{\mathrm{th}a + \mathrm{th}b}{1 + \mathrm{th}a \times \mathrm{th}b}$$



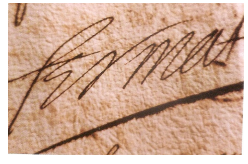
Formulaire

Proposition - Fonctions hyperboliques

La fonction ch est paire, les fonctions sh et $\mathrm{þ}$ sont impaires.

$$\mathrm{ch}(-x) = \mathrm{ch}x \qquad \mathrm{sh}(-x) = -\mathrm{sh}x$$
$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$$
$$\mathrm{ch}x + \mathrm{sh}x = e^x \qquad \mathrm{ch}x - \mathrm{sh}x = e^{-x}$$
$$\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}a\,\mathrm{ch}b + \mathrm{sh}a\,\mathrm{sh}b \qquad \mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{sh}a\,\mathrm{ch}b + \mathrm{ch}a\,\mathrm{sh}b$$
$$\mathrm{th}(a+b) = \frac{\mathrm{th}a + \mathrm{th}b}{1 + \mathrm{th}a \times \mathrm{th}b}$$

Démonstration



Extension du binôme

On commence par une extension de notation :

Définition - Extension du coefficient binomial

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$, on note :

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$



Extension du binôme

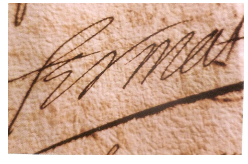
On commence par une extension de notation :

Définition - Extension du coefficient binomial

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$, on note :

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$$

La section suivante donne des résultats connus pour l'essentiel depuis le XVIII siècle, au moins.
Mais les démonstrations satisfaisantes sont plus tardives (ABEL et successeurs du XIX).
Pour vous, elles auront officiellement lieu l'année prochaine lorsque vous verrez le cours sur les séries entières.

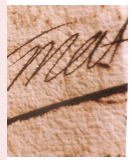


Fonctions comme somme infinie

Proposition - Egalités sommatoires

On a les égalités suivantes :

$x \in ?$	fonction	somme	Auteur (Année)
$\mathbb{R}$	$\sin(x)$	$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$	NEWTON(1669), LEIBNIZ(1691)
$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$	NEWTON(1669), LEIBNIZ(1691)
$\mathbb{R}$	$\tan(x)$	$= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \ldots$	JAC. BERNOULLI(1702)
$[-1,1]$	$\arctan(x)$	$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$	GREGORY(1671), LEIBNIZ(1674)
$[-1,1]$	$\arcsin(x)$	$= x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \ldots$	NEWTON(1669)
$\mathbb{R}$	$(1+x)^n$	$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$	PASCAL(1654)
$]-1,1[$	$(1+x)^\alpha$	$= \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$	NEWTON(1666)
$\mathbb{R}$	$\exp(x)$	$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} x^k$	EULER(1748)
$]-1,1[$	$\ln(1+x)$	$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$	MERCATOR(1668)
$\mathbb{R}$	$\mathrm{sh}(x)$	$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}$	EULER(1748)



Fonctions comme somme infinie

Exercice

Donner l'expression formalisée de $\arcsin(x)$.



Fonctions comme somme infinie

Exercice

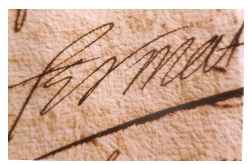
Donner l'expression formalisée de $\arcsin(x)$.

Exercice

On rappelle la formule de MACHIN : $\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$.

Combien de calcul pour obtenir 10 décimales de π satisfaisantes ?

Faites les à la calculatrice



Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions (exponentielles et) logarithmes

⇒ Trigonométrie hyperbolique

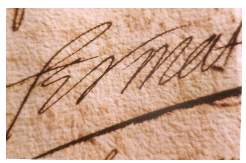


Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions (exponentielles et) logarithmes

- $f(x+y) = f(x) \times f(y) \Rightarrow \exists\, a(= f(1))$ tel que $f : x \mapsto a^x$, continue

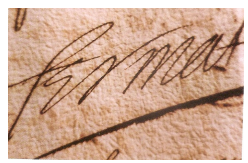


Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions (exponentielles et) logarithmes

- $f(x+y) = f(x) \times f(y) \Rightarrow \exists\, a(= f(1))$ tel que $f : x \mapsto a^x$, continue
- Cas particulier de LA fonction exponentielle où $a = \lim(1 + \frac{1}{n})^n$ (de dérivée égale à 1 en 1)

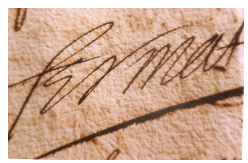


Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions (exponentielles et) logarithmes

- $f(x+y) = f(x) \times f(y) \Rightarrow \exists\, a(= f(1))$ tel que $f : x \mapsto a^x$, continue
- Cas particulier de LA fonction exponentielle où $a = \lim(1 + \frac{1}{n})^n$ (de dérivée égale à 1 en 1)
- Fonctions bijectives donc réciproques : les logarithmes $\lg(a \times b) = \lg(a) + \lg(b)$.

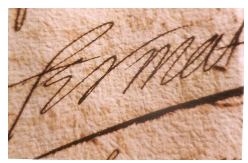


Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions (exponentielles et) logarithmes

- $f(x+y) = f(x) \times f(y) \Rightarrow \exists\, a(= f(1))$ tel que $f : x \mapsto a^x$, continue
- Cas particulier de LA fonction exponentielle où $a = \lim(1 + \frac{1}{n})^n$ (de dérivée égale à 1 en 1)
- Fonctions bijectives donc réciproques : les logarithmes $\lg(a \times b) = \lg(a) + \lg(b)$.
- On a alors $a^x = \exp(x \times \ln(a))$



Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions (exponentielles et) logarithmes



Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions (exponentielles et) logarithmes

⇒ Trigonométrie hyperbolique



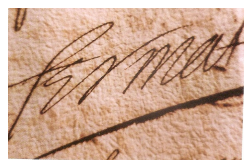
Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions (exponentielles et) logarithmes

⇒ Trigonométrie hyperbolique

- Définitions : $\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ définies sur $\mathbb{R}$



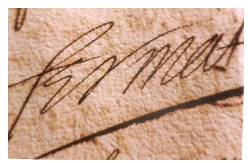
Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions (exponentielles et) logarithmes

⇒ Trigonométrie hyperbolique

- Définitions : $\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ définies sur $\mathbb{R}$
- Puis $\mathrm{th} = \dfrac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}}$ définie sur $\mathbb{R}$



Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions (exponentielles et) logarithmes

⇒ Trigonométrie hyperbolique

- Définitions : $\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ définies sur $\mathbb{R}$
- Puis $\mathrm{th} = \frac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}}$ définie sur $\mathbb{R}$
- Formule de trigonométrie hyperbolique.

Pour la prochaine fois

- Lecture du cours : chapitre 5. Nombres complexes
- Activités sur la majoration
- Exercice N°130 & 132

