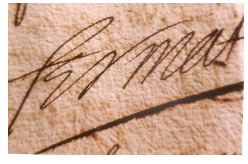


# Leçon 17 - Nombres complexes



**⇒Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$**

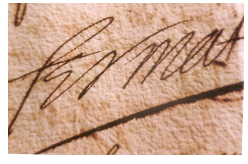
**⇒ Interprétation dans le plan & addition**

**⇒ Points de vue géométrique (distance, angle) & multiplication**

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable
   - 2.1. Racine de polynômes
   - 2.2. Calcul algébrique
   - 2.3. Représentation graphique
   - 2.4. Inégalités

3. Le visionnaire : GAUSS et la multiplication complexe
   - 3.1. Les complexes de module 1
   - 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
   - 3.3. Argument, forme trigonométrique



**⇒Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$**

**⇒ Interprétation dans le plan & addition**

**⇒ Points de vue géométrique (distance, angle) & multiplication**

1. Problèmes

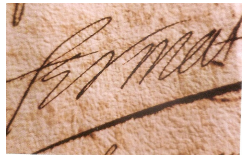
2. EULER : Manipulateur des nombres du diable
   - 2.1. Racine de polynômes
   - 2.2. Calcul algébrique
   - 2.3. Représentation graphique
   - 2.4. Inégalités

3. Le visionnaire : GAUSS et la multiplication complexe
   - 3.1. Les complexes de module 1
   - 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
   - 3.3. Argument, forme trigonométrique



# Problèmes

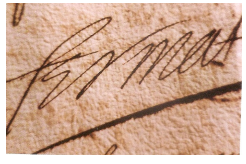
**Problème - Multiplication de nombres**



# Problèmes

**Problème - Multiplication de nombres**

**Problème - Théorème de Napoléon**



# Problèmes

**Problème - Multiplication de nombres**

**Problème - Théorème de Napoléon**

**Problème - Transformation du plan**



# Problèmes

**Problème - Multiplication de nombres**

**Problème - Théorème de Napoléon**

**Problème - Transformation du plan**

**Problème - Application en physique**



**⇒Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$**

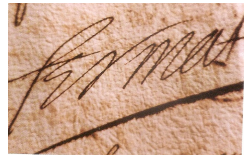
**⇒ Interprétation dans le plan & addition**

**⇒ Points de vue géométrique (distance, angle) & multiplication**

1. Problèmes

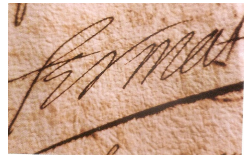
2. EULER : Manipulateur des nombres du diable
   - 2.1. Racine de polynômes
   - 2.2. Calcul algébrique
   - 2.3. Représentation graphique
   - 2.4. Inégalités

3. Le visionnaire : GAUSS et la multiplication complexe
   - 3.1. Les complexes de module 1
   - 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
   - 3.3. Argument, forme trigonométrique



# Historique

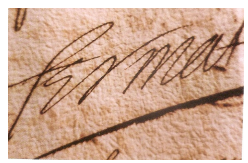
**Analyse** Problème de Cardan (1545)



# Historique

**Analyse** Problème de Cardan (1545)

Les règles de calcul sont données par Raphël Bombelli dans son algebra(1572).
Pendant deux siècles, les mathématiciens se querellent quant à leur existence et leurs emplois.



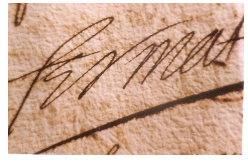
# Historique

**Analyse** Problème de Cardan (1545)

Les règles de calcul sont données par Raphël Bombelli dans son algebra(1572).
Pendant deux siècles, les mathématiciens se querellent quant à leur existence et leurs emplois.

Exercice

On reprend un exercice historique de Bombelli.
En reprenant les règles classiques de calcul, évaluer $(2+\sqrt{-1})^3$.
En employant les formules de Cardan, trouver les racines de $x^3 = 15x + 4$.



**⇒Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$**

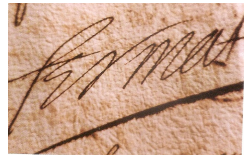
**⇒ Interprétation dans le plan & addition**

**⇒ Points de vue géométrique (distance, angle) & multiplication**

1. Problèmes

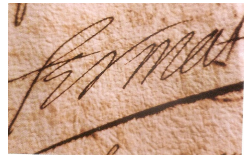
2. EULER : Manipulateur des nombres du diable
   - 2.1. Racine de polynômes
   - 2.2. Calcul algébrique
   - 2.3. Représentation graphique
   - 2.4. Inégalités

3. Le visionnaire : GAUSS et la multiplication complexe
   - 3.1. Les complexes de module 1
   - 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
   - 3.3. Argument, forme trigonométrique



# Notation

Euler invente la notation $i$ bien pratique et les manipule avec précision. Il écrit à Diderot : « $e^{i\pi} = -1$ donc Dieu existe ».

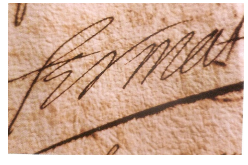


# Notation

Euler invente la notation $i$ bien pratique et les manipule avec précision. Il écrit à Diderot : « $e^{i\pi} = -1$ donc Dieu existe ».

**Remarque** Unicité

Un complexe est un « nombre » $z$ qui s'écrit $z = a + ib$ où $i^2 = -1$



# Notation

Euler invente la notation $i$ bien pratique et les manipule avec précision. Il écrit à Diderot : « $e^{i\pi} = -1$ donc Dieu existe ».

**Remarque** Unicité

Un complexe est un « nombre » $z$ qui s'écrit $z = a + ib$ où $i^2 = -1$

## Définition - Notation de nombre complexe

Soit $z = a + ib$ un complexe ($a$ et $b$ sont des réels).

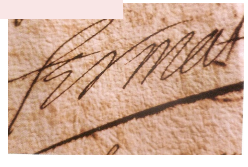
$a = \mathbf{Re}\, z$ s'appelle la **partie réelle** de $z$.

$b = \mathbf{Im}\, z$ s'appelle la **partie imaginaire** de $z$ ;

*$z$ est dit* **imaginaire pur** *($z \in i\mathbb{R}$) si sa partie réelle est nulle.*

$\overline{z} = a - ib$ s'appelle le **conjugué** de $z = a + ib$.

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ s'appelle le **module** de $z$.



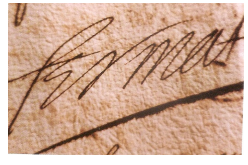
# Calcul dans $\mathbb{C}$

Notons tout de suite comment se comportent les calculs habituelles : addition et multiplication dans $\mathbb{C}$ (il s'agit presque de définitions ici. . .).

## Proposition - $\mathbb{C}$ est un corps

Pour tout $(z,z') \in \mathbb{C}^2$, $\lambda,\lambda' \in \mathbb{R}$,

- $\mathbf{Re}(\lambda z+\lambda' z') = \lambda \mathbf{Re}(z)+\lambda' \mathbf{Re}(z')$ (*la partie réelle est $\mathbb{R}$-linéaire sur $\mathbb{C}$*)
- $\mathbf{Im}(\lambda z+\lambda' z') = \lambda \mathbf{Im}(z)+\lambda' \mathbf{Im}(z')$ (*la partie imaginaire est $\mathbb{R}$-linéaire sur $\mathbb{C}$*)
- si $z = a+ib$ et $z' = a'+ib'$, alors $z\times z' = (aa'-bb')+i(ab'+a'b)$
  En particulier $z\times\overline{z} = a^2+b^2 = |z|^2 = |\overline{z}|^2$, donc $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.



# Calcul dans $\mathbb{C}$

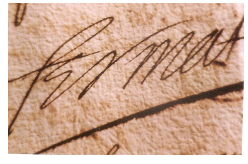
Notons tout de suite comment se comportent les calculs habituelles : addition et multiplication dans $\mathbb{C}$ (il s'agit presque de définitions ici. . .).

## Proposition - $\mathbb{C}$ est un corps

Pour tout $(z,z') \in \mathbb{C}^2$, $\lambda,\lambda' \in \mathbb{R}$,

- $\mathbf{Re}(\lambda z+\lambda' z') = \lambda \mathbf{Re}(z)+\lambda' \mathbf{Re}(z')$ (*la partie réelle est $\mathbb{R}$-linéaire sur $\mathbb{C}$*)
- $\mathbf{Im}(\lambda z+\lambda' z') = \lambda \mathbf{Im}(z)+\lambda' \mathbf{Im}(z')$ (*la partie imaginaire est $\mathbb{R}$-linéaire sur $\mathbb{C}$*)
- si $z = a+ib$ et $z' = a'+ib'$, alors $z\times z' = (aa'-bb')+i(ab'+a'b)$
  En particulier $z\times\overline{z} = a^2+b^2 = |z|^2 = |\overline{z}|^2$, donc $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.

**Remarque** Importance du conjugué



# Calcul dans $\mathbb{C}$

Notons tout de suite comment se comportent les calculs habituelles : addition et multiplication dans $\mathbb{C}$ (il s'agit presque de définitions ici. . .).

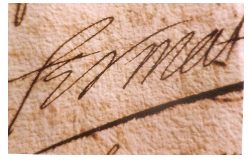
## Proposition - $\mathbb{C}$ est un corps

Pour tout $(z,z') \in \mathbb{C}^2$, $\lambda,\lambda' \in \mathbb{R}$,

- $\mathbf{Re}(\lambda z+\lambda' z') = \lambda \mathbf{Re}(z)+\lambda' \mathbf{Re}(z')$ (*la partie réelle est $\mathbb{R}$-linéaire sur $\mathbb{C}$*)
- $\mathbf{Im}(\lambda z+\lambda' z') = \lambda \mathbf{Im}(z)+\lambda' \mathbf{Im}(z')$ (*la partie imaginaire est $\mathbb{R}$-linéaire sur $\mathbb{C}$*)
- si $z = a+ib$ et $z' = a'+ib'$, alors $z\times z' = (aa'-bb')+i(ab'+a'b)$
  En particulier $z\times\overline{z} = a^2+b^2 = |z|^2 = |\overline{z}|^2$, donc $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.

**Remarque** Importance du conjugué

**Démonstration**



# Conjugaison

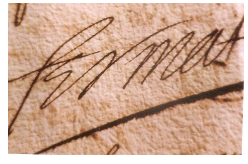
## Proposition - Conjugaison

On a les propriétés du conjugué :

$$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2, \forall a \in \mathbb{R}, \quad \overline{\overline{z}} = z \qquad \overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$$

$$\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'} \Rightarrow \overline{az} = a\overline{z} \qquad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$$

$$\mathbf{Re}\, z = \frac{z+\overline{z}}{2} \qquad \mathbf{Im}\, z = \frac{z-\overline{z}}{2i}$$



# Conjugaison

## Proposition - Conjugaison

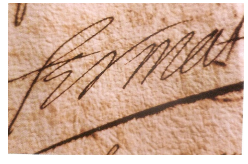
On a les propriétés du conjugué :

$$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2, \forall a \in \mathbb{R}, \quad \overline{\overline{z}} = z \qquad \overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$$

$$\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'} \Rightarrow \overline{az} = a\overline{z} \qquad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$$

$$\mathbf{Re}\, z = \frac{z+\overline{z}}{2} \qquad \mathbf{Im}\, z = \frac{z-\overline{z}}{2i}$$

**Démonstration**



# Conjugaison et puissance

## Proposition - Puissance et conjugaison

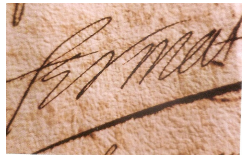
On définit les puissances d'un nombre complexe par

$$\begin{cases} z^0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, z^{n+1} = z^n z \end{cases}$$

On a alors $\forall n \in \mathbb{N}, \overline{z^n} = \overline{z}^n$.

Pour $z \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $z^{-n} = \dfrac{1}{z^n} = (z^n)^{-1}$, on a alors

$\forall n \in \mathbb{Z}, \overline{z^n} = \overline{z}^n$.



# Conjugaison et puissance

## Proposition - Puissance et conjugaison

On définit les puissances d'un nombre complexe par

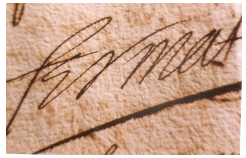
$$\begin{cases} z^0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, z^{n+1} = z^n z \end{cases}$$

On a alors $\forall n \in \mathbb{N}, \overline{z^n} = \overline{z}^n$.

Pour $z \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $z^{-n} = \dfrac{1}{z^n} = (z^n)^{-1}$, on a alors

$\forall n \in \mathbb{Z}, \overline{z^n} = \overline{z}^n$.

Exercice Faire la démonstration



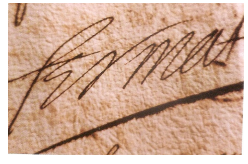
# Module

## Propriété - Propriétés du module

On a les propriétés du module :

$$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2, \forall\ a \in \mathbb{R} \quad |z| = \sqrt{z\overline{z}} \qquad |zz'| = |z|\,|z'| \Rightarrow |az| = a|z|$$

$$|z| = |\overline{z}| = |-z| \qquad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \text{ (si } z' \neq 0)$$



# Module

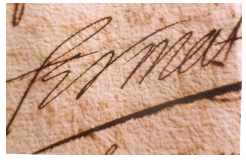
## Propriété - Propriétés du module

On a les propriétés du module :

$$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2, \forall\ a \in \mathbb{R} \quad |z| = \sqrt{z\overline{z}} \qquad |zz'| = |z|\,|z'| \Rightarrow |az| = a|z|$$

$$|z| = |\overline{z}| = |-z| \qquad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \text{ (si } z' \neq 0)$$

**Démonstration**



# Module

## Propriété - Propriétés du module

On a les propriétés du module :

$$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2, \forall\ a \in \mathbb{R} \quad |z| = \sqrt{z\overline{z}} \qquad |zz'| = |z|\,|z'| \Rightarrow |az| = a|z|$$

$$|z| = |\overline{z}| = |-z| \qquad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \text{ (si } z' \neq 0)$$

**Démonstration**

**Remarque** Valeur absolue et module



**⇒Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$**

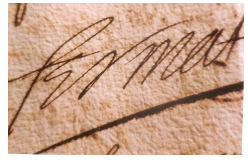
**⇒ Interprétation dans le plan & addition**

**⇒ Points de vue géométrique (distance, angle) & multiplication**

1. Problèmes

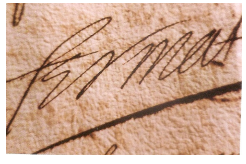
2. EULER : Manipulateur des nombres du diable
   - 2.1. Racine de polynômes
   - 2.2. Calcul algébrique
   - 2.3. Représentation graphique
   - 2.4. Inégalités

3. Le visionnaire : GAUSS et la multiplication complexe
   - 3.1. Les complexes de module 1
   - 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
   - 3.3. Argument, forme trigonométrique



# Affixe

On munit le plan d'un repère orthonormé direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$. Le point $M$ de coordonnées $(a, b)$ caractérisé par $\vec{OM} = a\vec{u} + b\vec{v}$, peut alors être représenté par le complexe $z = a + ib$.

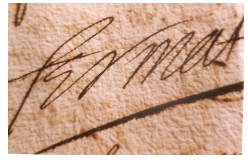


# Affixe

On munit le plan d'un repère orthonormé direct $(0,\vec{u},\vec{v})$. Le point $M$ de coordonnées $(a,b)$ caractérisé par $\vec{OM} = a\vec{u} + b\vec{v}$, peut alors être représenté par le complexe $z = a + ib$.

## Définition - Affixe d'un point. Affixe d'un vecteur

$z = a + ib$ est alors appelé **affixe** du point $M(a,b)$, on peut noter $z = \text{Aff}(M)$.
Réciproquement, le point $M$ est appelé (point) image de $z$.
De même, si $\vec{w}$ est un vecteur de coordonnées $(a,b)$, $a + ib$ est appelé affixe de $\vec{w}$ (noté $\text{Aff}(\vec{w})$), lui-même appelé (vecteur) image du complexe $a + ib$.



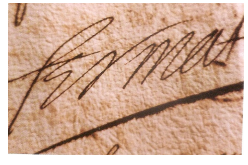
# Affixe

On munit le plan d'un repère orthonormé direct $(0,\vec{u},\vec{v})$. Le point $M$ de coordonnées $(a,b)$ caractérisé par $\vec{OM} = a\vec{u} + b\vec{v}$, peut alors être représenté par le complexe $z = a + ib$.

## Définition - Affixe d'un point. Affixe d'un vecteur

$z = a + ib$ est alors appelé **affixe** du point $M(a,b)$, on peut noter $z = \text{Aff}(M)$.
Réciproquement, le point $M$ est appelé (point) image de $z$.
De même, si $\vec{w}$ est un vecteur de coordonnées $(a,b)$, $a + ib$ est appelé affixe de $\vec{w}$ (noté $\text{Aff}(\vec{w})$), lui-même appelé (vecteur) image du complexe $a + ib$.

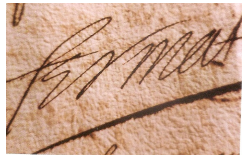
**Remarque** Axes



# Géométrie et $\mathbb{C}$

## Proposition - Opération complexe et correspondance sur le plan géométrique

Si $z$ est l'affixe de $M$ alors $\overline{z}$ est l'affixe du symétrique de $M$ par rapport à l'axe des abscisses.
Si $z = \text{Aff}(M)$ alors $|z|$ est égal à la distance $OM$.
Si $z = \text{Aff}(M)$ et $z_0 = \text{Aff}(M_0)$, alors $\text{Aff}(\vec{M_0M}) = z - z_0$ et $|z - z_0| = M_0M$



**⇒Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$**

**⇒ Interprétation dans le plan & addition**

**⇒ Points de vue géométrique (distance, angle) & multiplication**

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable
   - 2.1. Racine de polynômes
   - 2.2. Calcul algébrique
   - 2.3. Représentation graphique
   - 2.4. Inégalités

3. Le visionnaire : GAUSS et la multiplication complexe
   - 3.1. Les complexes de module 1
   - 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
   - 3.3. Argument, forme trigonométrique



# Inégalités

## Théorème - Inégalités

Pour $(z,z') \in \mathbb{C}^2$, on a les inégalités suivantes :

$\mathbf{Re}z (\leqslant |\mathbf{Re}\, z|) \leqslant |z|$ avec égalité si et seulement si $z \in \mathbb{R}^+$

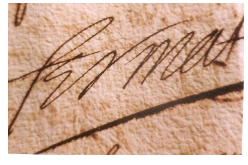
$\mathbf{Im}z (\leqslant |\mathbf{Im}\, z|) \leqslant |z|$ avec égalité si et seulement si $z \in i\mathbb{R}^+$

$\Big||z|-|z'|\Big| \leqslant |z+z'| \leqslant |z|+|z'|$ **(Inégalité triangulaire)**

Avec égalité dans l'inégalité de droite

si et seulement si

$z'=0$ ou il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $z=\lambda z'$ ($z,z'$ positivement liés).



# Inégalités

## Théorème - Inégalités

Pour $(z,z')\in\mathbb{C}^2$, on a les inégalités suivantes :

$\mathbf{Re}z(\leqslant|\mathbf{Re}\,z|)\leqslant|z|$ avec égalité si et seulement si $z\in\mathbb{R}^+$

$\mathbf{Im}z(\leqslant|\mathbf{Im}\,z|)\leqslant|z|$ avec égalité si et seulement si $z\in i\mathbb{R}^+$

$\Big||z|-|z'|\Big|\leqslant|z+z'|\leqslant|z|+|z'|$ **(Inégalité triangulaire)**

Avec égalité dans l'inégalité de droite

si et seulement si

$z'=0$ ou il existe $\lambda\in\mathbb{R}^+$ tel que $z=\lambda z'$ ($z,z'$ positivement liés).

## Attention. Module ou valeur absolue ?

Il y a des modules et des valeurs absolues partout ici !



# Inégalités

## Théorème - Inégalités

Pour $(z,z')\in\mathbb{C}^2$, on a les inégalités suivantes :

$\mathbf{Re}z(\leqslant|\mathbf{Re}\,z|)\leqslant|z|$ avec égalité si et seulement si $z\in\mathbb{R}^+$

$\mathbf{Im}z(\leqslant|\mathbf{Im}\,z|)\leqslant|z|$ avec égalité si et seulement si $z\in i\mathbb{R}^+$

$\Big||z|-|z'|\Big|\leqslant|z+z'|\leqslant|z|+|z'|$ **(Inégalité triangulaire)**

Avec égalité dans l'inégalité de droite

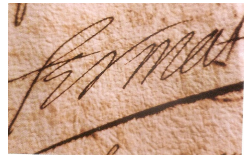
si et seulement si

$z'=0$ ou il existe $\lambda\in\mathbb{R}^+$ tel que $z=\lambda z'$ ($z,z'$ positivement liés).

## Attention. Module ou valeur absolue ?

Il y a des modules et des valeurs absolues partout ici !

**Analyse** Interprétation de l'inégalité triangulaire



# Inégalités

## Théorème - Inégalités

Pour $(z,z')\in\mathbb{C}^2$, on a les inégalités suivantes :

$\mathbf{Re}z(\leqslant|\mathbf{Re}\,z|)\leqslant|z|$ avec égalité si et seulement si $z\in\mathbb{R}^+$

$\mathbf{Im}z(\leqslant|\mathbf{Im}\,z|)\leqslant|z|$ avec égalité si et seulement si $z\in i\mathbb{R}^+$

$\Big||z|-|z'|\Big|\leqslant|z+z'|\leqslant|z|+|z'|$ **(Inégalité triangulaire)**

Avec égalité dans l'inégalité de droite

si et seulement si

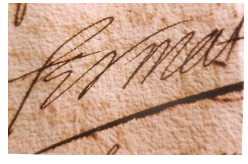
$z'=0$ ou il existe $\lambda\in\mathbb{R}^+$ tel que $z=\lambda z'$ ($z,z'$ positivement liés).

## Attention. Module ou valeur absolue ?

Il y a des modules et des valeurs absolues partout ici !

**Analyse** Interprétation de l'inégalité triangulaire

**Démonstration**



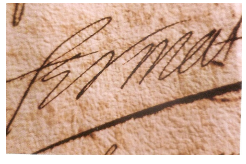
# Inégalités

Par récurrence :

## Proposition - Inégalités

Pour $n$ complexes $z_1,\dots,z_n$ on a

$$|z_1+\cdots+z_n| \leqslant |z_1|+\cdots+|z_n|.$$



# Inégalités

Par récurrence :

## Proposition - Inégalités

Pour $n$ complexes $z_1,\dots,z_n$ on a

$$|z_1+\cdots+z_n| \leqslant |z_1|+\cdots+|z_n|.$$

## Proposition - Caractérisation des complexes remarquables

$$z=0 \Leftrightarrow |z|=0 \Leftrightarrow \mathbf{Re}\, z = \mathbf{Im}\, z = 0$$

$$z\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathbf{Im}\, z = 0 \Leftrightarrow \overline{z}=z \Leftrightarrow |z|^2 = (\mathbf{Re}\, z)^2$$

$$z\in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathbf{Re}\, z = 0 \Leftrightarrow \overline{z}=-z \Leftrightarrow |z|^2 = (\mathbf{Im}\, z)^2$$



**⇒Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$**

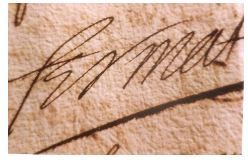
**⇒ Interprétation dans le plan & addition**

**⇒ Points de vue géométrique (distance, angle) & multiplication**

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable
   - 2.1. Racine de polynômes
   - 2.2. Calcul algébrique
   - 2.3. Représentation graphique
   - 2.4. Inégalités

3. Le visionnaire : GAUSS et la multiplication complexe
   - 3.1. Les complexes de module 1
   - 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
   - 3.3. Argument, forme trigonométrique



# Groupe unitaire

En 1800, les mathématiciens manipulent les nombres complexes, mais ces nombres manquent de légitimité.
C'est Gauss qui les justifie géométriquement sur $\mathbb{R}^2$ (Argand et Wessel semblent, chacun de leur côté, avoir eu la même idée).



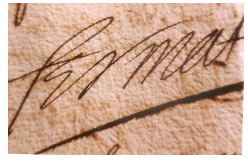
# Groupe unitaire

En 1800, les mathématiciens manipulent les nombres complexes, mais ces nombres manquent de légitimité.
C'est Gauss qui les justifie géométriquement sur $\mathbb{R}^2$ (Argand et Wessel semblent, chacun de leur côté, avoir eu la même idée).

## Définition - Groupe unitaire

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module $1$, c'est aussi le cercle unité de $\mathbb{C}$, ensemble des affixes des points du cercle trigonométrique

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid , |z| = 1\}.$$



# Groupe unitaire

En 1800, les mathématiciens manipulent les nombres complexes, mais ces nombres manquent de légitimité.
C'est Gauss qui les justifie géométriquement sur $\mathbb{R}^2$ (Argand et Wessel semblent, chacun de leur côté, avoir eu la même idée).

## Définition - Groupe unitaire

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module $1$, c'est aussi le cercle unité de $\mathbb{C}$, ensemble des affixes des points du cercle trigonométrique

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid , |z| = 1\}.$$

## Proposition - Conjugaison sur $\mathbb{U}$

$$\forall (z,z') \in \mathbb{U}^2, zz' \in \mathbb{U}, \qquad \forall z \in \mathbb{U}, \overline{z} = \frac{1}{z} \in \mathbb{U}.$$

On dit que l'ensemble $\mathbb{U}$ muni de l'opération multiplication est un groupe commutatif.



# Groupe unitaire

En 1800, les mathématiciens manipulent les nombres complexes, mais ces nombres manquent de légitimité.
C'est Gauss qui les justifie géométriquement sur $\mathbb{R}^2$ (Argand et Wessel semblent, chacun de leur côté, avoir eu la même idée).

## Définition - Groupe unitaire

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module $1$, c'est aussi le cercle unité de $\mathbb{C}$, ensemble des affixes des points du cercle trigonométrique

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid , |z| = 1\}.$$

## Proposition - Conjugaison sur $\mathbb{U}$

$$\forall (z,z') \in \mathbb{U}^2, zz' \in \mathbb{U}, \qquad \forall z \in \mathbb{U}, \overline{z} = \frac{1}{z} \in \mathbb{U}.$$

On dit que l'ensemble $\mathbb{U}$ muni de l'opération multiplication est un groupe commutatif.



**Démonstration**

# Interprétation géométrique du calcul $u \times z$ pour $u \in \mathbb{U}$ et $z \in \mathbb{C}$

**Analyse** Géométrique

Soit $u \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$ et $z \in \mathbb{C}$. Considérons les 4 points du plan $A(1)$, $B(u) \neq A$, $C(z)$ et $D(u \times z)$.

Alors $AC = |z - 1|$ et $BD = |uz - u| = |u| \times |z - 1| = AC$.



# Interprétation géométrique du calcul $u \times z$ pour $u \in \mathbb{U}$ et $z \in \mathbb{C}$

**Analyse** Géométrique

Soit $u \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$ et $z \in \mathbb{C}$. Considérons les 4 points du plan $A(1)$, $B(u) \neq A$, $C(z)$ et $D(u \times z)$.

Alors $AC = |z-1|$ et $BD = |uz-u| = |u| \times |z-1| = AC$.

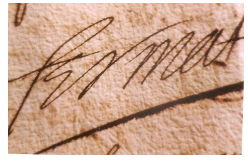
## Définition - Argument de $u \in \mathbb{U}$, de $z \in \mathbb{C}$

Soit $u \in \mathbb{U}$. On note $I$, le point du plan d'affixe 1 et $M$ celui d'affixe $u$.

On appelle argument de $u \in \mathbb{U}$ noté $\arg(u)$, l'angle (principal) $(\vec{OI}, \vec{OM})$.

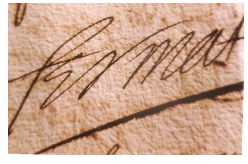
Dans un premier temps, on note $\measuredangle\theta$ ce nombre complexe de module 1 et d'argument $\theta$.

On a alors $u = \cos\theta + i\sin\theta$, pour $\theta \equiv \mathrm{Arg}(u)$.



# Extension pour $\theta \notin [0, \frac{\pi}{2}]$

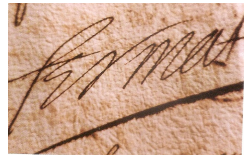
**Remarque**



# Extension pour $\theta \notin [0, \frac{\pi}{2}]$

**Remarque**

**Démonstration**



# Extension pour $\theta \notin [0, \frac{\pi}{2}]$

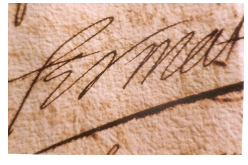
**Remarque**

**Démonstration**

## Proposition - Multiplication par $u \in \mathbb{U}$

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $u \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$.
Notons $\theta = \arg(u)$.
Alors $u \times z$ est l'affixe du point obtenu par rotation de centre $0$ et d'angle $\theta$, à partir du point d'affixe $z$

La démonstration dans l'analyse



# Extension pour $\theta \notin [0, \frac{\pi}{2}]$

**Remarque**

**Démonstration**

## Proposition - Multiplication par $u \in \mathbb{U}$

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $u \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$.
Notons $\theta = \arg(u)$.
Alors $u \times z$ est l'affixe du point obtenu par rotation de centre $0$ et d'angle $\theta$, à partir du point d'affixe $z$

La démonstration dans l'analyse

## Attention. Mauvaise définition de l'argument

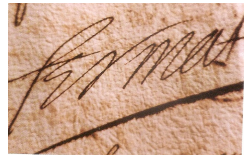
La définition donnée ici est peu satisfaisante ; avec un argument principal, on n'a pas nécessairement $\mathrm{Arg} zz' = \mathrm{Arg} z + \mathrm{Arg} z'$, mais seulement des congruences.



# Notation exponentielle

## Corollaire - Propriété de $e^i$

Pour tout $\theta,\theta' \in \mathbb{R}$, $\measuredangle\theta \times \measuredangle\theta' = \measuredangle(\theta+\theta')$.

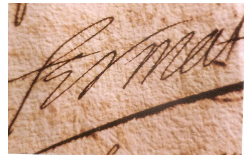


# Notation exponentielle

## Corollaire - Propriété de $e^i$

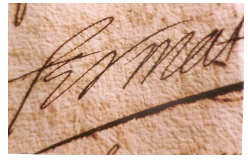
Pour tout $\theta,\theta' \in \mathbb{R}$, $\measuredangle\theta \times \measuredangle\theta' = \measuredangle(\theta+\theta')$.

**Démonstration**



# Une (première) classe d'équivalence

**Analyse** - Non injectivité

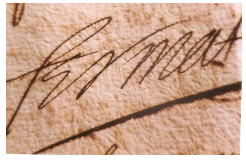


# Une (première) classe d'équivalence

**Analyse** - Non injectivité

## Définition et propriété - Argument de $z$

Pour tout $z \in \mathbb{U}$, on note $\arg(z) = \{\mathrm{Arg}(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, on le considère *comme* un nombre.
Pour tout $z, z' \in \mathbb{U}$, $\arg(z \times z') = \arg z + \arg z'$ (addition d'ensembles) ou de manière équivalente) : $\mathrm{Arg}(z \times z') \equiv \mathrm{Arg}z + \mathrm{Arg}z'[2\pi]$.



# Une (première) classe d'équivalence

**Analyse** - Non injectivité

## Définition et propriété - Argument de $z$

Pour tout $z \in \mathbb{U}$, on note $\arg(z) = \{\mathrm{Arg}(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, on le considère *comme* un nombre.
Pour tout $z, z' \in \mathbb{U}$, $\arg(z \times z') = \arg z + \arg z'$ (addition d'ensembles) ou de manière équivalente) : $\mathrm{Arg}(z \times z') \equiv \mathrm{Arg}z + \mathrm{Arg}z'[2\pi]$.

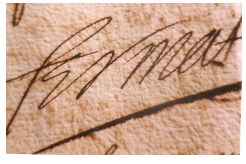
**Démonstration**



# Notation d'Euler

## Définition - Notation d'Euler

Nous verrons/avons vu que dans le cas réel, on appelle exponentielle les fonctions qui vérifient $f(a+b) = f(a) \times f(b)$.
Elles s'écrivent (dans le cas réel) sous la forme $x \mapsto A^x$ où $A = f(1)$.
Par uniformité de notation, suivant L. Euler, on notera maintenant
$e^{i\theta} = \measuredangle\theta = \cos\theta + i\sin\theta$



# Notation d'Euler

## Définition - Notation d'Euler

Nous verrons/avons vu que dans le cas réel, on appelle exponentielle les fonctions qui vérifient $f(a+b)=f(a)\times f(b)$.
Elles s'écrivent (dans le cas réel) sous la forme $x\mapsto A^x$ où $A=f(1)$.
Par uniformité de notation, suivant L. Euler, on notera maintenant
$e^{i\theta}=\measuredangle\theta=\cos\theta+i\sin\theta$

On a alors, plus globalement :

## Théorème - Propriétés

Soient $(\theta,\theta')\in\mathbb{R}^2$. On a :

$$e^{i(\theta+\theta')}=e^{i\theta}e^{i\theta'} \qquad \overline{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}=\frac{1}{e^{i\theta}}$$

$$e^{i\frac{\pi}{2}}=i \qquad e^{i\pi}=-1$$

$$e^{i\theta}=1\Leftrightarrow\theta\equiv 0[2\pi]\Leftrightarrow\theta\in 2\pi\mathbb{Z} \qquad e^{i\theta}=e^{i\theta'}\Leftrightarrow\theta\equiv\theta'[2\pi]$$



# Notation d'Euler

## Définition - Notation d'Euler

Nous verrons/avons vu que dans le cas réel, on appelle exponentielle les fonctions qui vérifient $f(a+b)=f(a)\times f(b)$.
Elles s'écrivent (dans le cas réel) sous la forme $x\mapsto A^x$ où $A=f(1)$.
Par uniformité de notation, suivant L. Euler, on notera maintenant
$e^{i\theta}=\measuredangle\theta=\cos\theta+i\sin\theta$

On a alors, plus globalement :

## Théorème - Propriétés

Soient $(\theta,\theta')\in\mathbb{R}^2$. On a :

$$e^{i(\theta+\theta')}=e^{i\theta}e^{i\theta'} \qquad \overline{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}=\frac{1}{e^{i\theta}}$$

$$e^{i\frac{\pi}{2}}=i \qquad e^{i\pi}=-1$$

$$e^{i\theta}=1\Leftrightarrow\theta\equiv 0[2\pi]\Leftrightarrow\theta\in 2\pi\mathbb{Z} \qquad e^{i\theta}=e^{i\theta'}\Leftrightarrow\theta\equiv\theta'[2\pi]$$



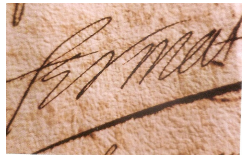
**Démonstration**

# Formule de Regionmontanus

## Corollaire - Formule d'additions trigonométriques

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$



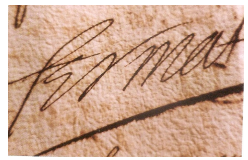
# Formule de Regionmontanus

## Corollaire - Formule d'additions trigonométriques

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

**Démonstration**



# Formule de Regionmontanus

## Corollaire - Formule d'additions trigonométriques

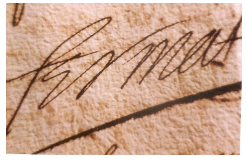
Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

**Démonstration**

Exercice

En déduire les formules donnant $\cos(a-b)$ et $\sin(a-b)$.



**⇒Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$**

**⇒ Interprétation dans le plan & addition**

**⇒ Points de vue géométrique (distance, angle) & multiplication**

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable
   - 2.1. Racine de polynômes
   - 2.2. Calcul algébrique
   - 2.3. Représentation graphique
   - 2.4. Inégalités

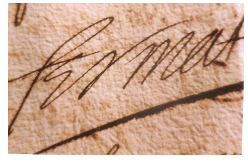
3. Le visionnaire : GAUSS et la multiplication complexe
   - 3.1. Les complexes de module 1
   - 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
   - 3.3. Argument, forme trigonométrique



# Formule d'Euler

## Proposition - Formules d'Euler

$$\cos\theta = \mathbf{Re}(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \quad , \quad \sin\theta = \mathbf{Im}(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}.$$



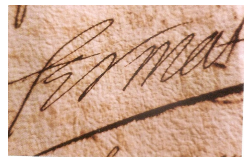
# Formule d'Euler

## Proposition - Formules d'Euler

$$\cos\theta = \mathbf{Re}(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \quad , \quad \sin\theta = \mathbf{Im}(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}.$$

Exercice

Calculer $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$, en déduire une expression de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$.



# Formule de (de) Moivre

## Proposition - Formule de Moivre

$$\forall n \in \mathbb{Z}, (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

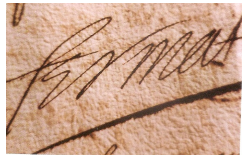


# Formule de (de) Moivre

## Proposition - Formule de Moivre

$$\forall n \in \mathbb{Z}, (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$
$$\forall n \in \mathbb{Z}, (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

**Démonstration**



# Factorisation

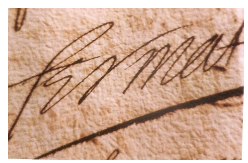
## Trucs et astuces pour le calcul. Factorisation de l'angle moitié

Lorsqu'on rencontre un expression de la forme $e^i a \pm e^i b$ ($a, b$ réels), il faut toujours penser à factoriser par la moitié :

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \quad , \quad b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}$$

Cela donne : $e^{ia} \pm e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}} \left( e^{i\frac{a-b}{2}} \pm e^{-i\frac{a-b}{2}} \right)$

Et on applique les formules d'Euler



# Factorisation

## Trucs et astuces pour le calcul. Factorisation de l'angle moitié

Lorsqu'on rencontre un expression de la forme $e^i a \pm e^i b$ ($a, b$ réels), il faut toujours penser à factoriser par la moitié :

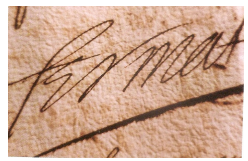
$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \quad , \quad b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}$$

Cela donne : $e^{ia} \pm e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}} \left( e^{i\frac{a-b}{2}} \pm e^{-i\frac{a-b}{2}} \right)$

Et on applique les formules d'Euler

Exercice

Factoriser $1 + e^{i\theta}$ et $1 - e^{i\theta}$. Retrouver les formules donnant $1 \pm \cos\theta$



# Factorisation

## Trucs et astuces pour le calcul. Factorisation de l'angle moitié

Lorsqu'on rencontre un expression de la forme $e^i a \pm e^i b$ ($a, b$ réels), il faut toujours penser à factoriser par la moitié :

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \quad , \quad b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}$$

Cela donne : $e^{ia} \pm e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}} \left( e^{i\frac{a-b}{2}} \pm e^{-i\frac{a-b}{2}} \right)$

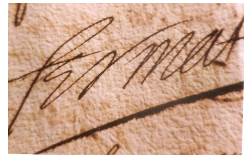
Et on applique les formules d'Euler

Exercice

Factoriser $1 + e^{i\theta}$ et $1 - e^{i\theta}$. Retrouver les formules donnant $1 \pm \cos\theta$

Exercice

Nouveau calcul de $\sum_{k=0}^{n} \cos kt$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin kt$



# Linéarisation

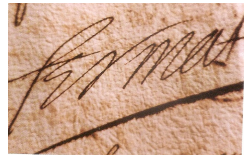
## Savoir-faire. Linéarisation

Il s'agit d'exprimer $\cos^n\theta$ ou $\sin^n\theta$ sous forme d'une somme de $\cos k\theta$ ou $\sin k\theta$

*(il ne doit plus y avoir de puissances ni de produits de cosinus ou sinus)*.

- Ecrire $\cos^n\theta = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^n$.
- Développer avec la formule du binôme.
- Regrouper les termes conjugués pour faire apparaître des cosinus ou des sinus.

Si il n'y a pas de faute de calculs, vous devez obtenir un nombre réel : **donc simplification des $i$...**



# Linéarisation

## Savoir-faire. Linéarisation

Il s'agit d'exprimer $\cos^n\theta$ ou $\sin^n\theta$ sous forme d'une somme de $\cos k\theta$ ou $\sin k\theta$

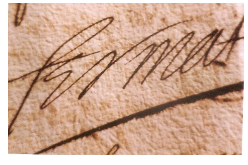
*(il ne doit plus y avoir de puissances ni de produits de cosinus ou sinus)*.

- Ecrire $\cos^n\theta = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^n$.
- Développer avec la formule du binôme.
- Regrouper les termes conjugués pour faire apparaître des cosinus ou des sinus.

Si il n'y a pas de faute de calculs, vous devez obtenir un nombre réel : **donc simplification des $i$...**

Exercice

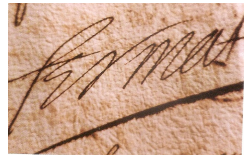
Linéariser $\cos^3\theta$, $\sin^4\theta$.



# $\cos(nt)$ ou $\sin(nt)$ en polynôme de $\cos t$ et $\sin t$

## Savoir-faire. Expressions de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos t$ et $\sin t$

- Ecrire $\cos(nt) = \mathbf{Re}(e^{int}) = \mathbf{Re}[(e^{it})^n]$ ou $\sin(nt) = \mathbf{Im}[(e^{it})^n]$.
- Utiliser la formule du binôme pour calculer $(e^{it})^n = (\cos t + i \sin t)^n$.
- Récupérer la partie réelle (ou imaginaire) en séparant les indices pairs des indices impairs.



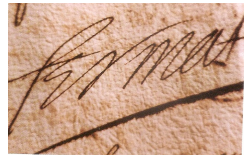
# $\cos(nt)$ ou $\sin(nt)$ en polynôme de $\cos t$ et $\sin t$

## Savoir-faire. Expressions de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos t$ et $\sin t$

- Ecrire $\cos(nt) = \mathbf{Re}(e^{int}) = \mathbf{Re}[(e^{it})^n]$ ou $\sin(nt) = \mathbf{Im}[(e^{it})^n]$.
- Utiliser la formule du binôme pour calculer $(e^{it})^n = (\cos t + i \sin t)^n$.
- Récupérer la partie réelle (ou imaginaire) en séparant les indices pairs des indices impairs.

Exercice

Ecrire $\cos 3t$ en fonction des puissances de $\cos t$, $\sin 3t$ comme le produit de $\sin t$ et d'une expression contenant des puissances de $\cos t$. Faire de même avec $\cos 5t$ et $\sin 5t$.



**⇒Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$**

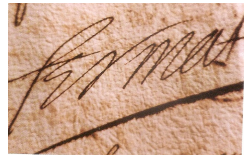
**⇒ Interprétation dans le plan & addition**

**⇒ Points de vue géométrique (distance, angle) & multiplication**

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable
   - 2.1. Racine de polynômes
   - 2.2. Calcul algébrique
   - 2.3. Représentation graphique
   - 2.4. Inégalités

3. Le visionnaire : GAUSS et la multiplication complexe
   - 3.1. Les complexes de module 1
   - 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
   - 3.3. Argument, forme trigonométrique



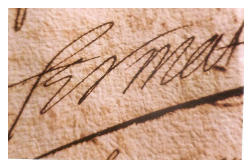
# Argument

## Définition - Argument

Soit $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, on a $\dfrac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$ donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{z}{|z|} = e^{i\theta}$.

On dit que $\theta$ est un argument de $z$. On note $\theta = \arg z$.

L'écriture $z = re^{i\theta}$ où $r = |z|$ est appelée forme trigonométrique de $z$.



# Argument

## Définition - Argument

Soit $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, on a $\dfrac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$ donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{z}{|z|} = e^{i\theta}$.

On dit que $\theta$ est un argument de $z$. On note $\theta = \arg z$.

L'écriture $z = re^{i\theta}$ où $r = |z|$ est appelée forme trigonométrique de $z$.

L'argument est une fonction logarithmique (qui vérifie $f(a \times b) = f(a) + f(b)$ mais multivariée (à plusieurs valeurs).



# Argument

## Proposition - Arithmétique de la congruence

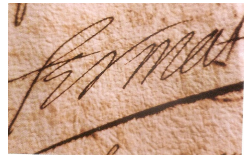
Si $(z,z') \in (\mathbb{C}^*)^2$, on a

$$\arg\overline{z} \equiv -\arg z [2\pi]$$

$$\arg\frac{1}{z} \equiv -\arg z [2\pi]$$

$$\arg(zz') \equiv (\arg z + \arg z')[2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv (\arg z - \arg z')[2\pi]$$



# Argument

## Proposition - Arithmétique de la congruence

Si $(z,z') \in (\mathbb{C}^*)^2$, on a

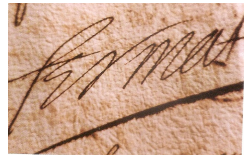
$$\arg\overline{z} \equiv -\arg z [2\pi]$$

$$\arg\frac{1}{z} \equiv -\arg z [2\pi]$$

$$\arg(zz') \equiv (\arg z + \arg z')[2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv (\arg z - \arg z')[2\pi]$$

**Attention** Pas d'unicité.



# Argument

## Proposition - Arithmétique de la congruence

Si $(z,z') \in (\mathbb{C}^*)^2$, on a

$$\arg\overline{z} \equiv -\arg z [2\pi]$$

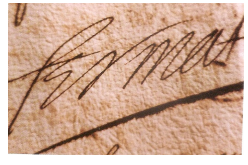
$$\arg\frac{1}{z} \equiv -\arg z [2\pi]$$

$$\arg(zz') \equiv (\arg z + \arg z')[2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv (\arg z - \arg z')[2\pi]$$

**Attention** Pas d'unicité.

**Remarque** Géométriquement



# Arctan

## Proposition - Relation arg et arctan

Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $\arg(1+ix) \equiv \arctan x [2\pi]/$

Soit $z \in \mathbb{C}$, alors $\arg z = \arctan \frac{\mathbf{Im} z}{\mathbf{Re} z} [\pi]$. Précisément :

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \dfrac{\mathbf{Im} z}{\mathbf{Re} z} & \text{si } \mathbf{Re} z > 0 \\ \arctan \dfrac{\mathbf{Im} z}{\mathbf{Re} z} + \pi & \text{si } \mathbf{Re} z < 0 \end{cases}$$



# Arctan

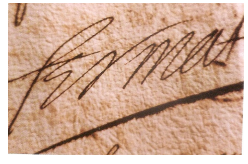
## Proposition - Relation arg et arctan

Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $\arg(1+ix) \equiv \arctan x [2\pi]/$

Soit $z \in \mathbb{C}$, alors $\arg z = \arctan \frac{\mathbf{Im} z}{\mathbf{Re} z} [\pi]$. Précisément :

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \frac{\mathbf{Im} z}{\mathbf{Re} z} & \text{si } \mathbf{Re} z > 0 \\ \arctan \frac{\mathbf{Im} z}{\mathbf{Re} z} + \pi & \text{si } \mathbf{Re} z < 0 \end{cases}$$

**Démonstration**



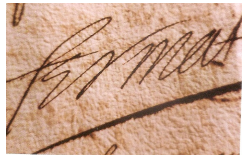
# Conclusion

**Objectifs**

⇒ Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$

⇒ Interprétation dans le plan & addition

⇒ Interprétation centrée & multiplication



# Conclusion

## Objectifs

⇒ Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$

- Définition algébrique : $\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ et $i^2 = -1$

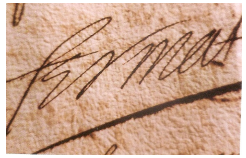


# Conclusion

## Objectifs

⇒ Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$

- Définition algébrique : $\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ et $i^2 = -1$
- L'addition est naturelle. La multiplication est commutative, distributive.



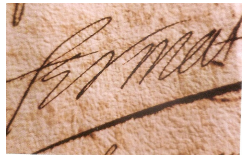
# Conclusion

## Objectifs

⇒ Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$

- Définition algébrique : $\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ et $i^2 = -1$
- L'addition est naturelle. La multiplication est commutative, distributive.
- Intéressant : le module de $z = \sqrt{a^2 + b^2}$.

  $z$ inversible ssi $|z| \neq 0$. Et $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$, d'où la conjugaison



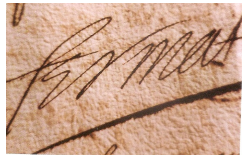
# Conclusion

## Objectifs

⇒ Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$

- Définition algébrique : $\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ et $i^2 = -1$
- L'addition est naturelle. La multiplication est commutative, distributive.
- Intéressant : le module de $z = \sqrt{a^2 + b^2}$.

  $z$ inversible ssi $|z| \neq 0$. Et $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$, d'où la conjugaison
- Inégalité triangulaire et série d'inégalités.



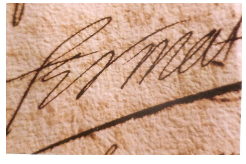
# Conclusion

**Objectifs**

⇒ Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$

⇒ Interprétation dans le plan & addition

⇒ Interprétation centrée & multiplication



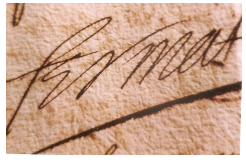
# Conclusion

**Objectifs**

⇒ Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$

⇒ Interprétation dans le plan & addition

- Somme : translation de vecteur



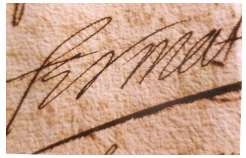
# Conclusion

**Objectifs**

⇒ Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$

⇒ Interprétation dans le plan & addition

- Somme : translation de vecteur
- Le module : norme du vecteur.



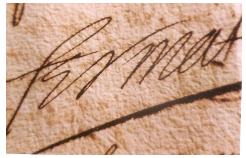
# Conclusion

**Objectifs**

⇒ Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$

⇒ Interprétation dans le plan & addition

- Somme : translation de vecteur
- Le module : norme du vecteur.
- Comment interpréter le produit ?



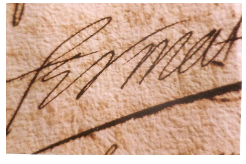
# Conclusion

**Objectifs**

⇒ Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$

⇒ Interprétation dans le plan & addition

⇒ Interprétation centrée & multiplication



# Conclusion

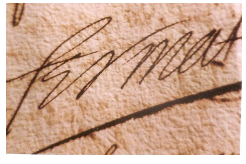
**Objectifs**

⇒ Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$

⇒ Interprétation dans le plan & addition

⇒ Interprétation centrée & multiplication

- Définir le groupe $\mathbb{U}$, de nombres complexes de module 1.



# Conclusion

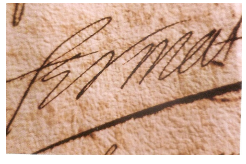
**Objectifs**

⇒ Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$

⇒ Interprétation dans le plan & addition

⇒ Interprétation centrée & multiplication

- Définir le groupe $\mathbb{U}$, de nombres complexes de module 1.
- Notation complexe trigonométrique : $z = \rho e^{i\theta}$.



# Conclusion

**Objectifs**

⇒ Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$

⇒ Interprétation dans le plan & addition

⇒ Interprétation centrée & multiplication

- Définir le groupe $\mathbb{U}$, de nombres complexes de module $1$.
- Notation complexe trigonométrique : $z = \rho e^{i\theta}$.
- Généralisation à la notion d'arguments.



# Conclusion

**Objectifs**

⇒ Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$

⇒ Interprétation dans le plan & addition

⇒ Interprétation centrée & multiplication

- Définir le groupe $\mathbb{U}$, de nombres complexes de module $1$.
- Notation complexe trigonométrique : $z = \rho e^{i\theta}$.
- Généralisation à la notion d'arguments.
- Représentation graphique : multiplication comme homothétie et rotation



# Conclusion

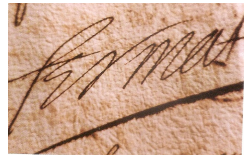
**Objectifs**

⇒ Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$

⇒ Interprétation dans le plan & addition

⇒ Interprétation centrée & multiplication

- Définir le groupe $\mathbb{U}$, de nombres complexes de module $1$.
- Notation complexe trigonométrique : $z = \rho e^{i\theta}$.
- Généralisation à la notion d'arguments.
- Représentation graphique : multiplication comme homothétie et rotation
- Nombreux savoir-faire qui donnent les formules trigonométriques.



# Conclusion

**Objectifs**

⇒ Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$

⇒ Interprétation dans le plan & addition

⇒ Interprétation centrée & multiplication

**Pour la prochaine fois**

- Lecture 4. Racines & 5. Plan complexe
- Exercice n° 68 & 69
- TD de jeudi :
  8h-10h : 70, 73 pairs, 74, 82 impairs, 83
  16h-18h : 71, 73 ilmpairs, 75, 82 pairs, 97
- Contrôle de calculs : fiche 16 et 17

