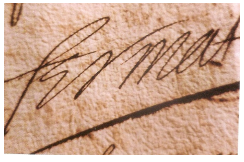


# Leçon 18 - Nombres complexes



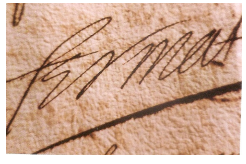
# ⇒ Racines (complexes) d'un nombre

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

3. Le visionnaire : GAUSS et la multiplication complexe

4. Racines d'un nombre complexe
   - 4.1. Recherche de racines carrées
   - 4.2. Racines $n$-ièmes de l'unité
   - 4.3. Racines $n$-ièmes d'un nombre complexe



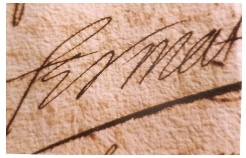
# ⇒ Racines (complexes) d'un nombre

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

3. Le visionnaire : GAUSS et la multiplication complexe

4. Racines d'un nombre complexe
   - 4.1. Recherche de racines carrées
   - 4.2. Racines $n$-ièmes de l'unité
   - 4.3. Racines $n$-ièmes d'un nombre complexe



# Deux méthodes

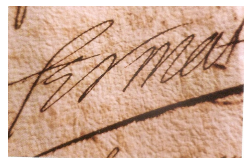
On dit que $Z \in \mathbb{C}$ est une racine carrée de $z \in \mathbb{C}$ si $Z^2 = z$.



# Deux méthodes

On dit que $Z \in \mathbb{C}$ est une racine carrée de $z \in \mathbb{C}$ si $Z^2 = z$.

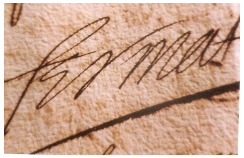
On dispose de deux méthodes pour chercher les racines carrées de $z$.



# Résolution trigonométrique (la meilleure !)

## Savoir-faire. Exploitation de la forme trigonométrique

On considère un complexe $z$ écrit sous forme trigonométrique $z = |z|e^{i\alpha}$, et on cherche $Z$ sous forme trigonométrique $Z = \rho e^{i\theta}$ où $\rho > 0$.
On a alors $Z^2 = \rho^2 e^{2i\theta}$, on fait ensuite une sorte d'identification entre les modules et les arguments (mais attention...).



# Résolution trigonométrique (la meilleure !)

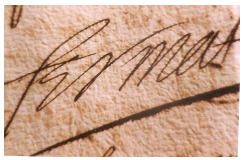
## Savoir-faire. Exploitation de la forme trigonométrique

On considère un complexe $z$ écrit sous forme trigonométrique $z = |z|e^{i\alpha}$, et on cherche $Z$ sous forme trigonométrique $Z = \rho e^{i\theta}$ où $\rho > 0$.
On a alors $Z^2 = \rho^2 e^{2i\theta}$, on fait ensuite une sorte d'identification entre les modules et les arguments (mais attention...).

Exercice

Trouver les racines carrées de $z = \dfrac{1-i}{\sqrt{3}-i}$.

*On rappelle que* $\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ *et* $\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$



# Résolution trigonométrique (la meilleure !)

## Savoir-faire. Exploitation de la forme trigonométrique

On considère un complexe $z$ écrit sous forme trigonométrique $z = |z|e^{i\alpha}$, et on cherche $Z$ sous forme trigonométrique $Z = \rho e^{i\theta}$ où $\rho > 0$.
On a alors $Z^2 = \rho^2 e^{2i\theta}$, on fait ensuite une sorte d'identification entre les modules et les arguments (mais attention...).

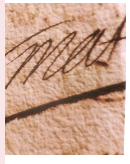
Exercice

Trouver les racines carrées de $z = \dfrac{1-i}{\sqrt{3}-i}$.

*On rappelle que* $\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ *et* $\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$
La méthode-algorithmique précédente nous permet d'affirmer :

## Proposition - Deux racines complexes

Tout complexe non nul possède exactement deux racines carrées complexes (opposées).



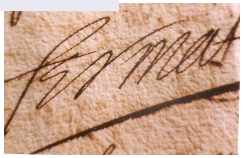
# Résolution algébrique

## Savoir-faire. Exploitation de la forme algébrique

On considère un complexe $z = x + iy \neq 0$, et on cherche $Z$ sous forme algébrique $Z = X + iY$.
Le principe est d'écrire l'égalité des modules, des parties réelles et imaginaires de $z$ et $Z^2$ pour se ramener à une résolution simple de système donnant $X^2, Y^2$ et le signe de $XY$.

$$Z^2 = z \Leftrightarrow \begin{cases} X^2 + Y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} \\ X^2 - Y^2 = x \\ 2XY = y \end{cases}$$

On résout le système formée par les deux premières équations, la troisième donne le signe de $XY$.



# Résolution algébrique

## Savoir-faire. Exploitation de la forme algébrique

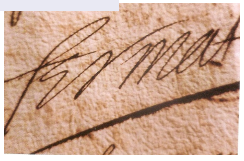
On considère un complexe $z = x + iy \neq 0$, et on cherche $Z$ sous forme algébrique $Z = X + iY$.
Le principe est d'écrire l'égalité des modules, des parties réelles et imaginaires de $z$ et $Z^2$ pour se ramener à une résolution simple de système donnant $X^2, Y^2$ et le signe de $XY$.

$$Z^2 = z \Leftrightarrow \begin{cases} X^2 + Y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} \\ X^2 - Y^2 = x \\ 2XY = y \end{cases}$$

On résout le système formée par les deux premières équations, la troisième donne le signe de $XY$.

Exercice

Déterminer les racines carrées de $2 - 3i$.

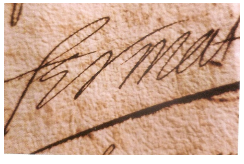


# Equation du second degré

Le théorème suivant a déjà été vu. Mais ici, on insiste sur le fait que les coefficients peuvent être des nombres complexes.

## Proposition - Nombre de racines et degré

L'équation $az^2+bz+c=0$, avec $(a,b,c)\in\mathbb{C}^3$, $a\neq 0$, admet deux solutions complexes $z_1=\frac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2=\frac{-b+\delta}{2a}$ où $\delta$ est une racine carrée complexe de $b^2-4ac$.



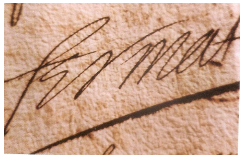
# Equation du second degré

Le théorème suivant a déjà été vu. Mais ici, on insiste sur le fait que les coefficients peuvent être des nombres complexes.

## Proposition - Nombre de racines et degré

L'équation $az^2+bz+c=0$, avec $(a,b,c)\in\mathbb{C}^3$, $a\neq 0$, admet deux solutions complexes $z_1=\frac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2=\frac{-b+\delta}{2a}$ où $\delta$ est une racine carrée complexe de $b^2-4ac$.

**Remarque** Bien connu...

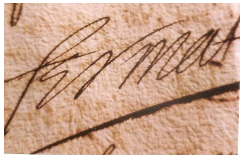


# Formule de Viète

## Proposition - Théorème de Viète

Soient $(S,P) \in \mathbb{C}^2$. Les solutions du système $\begin{cases} z_1 + z_2 = S \\ z_1 \times z_2 = P \end{cases}$

sont exactement (à permutation près) les solutions de $z^2 - Sz + P = 0$



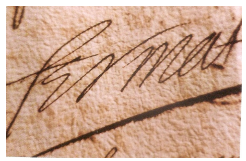
# Formule de Viète

## Proposition - Théorème de Viète

Soient $(S,P) \in \mathbb{C}^2$. Les solutions du système $\begin{cases} z_1 + z_2 = S \\ z_1 \times z_2 = P \end{cases}$ sont exactement (à permutation près) les solutions de $z^2 - Sz + P = 0$

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système d'équation $\begin{cases} z_1 + z_2 = 3 \\ z_1 \times z_2 = 1 - 3i \end{cases}$.



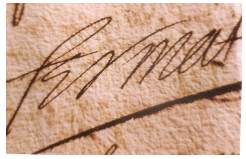
# ⇒ Racines (complexes) d'un nombre

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

3. Le visionnaire : GAUSS et la multiplication complexe

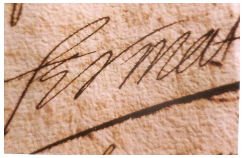
4. Racines d'un nombre complexe
   - 4.1. Recherche de racines carrées
   - 4.2. Racines $n$-ièmes de l'unité
   - 4.3. Racines $n$-ièmes d'un nombre complexe



# Théorème !

## Théorème - Les $n$ solutions de $z^n = 1$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les racines $n$-ièmes de l'unité, c'est à dire les solutions de l'équation $z^n = 1$, sont les $n$ nombres $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.
On note $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} ; k \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \right\}$

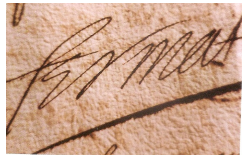


# Théorème !

## Théorème - Les $n$ solutions de $z^n = 1$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les racines $n$-ièmes de l'unité, c'est à dire les solutions de l'équation $z^n = 1$, sont les $n$ nombres $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.
On note $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} ; k \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \right\}$

On obtient donc pour
$n = 2$ : $1$ et $-1$ ;
$n = 3$ : $1$, $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = \exp \frac{2i\pi}{3}$ et $j^2 = \overline{j} = e^{\frac{4i\pi}{3}} = \exp \frac{4i\pi}{3}$ ;
$n = 4$ : $1, i, -1$ et $-i$.
Il faut savoir les placer sur le cercle trigonométrique.
Racines primitives $n^{\text{e}}$de l'unité.

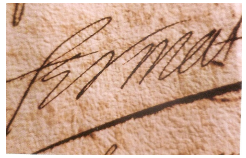


# Théorème !

## Théorème - Les $n$ solutions de $z^n = 1$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les racines $n$-ièmes de l'unité, c'est à dire les solutions de l'équation $z^n = 1$, sont les $n$ nombres $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.
On note $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} ; k \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \right\}$

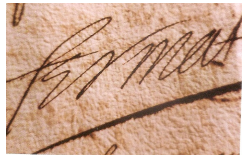
On obtient donc pour
$n = 2$ : $1$ et $-1$ ;
$n = 3$ : $1$, $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = \exp \frac{2i\pi}{3}$ et $j^2 = \overline{j} = e^{\frac{4i\pi}{3}} = \exp \frac{4i\pi}{3}$ ;
$n = 4$ : $1, i, -1$ et $-i$.
Il faut savoir les placer sur le cercle trigonométrique.
Racines primitives $n^{\text{e}}$de l'unité.
**Démonstration**



# Somme des racines

## Proposition - Somme des racines $n$-ième

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. La somme des racines $n$-ièmes de l'unité est nulle.
En particulier $1 + j + j^2 = 0$.

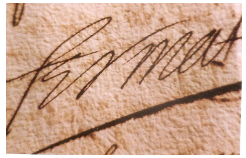


# Somme des racines

## Proposition - Somme des racines $n$-ième

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. La somme des racines $n$-ièmes de l'unité est nulle.
En particulier $1 + j + j^2 = 0$.

**Démonstration**



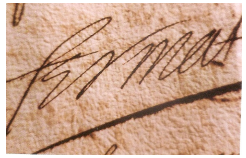
# ⇒ Racines (complexes) d'un nombre

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

3. Le visionnaire : GAUSS et la multiplication complexe

4. Racines d'un nombre complexe
   - 4.1. Recherche de racines carrées
   - 4.2. Racines $n$-ièmes de l'unité
   - 4.3. Racines $n$-ièmes d'un nombre complexe

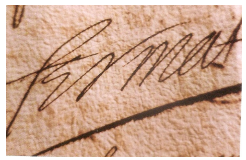


# De $z^n = 1$ à $z^n = Z$

## Théorème - Racines $n$-ièmes de $z_0$

Soient $z_0 \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $z_0$ a exactement $n$ racines $n$-ièmes (solutions de $z^n = z_0$).
Si $z_0 = |z_0|e^{i\alpha}$, alors ce sont les

$$z_k = |z_0|^{1/n} e^{i(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n})} \text{ où } k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$



# De $z^n = 1$ à $z^n = Z$

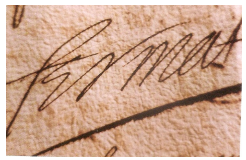
## Théorème - Racines $n$-ièmes de $z_0$

Soient $z_0 \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $z_0$ a exactement $n$ racines $n$-ièmes (solutions de $z^n = z_0$).
Si $z_0 = |z_0|e^{i\alpha}$, alors ce sont les

$$z_k = |z_0|^{1/n} e^{i(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n})} \text{ où } k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

**Démonstration**

Il suffit de les écrire

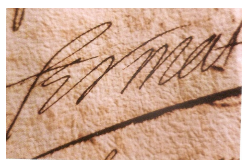


# Exercices

Exercice

Déterminer les racines $n$-ièmes de $\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}$.

*On rappelle que* $\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ *et* $\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$



# Exercices

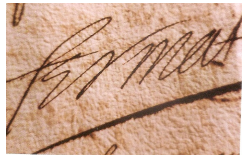
Exercice

Déterminer les racines $n$-ièmes de $\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}$.

*On rappelle que* $\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ *et* $\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

Exercice

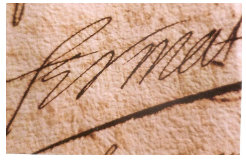
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$.



# Conclusion

**Objectifs**

⇒ Racines (complexes) d'un nombre

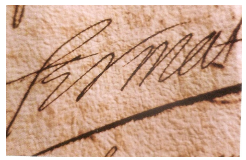


# Conclusion

## Objectifs

⇒ Racines (complexes) d'un nombre

- Deux méthodes pour calculer la racine carrée : trigonométrique et algébrique
  Applications à la recherche des racines des équations polynomiales de degré 2

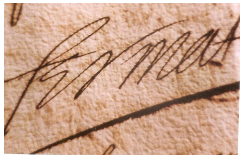


# Conclusion

## Objectifs

⇒ Racines (complexes) d'un nombre

- Deux méthodes pour calculer la racine carrée : trigonométrique et algébrique
  Applications à la recherche des racines des équations polynomiales de degré 2
- Les $n$ racines de $1$ sont $e_k = e^{2ik\pi/n}$, ils vérifient $\sum e_k = 0 \ldots$
  On coupe le gâteau en $n$ parts égales.

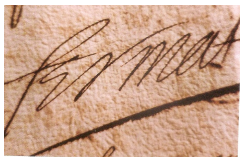


# Conclusion

## Objectifs

### ⇒ Racines (complexes) d'un nombre

- Deux méthodes pour calculer la racine carrée : trigonométrique et algébrique
  Applications à la recherche des racines des équations polynomiales de degré 2
- Les $n$ racines de $1$ sont $e_k = e^{2ik\pi/n}$, ils vérifient $\sum e_k = 0 \ldots$
  On coupe le gâteau en $n$ parts égales.
- Les $n$ racines de $Z$ sont $e_k = \sqrt[n]{|Z|}e^{2ik\pi/n + i\arg(Z)/n}$

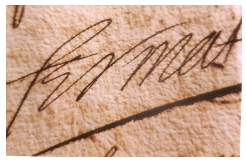


# Conclusion

## Objectifs

⇒ Racines (complexes) d'un nombre

- Deux méthodes pour calculer la racine carrée : trigonométrique et algébrique
  Applications à la recherche des racines des équations polynomiales de degré 2
- Les $n$ racines de $1$ sont $e_k = e^{2ik\pi/n}$, ils vérifient $\sum e_k = 0 \ldots$
  On coupe le gâteau en $n$ parts égales.
- Les $n$ racines de $Z$ sont $e_k = \sqrt[n]{|Z|}e^{2ik\pi/n + i\arg(Z)/n}$
- Il est souvent préférable d'exploiter la forme trigonométrique. . .

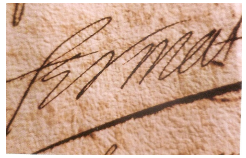


# Conclusion

## Objectifs

### ⇒ Racines (complexes) d'un nombre

- Deux méthodes pour calculer la racine carrée : trigonométrique et algébrique
  Applications à la recherche des racines des équations polynomiales de degré 2
- Les $n$ racines de $1$ sont $e_k = e^{2ik\pi/n}$, ils vérifient $\sum e_k = 0 \ldots$
  On coupe le gâteau en $n$ parts égales.
- Les $n$ racines de $Z$ sont $e_k = \sqrt[n]{|Z|} e^{2ik\pi/n + i \arg(Z)/n}$
- Il est souvent préférable d'exploiter la forme trigonométrique...
- Il y a une importante structure de groupe cachée derrière !



# Conclusion

**Objectifs**

⇒ Racines (complexes) d'un nombre

**Pour la prochaine fois**

- Lecture : 5. Le plan complexe
- Exercice n°84 & 98

