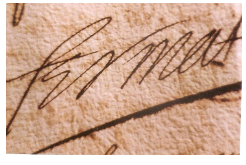


Leçon 19 - Nombres complexes



⇒Etude de l'alignement et l'orthogonalité dans le plan

⇒ Transformations géométriques du plan

1. Problèmes

2. EULER : manipulateur des nombres du diable

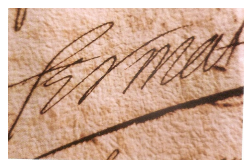
3. Le visionnaire : GAUSS et la multiplication complexe

4. Racines d'un nombre complexe

5. Rappels : $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathscr{P}$

   5.1. Regard géométrique sur le plan complexe

   5.2 Transformations du plan (point de vue complexe)



⇒Etude de l'alignement et l'orthogonalité dans le plan

⇒ Transformations géométriques du plan

1. Problèmes

2. EULER : manipulateur des nombres du diable

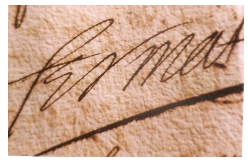
3. Le visionnaire : GAUSS et la multiplication complexe

4. Racines d'un nombre complexe

5. Rappels : $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathscr{P}$

   5.1. Regard géométrique sur le plan complexe

   5.2 Transformations du plan (point de vue complexe)



Identification $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathscr{P}$

Proposition - Identification

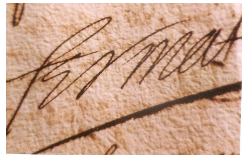
On munit le plan $\mathscr{P}$ d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soient A, B, A', B' quatre points du plan. On a alors (*mesure des angles orientés de vecteurs*) :

$$|z_A| = OA$$

$$AB = |z_B - z_A|$$

$$\arg z_A \equiv (\vec{i}, \vec{OA})[2\pi] \qquad \text{et } \arg(z_B - z_A) \equiv (\vec{i}, \vec{AB})[2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A}\right) \equiv (\vec{AB}, \vec{A'B'})[2\pi]$$



Identification $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathscr{P}$

Proposition - Identification

On munit le plan $\mathscr{P}$ d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soient A, B, A', B' quatre points du plan. On a alors (*mesure des angles orientés de vecteurs*) :

$$|z_A| = OA$$

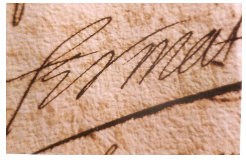
$$AB = |z_B - z_A|$$

$$\arg z_A \equiv (\vec{i}, \vec{OA})[2\pi] \qquad \text{et } \arg(z_B - z_A) \equiv (\vec{i}, \vec{AB})[2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A}\right) \equiv (\vec{AB}, \vec{A'B'})[2\pi]$$

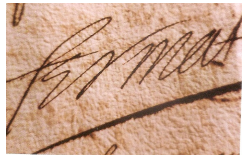
Le dernier résultat, essentiel, mérite une démonstration.

Démonstration



LE nombre $z' \times \overline{z}$

Analyse Le nombre $Z = z' \times \overline{z}$



LE nombre $z' \times \overline{z}$

Analyse Le nombre $Z = z' \times \overline{z}$

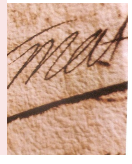
Définition - Le complexe Z

Soient A, B, A', B' quatre points du plan d'affixe z_A, z_B, $z_{A'}$ et $z_{B'}$ respectivement.
On note $Z = (z_{B'} - z_{A'}) \times \overline{(z_B - z_A)}$.
Alors

$$\arg Z \equiv (\vec{AB}, \vec{A'B'})[2\pi] \quad \text{et} \quad |Z| = \|\vec{AB}\| \times \|\vec{A'B'}\|$$

où $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ est par définition la norme (longueur) du vecteur $\vec{u}(x, y)$.
Et donc

$$Z = \|\vec{AB}\| \|\vec{A'B'}\| \left[\cos(\vec{AB}, \vec{A'B'}) + i \sin(\vec{AB}, \vec{A'B'})\right]$$



LE nombre $z' \times \overline{z}$

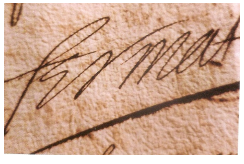
Le calcul donne :

Proposition - Partie réelle et imaginaire de Z

Avec les mêmes notations et en notant $\vec{u} = \vec{AB}$ d'affixe $z = z_B - z_A = x + iy$ et $\vec{u'} = \vec{A'B'}$ d'affixe $z' = z_{B'} - z_{A'} = x' + iy'$.
On rappelle que $Z = z' \times \overline{z}$. On a alors :

$$\mathbf{Re}(Z) = \|\vec{AB}\| \|\vec{A'B'}\| \cos(\vec{AB}, \vec{A'B'}) = xx' + yy'$$

$$\mathbf{Im}(Z) = \|\vec{AB}\| \|\vec{A'B'}\| \sin(\vec{AB}, \vec{A'B'}) = xy' - x'y$$



LE nombre $z' \times \overline{z}$

Le calcul donne :

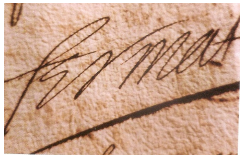
Proposition - Partie réelle et imaginaire de Z

Avec les mêmes notations et en notant $\vec{u} = \vec{AB}$ d'affixe $z = z_B - z_A = x + iy$ et $\vec{u'} = \vec{A'B'}$ d'affixe $z' = z_{B'} - z_{A'} = x' + iy'$.
On rappelle que $Z = z' \times \overline{z}$. On a alors :

$$\mathbf{Re}(Z) = \|\vec{AB}\| \|\vec{A'B'}\| \cos(\vec{AB}, \vec{A'B'}) = xx' + yy'$$

$$\mathbf{Im}(Z) = \|\vec{AB}\| \|\vec{A'B'}\| \sin(\vec{AB}, \vec{A'B'}) = xy' - x'y$$

Démonstration



⇒Etude de l'alignement et l'orthogonalité dans le plan

⇒ Transformations géométriques du plan

1. Problèmes

2. EULER : manipulateur des nombres du diable

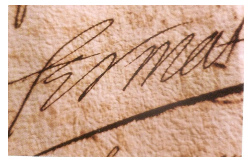
3. Le visionnaire : GAUSS et la multiplication complexe

4. Racines d'un nombre complexe

5. Rappels : $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathscr{P}$

   5.1. Regard géométrique sur le plan complexe

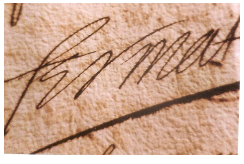
   5.2 Transformations du plan (point de vue complexe)



Transformations « élémentaires »

Définition - Transformation du plan

On appelle transformation du plan toute bijection du plan dans lui-même.



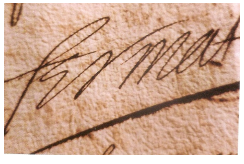
Transformations « élémentaires »

Définition - Transformation du plan

On appelle transformation du plan toute bijection du plan dans lui-même.

Attention - Projection

Une projection sur une droite n'est pas une transformation du plan.



Translation

Définition - Translation

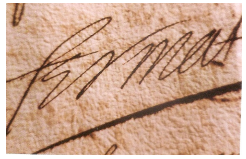
On appelle translation de vecteur $\vec{u}$ l'application

$$\begin{array}{rccc} t_{\vec{u}} : & \mathscr{P} & \to & \mathscr{P} \\ & M & \mapsto & M' \text{ tel que } \vec{MM'} = \vec{u} \end{array}$$

En complexes, $t_{\vec{u}}$ est représentée par l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$z \mapsto z + z_0$$

où z_0 est l'affixe du vecteur $\vec{u}$.



Translation

Définition - Translation

On appelle translation de vecteur $\vec{u}$ l'application

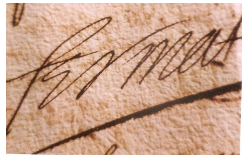
$$\begin{array}{rccc} t_{\vec{u}} : & \mathscr{P} & \to & \mathscr{P} \\ & M & \mapsto & M' \text{ tel que } \vec{MM'} = \vec{u} \end{array}$$

En complexes, $t_{\vec{u}}$ est représentée par l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$z \mapsto z + z_0$$

où z_0 est l'affixe du vecteur $\vec{u}$.

Fichier geogebra : translation.ggb



Homothétie

Définition - Homothétie

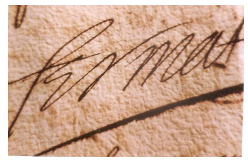
On appelle homothétie de centre Ω et de rapport le réel $k \neq 0$ l'application

$$\begin{array}{rccl} h_{\Omega,k} : & \mathscr{P} & \to & \mathscr{P} \\ & M & \mapsto & M' \text{ tel que } \vec{\Omega M'} = k\vec{\Omega M} \end{array}$$

En complexes, $h_{\Omega,k}$ est représentée par l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$z \mapsto z_0 + k(z - z_0)$$

où z_0 est l'affixe du point Ω.



Homothétie

Définition - Homothétie

On appelle homothétie de centre Ω et de rapport le réel $k \neq 0$ l'application

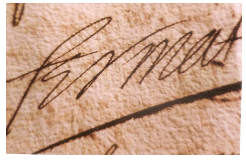
$$\begin{array}{rccl} h_{\Omega,k} : & \mathscr{P} & \to & \mathscr{P} \\ & M & \mapsto & M' \text{ tel que } \Omega\vec{M'} = k\Omega\vec{M} \end{array}$$

En complexes, $h_{\Omega,k}$ est représentée par l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$z \mapsto z_0 + k(z - z_0)$$

où z_0 est l'affixe du point Ω.

Fichier geogebra : homothetie.ggb



Rotation

Rotation

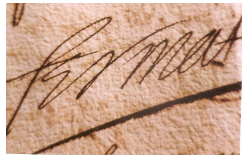
On appelle rotation de centre Ω et d'angle θ l'application

$$R_{\Omega,\theta} : \begin{array}{lll} \mathscr{P} & \to \mathscr{P} & \\ M & \mapsto M' \text{ tel que } \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\vec{\Omega M}, \vec{\Omega M'}) \equiv \theta [2\pi] \end{cases} & \text{si } M \neq \Omega \\ \Omega & \mapsto \Omega & \end{array}$$

En complexes, $R_{\Omega,\theta}$ est représentée par l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$z \mapsto z_0 + e^{i\theta}(z - z_0)$$

où z_0 est l'affixe du point Ω.



Rotation

Rotation

On appelle rotation de centre Ω et d'angle θ l'application

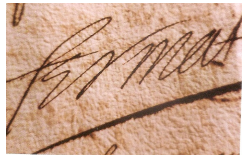
$$R_{\Omega,\theta} : \begin{array}{lll} \mathscr{P} & \to \mathscr{P} & \\ M & \mapsto M' \text{ tel que } \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\vec{\Omega M}, \vec{\Omega M'}) \equiv \theta [2\pi] \end{cases} & \text{si } M \neq \Omega \\ \Omega & \mapsto \Omega & \end{array}$$

En complexes, $R_{\Omega,\theta}$ est représentée par l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$z \mapsto z_0 + e^{i\theta}(z - z_0)$$

où z_0 est l'affixe du point Ω.

Fichier geogebra : rotation.ggb



Similitudes (directes)

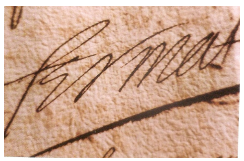
Il s'agit de composition de rotation et d'homothétie...

Définition - Similitude directe

On appelle similitude directe du plan toute transformation représentée dans le plan complexe par une application de la forme

$$z \mapsto az + b$$

avec $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.



Similitudes (directes)

Il s'agit de composition de rotation et d'homothétie...

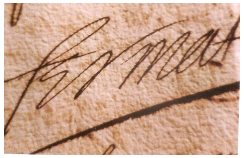
Définition - Similitude directe

On appelle similitude directe du plan toute transformation représentée dans le plan complexe par une application de la forme

$$z \mapsto az + b$$

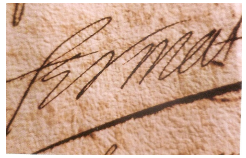
avec $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.

Remarque Les transformations élémentaires



Représentation et propriétés

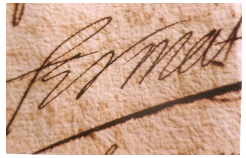
Analyse Résultats caractéristiques



Représentation et propriétés

Analyse Résultats caractéristiques

Fichier geogebra : similitude.ggb



Représentation et propriétés

Analyse Résultats caractéristiques

Fichier geogebra : similitude.ggb

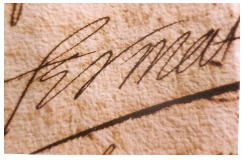
Proposition - Similitude directe

Une similitude directe conserve les angles et les rapports des distances.

Si A, B, C sont trois points distincts d'images respectives A', B', C' par cette similitude

Alors

$$(\vec{AB}, \vec{AC}) \equiv (\vec{A'B'}, \vec{A'C'})[2\pi] \qquad \text{et} \qquad \frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$$



Représentation et propriétés

Analyse Résultats caractéristiques

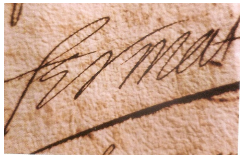
Fichier geogebra : similitude.ggb

Proposition - Similitude directe

Une similitude directe conserve les angles et les rapports des distances.
Si A, B, C sont trois points distincts d'images respectives A', B', C' par cette similitude
Alors

$$(\vec{AB}, \vec{AC}) \equiv (\vec{A'B'}, \vec{A'C'})[2\pi] \qquad \text{et} \qquad \frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$$

Démonstration



Caractérisation

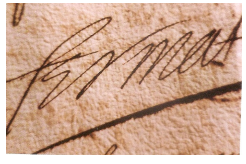
Théorème - Caractérisation

Soit f la transformation du plan représentée par $z \mapsto az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}$.

- Si $a = 1$, f est la translation de vecteur d'affixe b.
- Si $a \neq 1$, f admet un unique point fixe (point invariant) $\Omega(\frac{b}{1-a})$ appelé centre de la similitude.

  f s'écrit alors : $f = h \circ r = r \circ h$ avec
  - r rotation de centre Ω d'angle de mesure $\arg a$
  - h homothétie de centre Ω et de rapport $|a|$.

  On dit que $|a|$ est le rapport de la similitude, et $\arg a$ est (la mesure de) l'angle de la similitude.



Caractérisation

Théorème - Caractérisation

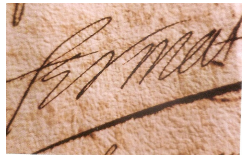
Soit f la transformation du plan représentée par $z \mapsto az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}$.

- Si $a = 1$, f est la translation de vecteur d'affixe b.
- Si $a \neq 1$, f admet un unique point fixe (point invariant) $\Omega(\frac{b}{1-a})$ appelé centre de la similitude.

  f s'écrit alors : $f = h \circ r = r \circ h$ avec
  - r rotation de centre Ω d'angle de mesure $\arg a$
  - h homothétie de centre Ω et de rapport $|a|$.

  On dit que $|a|$ est le rapport de la similitude, et $\arg a$ est (la mesure de) l'angle de la similitude.

Démonstration



Caractérisation

Théorème - Caractérisation

Soit f la transformation du plan représentée par $z \mapsto az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}$.

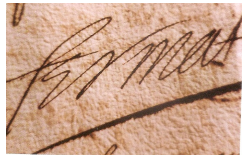
- Si $a = 1$, f est la translation de vecteur d'affixe b.
- Si $a \neq 1$, f admet un unique point fixe (point invariant) $\Omega(\frac{b}{1-a})$ appelé centre de la similitude.

  f s'écrit alors : $f = h \circ r = r \circ h$ avec
  - r rotation de centre Ω d'angle de mesure $\arg a$
  - h homothétie de centre Ω et de rapport $|a|$.

  On dit que $|a|$ est le rapport de la similitude, et $\arg a$ est (la mesure de) l'angle de la similitude.

Démonstration

Remarque Cas particuliers avec $a \neq 1$

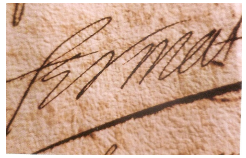


Reconnaissance

Corollaire - Caractérisation de la similitude

La similitude de centre d'affixe z_0, de rapport k et d'angle θ est représentée par

$$z \mapsto z_0 + ke^{i\theta}(z - z_0).$$



Reconnaissance

Corollaire - Caractérisation de la similitude

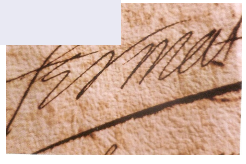
La similitude de centre d'affixe z_0, de rapport k et d'angle θ est représentée par

$$z \mapsto z_0 + ke^{i\theta}(z - z_0).$$

Savoir-faire. Reconnaître une similitude

Etant donnée une transformation, pour reconnaître une similitude il faut :

1. chercher le point fixe : la solution de $f(z) = z$.
   On le note z_0, c'est le centre de la similitude.
2. chercher le complexe a tel que $f(z) - z_0 = a(z - z_0)$.
   Ce complexe a donne le rapport et l'angle de la similitude

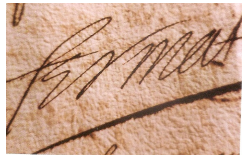


Composition

Proposition - Composée de similitudes

La composée de deux similitudes est une similitude dont le rapport est le produit des rapports et l'angle, la somme des angles.
On a les cas particuliers suivants :

- la composée de deux translations est une translation de vecteur la somme des deux vecteurs,
- la composée de deux homothéties est soit une homothétie soit une translation,
- la composée de deux rotations de même centre est une rotation de même centre et d'angle la somme des deux angles (éventuellement d'angle nul, i.e. l'identité du plan)



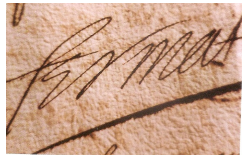
Composition

Proposition - Composée de similitudes

La composée de deux similitudes est une similitude dont le rapport est le produit des rapports et l'angle, la somme des angles.

On a les cas particuliers suivants :

- la composée de deux rotations de centres distincts, d'angles respectifs θ et θ' est :
  - une rotation si $\theta + \theta' \not\equiv 0[2\pi]$
  - une translation (éventuellement de vecteur nul, i.e. l'identité) sinon.



Composition

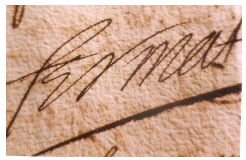
Proposition - Composée de similitudes

La composée de deux similitudes est une similitude dont le rapport est le produit des rapports et l'angle, la somme des angles.

On a les cas particuliers suivants :

- la composée de deux rotations de centres distincts, d'angles respectifs θ et θ' est :
  - une rotation si $\theta + \theta' \not\equiv 0[2\pi]$
  - une translation (éventuellement de vecteur nul, i.e. l'identité) sinon.

Démonstration

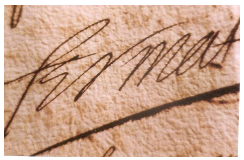


Propriétés réciproques et transformations

Corollaire - Transformation réciproque (ou inverse)

On a les transformations réciproques suivantes :

$$t_{\vec{u}}^{-1} = t_{-\vec{u}}; \quad h_{\Omega,k}^{-1} = h_{\Omega,\frac{1}{k}}; \quad R_{\Omega,\theta}^{-1} = R_{\Omega,-\theta}.$$



Propriétés réciproques et transformations

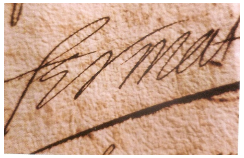
Corollaire - Transformation réciproque (ou inverse)

On a les transformations réciproques suivantes :

$$t_{\vec{u}}^{-1} = t_{-\vec{u}}; \quad h_{\Omega,k}^{-1} = h_{\Omega,\frac{1}{k}}; \quad R_{\Omega,\theta}^{-1} = R_{\Omega,-\theta}.$$

Proposition - Transformation du plan

Etant donné deux segments $[MN]$ et $[M'N']$ de longueurs non nulles, il existe une et une seule similitude directe transformant M en M' et N en N'.



Propriétés réciproques et transformations

Corollaire - Transformation réciproque (ou inverse)

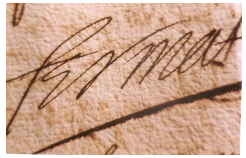
On a les transformations réciproques suivantes :

$$t_{\vec{u}}^{-1} = t_{-\vec{u}}; \quad h_{\Omega,k}^{-1} = h_{\Omega,\frac{1}{k}}; \quad R_{\Omega,\theta}^{-1} = R_{\Omega,-\theta}.$$

Proposition - Transformation du plan

Etant donné deux segments $[MN]$ et $[M'N']$ de longueurs non nulles, il existe une et une seule similitude directe transformant M en M' et N en N'.

Démonstration

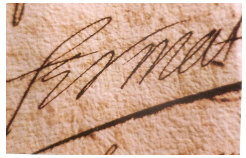


Conclusion

Objectifs

⇒ Etude de l'alignement et l'orthogonalité dans le plan

⇒ Transformations géométriques du plan

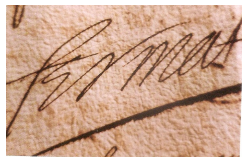


Conclusion

Objectifs

⇒ Etude de l'alignement et l'orthogonalité dans le plan

- Ligne de niveau : la droite $\arg(\vec{AB}, \vec{A'B'}) \equiv 0[\pi]$

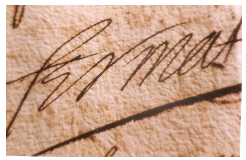


Conclusion

Objectifs

⇒ Etude de l'alignement et l'orthogonalité dans le plan

- Ligne de niveau : la droite $\arg(\vec{AB}, \vec{A'B'}) \equiv 0[\pi]$
- Ligne de niveau : le cercle de diamètre $[AB]$
  est l'ensemble des points M tel que $(MA) \perp (MB)$

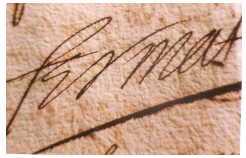


Conclusion

Objectifs

⇒ Etude de l'alignement et l'orthogonalité dans le plan

⇒ Transformations géométriques du plan



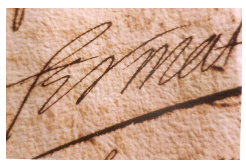
Conclusion

Objectifs

⇒ Etude de l'alignement et l'orthogonalité dans le plan

⇒ Transformations géométriques du plan

- Transformations simples : translation : $+a$, homothétie : $\times k$, rotation : $\times e^{i\theta}$,



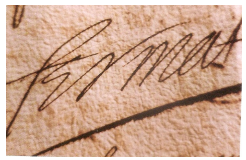
Conclusion

Objectifs

⇒ Etude de l'alignement et l'orthogonalité dans le plan

⇒ Transformations géométriques du plan

- Transformations simples : translation : $+a$, homothétie : $\times k$, rotation : $\times e^{i\theta}$,
- Similitude (direct) : mélange : $z \mapsto a + bz$ (avec $a, b \in \mathbb{C}$)



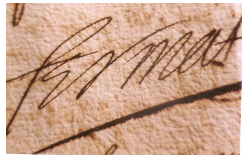
Conclusion

Objectifs

⇒ Etude de l'alignement et l'orthogonalité dans le plan

⇒ Transformations géométriques du plan

- Transformations simples : translation : $+a$, homothétie : $\times k$, rotation : $\times e^{i\theta}$,
- Similitude (direct) : mélange : $z \mapsto a + bz$ (avec $a, b \in \mathbb{C}$)
- Elle conserve le rapport des distances et des angles.



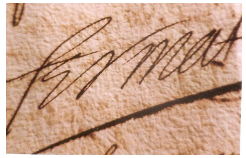
Conclusion

Objectifs

⇒ Etude de l'alignement et l'orthogonalité dans le plan

⇒ Transformations géométriques du plan

- Transformations simples : translation : $+a$, homothétie : $\times k$, rotation : $\times e^{i\theta}$,
- Similitude (direct) : mélange : $z \mapsto a + bz$ (avec $a, b \in \mathbb{C}$)
- Elle conserve le rapport des distances et des angles.
- Trouver le centre (point fixe), puis l'angle ($\arg k$) et le rapport ($|k|$) si $f(z) - z_0 = k(z - _0)$



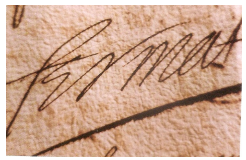
Conclusion

Objectifs

⇒ Etude de l'alignement et l'orthogonalité dans le plan

⇒ Transformations géométriques du plan

- Transformations simples : translation : $+a$, homothétie : $\times k$, rotation : $\times e^{i\theta}$,
- Similitude (direct) : mélange : $z \mapsto a + bz$ (avec $a, b \in \mathbb{C}$)
- Elle conserve le rapport des distances et des angles.
- Trouver le centre (point fixe), puis l'angle ($\arg k$) et le rapport ($|k|$) si $f(z) - z_0 = k(z - _0)$
- Composition de similitude et similitude réciproque



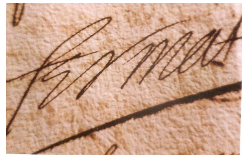
Conclusion

Objectifs

⇒ Etude de l'alignement et l'orthogonalité dans le plan

⇒ Transformations géométriques du plan

- Transformations simples : translation : $+a$, homothétie : $\times k$, rotation : $\times e^{i\theta}$,
- Similitude (direct) : mélange : $z \mapsto a + bz$ (avec $a, b \in \mathbb{C}$)
- Elle conserve le rapport des distances et des angles.
- Trouver le centre (point fixe), puis l'angle ($\arg k$) et le rapport ($|k|$) si $f(z) - z_0 = k(z - _0)$
- Composition de similitude et similitude réciproque
- Unicité de similitude étant donné deux couples de points.



Conclusion

Objectifs

⇒ Etude de l'alignement et l'orthogonalité dans le plan

⇒ Transformations géométriques du plan

Pour la prochaine fois

- Lecture : chap 10 : Relations.
- Exercice n° 86 & 89

