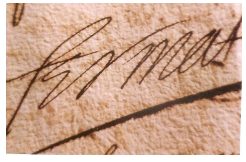


Leçon 21 - Relations (binaires) sur E^2



⇒ Graphe et relations sur E

⇒ Relations d'ordre

1. Problèmes

2. Graphe
   - 2.1. Formalisation
   - 2.2. Vocabulaire
   - 2.3. Applications

3. Relations binaires
   - 3.1. Construction et représentation
   - 3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre
   - 4.1. Définitions
   - 4.2. Ensemble avec ordre total
   - 4.3. Ensemble avec ordre partiel



⇒ Graphe et relations sur E

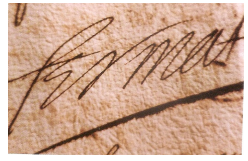
⇒ Relations d'ordre

1. Problèmes

2. Graphe
   - 2.1. Formalisation
   - 2.2. Vocabulaire
   - 2.3. Applications

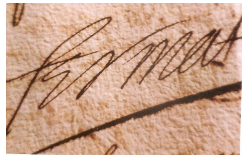
3. Relations binaires
   - 3.1. Construction et représentation
   - 3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre
   - 4.1. Définitions
   - 4.2. Ensemble avec ordre total
   - 4.3. Ensemble avec ordre partiel



Problèmes

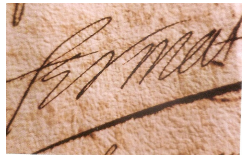
Problème Graphe



Problèmes

Problème Graphe

Problème Forcer l'égalité. Qu'est-ce qu'une égalité ?

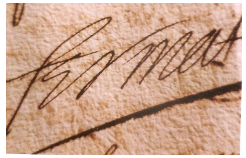


Problèmes

Problème Graphe

Problème Forcer l'égalité. Qu'est-ce qu'une égalité ?

Problème Relation d'ordre ?



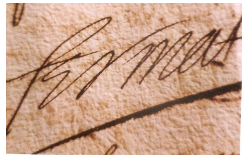
Problèmes

Problème Graphe

Problème Forcer l'égalité. Qu'est-ce qu'une égalité ?

Problème Relation d'ordre ?

Problème Plus grand élément



Problèmes

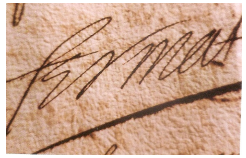
Problème Graphe

Problème Forcer l'égalité. Qu'est-ce qu'une égalité ?

Problème Relation d'ordre ?

Problème Plus grand élément

Problème Codage de graphe (ou relation) à partir d'application. Et réciproquement...



⇒ Graphe et relations sur E

⇒ Relations d'ordre

1. Problèmes

2. Graphe

2.1. Formalisation

2.2. Vocabulaire

2.3. Applications

3. Relations binaires

3.1. Construction et représentation

3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ensemble avec ordre total

4.3. Ensemble avec ordre partiel



Image mentale

Heuristique - Images mentales de graphes !

Pour l'historique et les images mentales (à bien garder en tête), il faut revoir le cours de mathématiques de terminale.

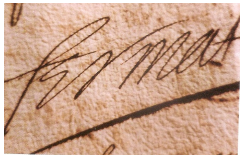


Image mentale

Heuristique - Images mentales de graphes !

Pour l'historique et les images mentales (à bien garder en tête), il faut revoir le cours de mathématiques de terminale.

Définition - Graphe non orienté

On considère un ensemble S (de sommets), fini en règle générale. Puis un ensemble $A \subset \binom{S}{2}$ de paires d'arêtes.
On appelle graphe non orienté le couple (S, A).

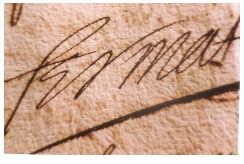


Image mentale

Heuristique - Images mentales de graphes !

Pour l'historique et les images mentales (à bien garder en tête), il faut revoir le cours de mathématiques de terminale.

Définition - Graphe non orienté

On considère un ensemble S (de sommets), fini en règle générale. Puis un ensemble $A \subset \binom{S}{2}$ de paires d'arêtes.
On appelle graphe non orienté le couple (S, A).

Définition - Graphe orienté

On considère un ensemble S (de sommets), fini en règle générale. Puis un ensemble $A \subset S \times S$ de couples d'arêtes.
On appelle graphe orienté le couple (S, A).

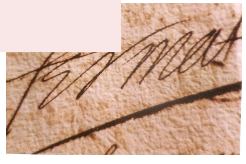


Image mentale

Heuristique - Images mentales de graphes !

Pour l'historique et les images mentales (à bien garder en tête), il faut revoir le cours de mathématiques de terminale.

Définition - Graphe non orienté

On considère un ensemble S (de sommets), fini en règle générale. Puis un ensemble $A \subset \binom{S}{2}$ de paires d'arêtes.
On appelle graphe non orienté le couple (S, A).

Définition - Graphe orienté

On considère un ensemble S (de sommets), fini en règle générale. Puis un ensemble $A \subset S \times S$ de couples d'arêtes.
On appelle graphe orienté le couple (S, A).



Exercice

Donner la définition formalisée d'un graphe complet.

⇒ Graphe et relations sur E

⇒ Relations d'ordre

1. Problèmes

2. Graphe

2.1. Formalisation

2.2. Vocabulaire

2.3. Applications

3. Relations binaires

3.1. Construction et représentation

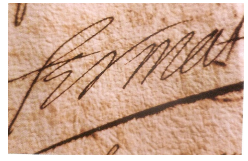
3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ensemble avec ordre total

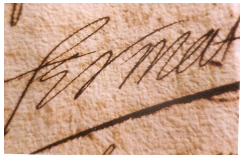
4.3. Ensemble avec ordre partiel



Sommets

Définition - Sommets reliés

On dit que deux sommets $s_1, s_2 \in S$ sont reliés si $(s_1, s_2) \in A$ (cas orienté) ou $\{s_1, s_2\} \in A$ (cas non orienté)



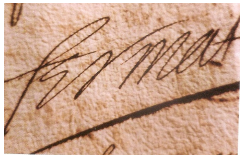
Sommets

Définition - Sommets reliés

On dit que deux sommets $s_1, s_2 \in S$ sont reliés si $(s_1, s_2) \in A$ (cas orienté) ou $\{s_1, s_2\} \in A$ (cas non orienté)

Définition - Degré d'un sommet

Soit $s \in S$ un sommet d'un graphe non orienté (S, A) a pour degré $d(s) = \mathrm{card}(A_s)$ où $A_s = \{a \in A \mid s \in a\}$. Soit $s \in S$ un sommet d'un graphe orienté (S, A) a pour degré entrant $d_+(s) = \mathrm{card}(A_s)$ où $A_s = A \cap (\{s\} \times S)$ et pour degré sortant $d_-(s) = \mathrm{card}(A'_s)$ où $A_s = A \cap (S \times \{s\})$.



Sommets

Définition - Sommets reliés

On dit que deux sommets $s_1, s_2 \in S$ sont reliés si $(s_1, s_2) \in A$ (cas orienté) ou $\{s_1, s_2\} \in A$ (cas non orienté)

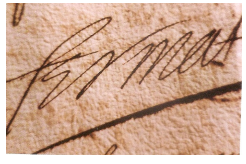
Définition - Degré d'un sommet

Soit $s \in S$ un sommet d'un graphe non orienté (S, A) a pour degré $d(s) = \mathrm{card}(A_s)$ où $A_s = \{a \in A \mid s \in a\}$. Soit $s \in S$ un sommet d'un graphe orienté (S, A) a pour degré entrant $d_+(s) = \mathrm{card}(A_s)$ où $A_s = A \cap (\{s\} \times S)$ et pour degré sortant $d_-(s) = \mathrm{card}(A'_s)$ où $A_s = A \cap (S \times \{s\})$.

Exercice

Comment définir chemin d'un sommet à un autre ?

Et graphe connexe ?



⇒ Graphe et relations sur E

⇒ Relations d'ordre

1. Problèmes

2. Graphe
   - 2.1. Formalisation
   - 2.2. Vocabulaire
   - 2.3. Applications

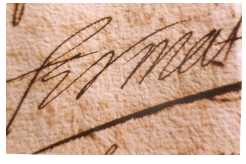
3. Relations binaires
   - 3.1. Construction et représentation
   - 3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre
   - 4.1. Définitions
   - 4.2. Ensemble avec ordre total
   - 4.3. Ensemble avec ordre partiel



Commentaires...

On retrouvera très vite les graphes dans le cours sur les relations binaires, plus loin en probabilité et algèbre linéaire (chaine de Markov), ou en informatique...A l'occasion, nous verrons en informatique, un façon supplémentaire et pratique de coder/définir un graphe à l'aide de matrice...



⇒ Graphe et relations sur E

⇒ Relations d'ordre

1. Problèmes

2. Graphe
   - 2.1. Formalisation
   - 2.2. Vocabulaire
   - 2.3. Applications

3. Relations binaires
   - 3.1. Construction et représentation
   - 3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre
   - 4.1. Définitions
   - 4.2. Ensemble avec ordre total
   - 4.3. Ensemble avec ordre partiel

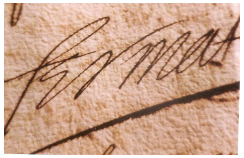


Première approche (par un graphe)

Définition - Relation

Soit E un ensemble.

Une relation binaire sur E est un sous-ensemble G de $E \times E$. Si $(x, y) \in E^2$ on écrit $x \mathscr{R} y$ lorsque $(x, y) \in G$.

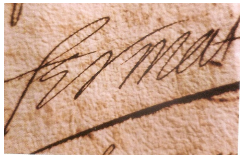


Première approche (par un graphe)

Définition - Relation

Soit E un ensemble.
Une relation binaire sur E est un sous-ensemble G de $E \times E$. Si $(x, y) \in E^2$ on écrit $x \mathscr{R} y$ lorsque $(x, y) \in G$.

On peut représenter une relation par un graphe (diagramme sagittal) : une représentation de $E \times E$ et avec des flèches on indique que x (du premier E) est en relation à y (du second E).

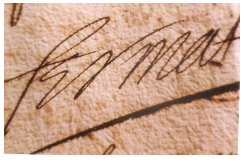


Première approche (par un graphe)

Définition - Relation

Soit E un ensemble.
Une relation binaire sur E est un sous-ensemble G de $E \times E$. Si $(x, y) \in E^2$ on écrit $x \mathscr{R} y$ lorsque $(x, y) \in G$.

On peut représenter une relation par un graphe (diagramme sagittal) : une représentation de $E \times E$ et avec des flèches on indique que x (du premier E) est en relation à y (du second E).
Exemple Stade Toulousain



Première approche (par un graphe)

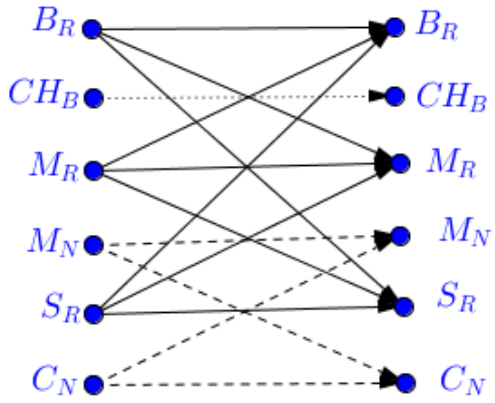
Définition - Relation

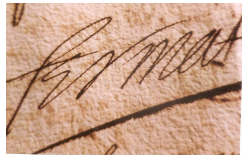
Soit E un ensemble.
Une relation binaire sur E est un sous-ensemble G de $E \times E$. Si $(x, y) \in E^2$ on écrit $x \mathscr{R} y$ lorsque $(x, y) \in G$.

On peut représenter une relation par un graphe (diagramme sagittal) : une représentation de $E \times E$ et avec des flèches on indique que x (du premier E) est en relation à y (du second E).

Exemple Stade Toulousain

Voir



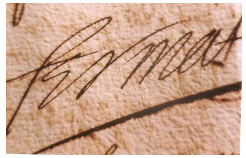


Exercice

Exercice

On peut définir dans l'ensemble $\{0,1,2,3,4,5,6\}$ les relations $\mathscr{R}_1$ "est un multiple de" ou $\mathscr{R}_2$ "est le double de".

Expliciter G_1, G_2 et les diagrammes sagittaux de ces deux relations.



⇒ Graphe et relations sur E

⇒ Relations d'ordre

1. Problèmes

2. Graphe
   - 2.1. Formalisation
   - 2.2. Vocabulaire
   - 2.3. Applications

3. Relations binaires
   - 3.1. Construction et représentation
   - 3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre
   - 4.1. Définitions
   - 4.2. Ensemble avec ordre total
   - 4.3. Ensemble avec ordre partiel

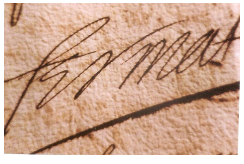


Vocabulaire

Définition - Propriétés des relations

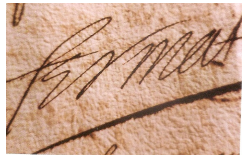
Soit $\mathscr{R}$ une relation sur un ensemble E. On dit que $\mathscr{R}$ est :

- réflexive si $\forall x \in E, x\mathscr{R}x$;
- symétrique si $\forall (x,y) \in E^2, x\mathscr{R}y \Rightarrow y\mathscr{R}x$;
- antisymétrique si $\forall (x,y) \in E^2, x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}x \Rightarrow x = y$;
- transitive si $\forall (x,y,z) \in E^3, x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}z \Rightarrow x\mathscr{R}z$.



Exemple

Exemple Stade Toulousain

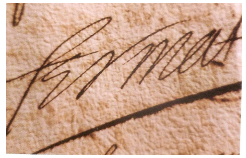


Exemple

Exemple Stade Toulousain

Exercice

Comment se représentent les propriétés précédentes des relations sur un diagramme sagittal ?

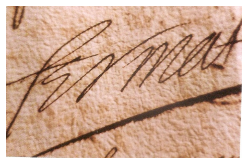


Conclusion

Objectifs

⇒ Graphe et relations sur E

⇒ Relation d'ordre

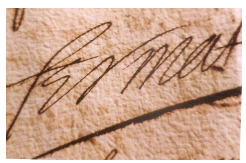


Conclusion

Objectifs

⇒ Graphe et relations sur E

- Garder des images mentales sur les graphes (fini) !

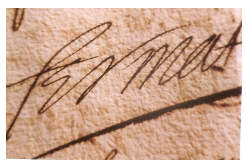


Conclusion

Objectifs

⇒ Graphe et relations sur E

- Garder des images mentales sur les graphes (fini) !
- Sous-ensemble G de E^2 ou application (caractéristique de G) de $E^2 \to \{0,1\}$

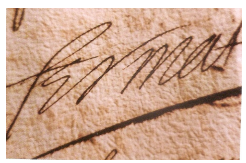


Conclusion

Objectifs

⇒ Graphe et relations sur E

- Garder des images mentales sur les graphes (fini) !
- Sous-ensemble G de E^2 ou application (caractéristique de G) de $E^2 \to \{0,1\}$
- Vocabulaire. Relation : réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive.

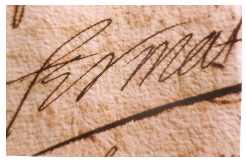


Conclusion

Objectifs

⇒ Graphe et relations sur E

⇒ Relation d'ordre



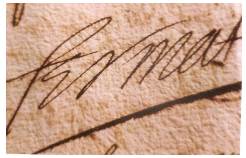
Conclusion

Objectifs

⇒ Graphe et relations sur E

⇒ Relation d'ordre

- Définition d'une relation $\mathscr{R}$ entre deux objets (graphes).



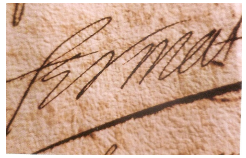
Conclusion

Objectifs

⇒ Graphe et relations sur E

⇒ Relation d'ordre

- Définition d'une relation $\mathscr{R}$ entre deux objets (graphes).
- Propriétés particulières : reflexivité, transitivité, symétrie, antisymétrie



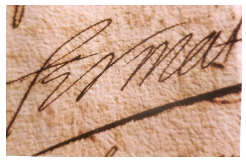
Conclusion

Objectifs

⇒ Graphe et relations sur E

⇒ Relation d'ordre

- Définition d'une relation $\mathscr{R}$ entre deux objets (graphes).
- Propriétés particulières : reflexivité, transitivité, symétrie, antisymétrie
- Relation d'ordre : reflexivité, transitivité, antisymétrie. Totale ou non.



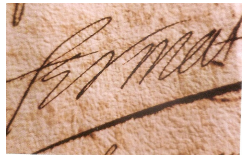
Conclusion

Objectifs

⇒ Graphe et relations sur E

⇒ Relation d'ordre

- Définition d'une relation $\mathscr{R}$ entre deux objets (graphes).
- Propriétés particulières : reflexivité, transitivité, symétrie, antisymétrie
- Relation d'ordre : reflexivité, transitivité, antisymétrie. Totale ou non.
- Nombreux exemples...



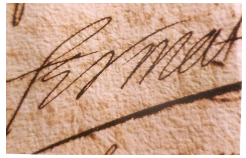
Conclusion

Objectifs

⇒ Graphe et relations sur E

⇒ Relation d'ordre

- Définition d'une relation $\mathscr{R}$ entre deux objets (graphes).
- Propriétés particulières : reflexivité, transitivité, symétrie, antisymétrie
- Relation d'ordre : reflexivité, transitivité, antisymétrie. Totale ou non.
- Nombreux exemples...
- Vocabulaire : majorant, plus grand élément, borne supérieure



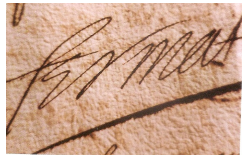
Conclusion

Objectifs

⇒ Graphe et relations sur E

⇒ Relation d'ordre

- Définition d'une relation $\mathscr{R}$ entre deux objets (graphes).
- Propriétés particulières : reflexivité, transitivité, symétrie, antisymétrie
- Relation d'ordre : reflexivité, transitivité, antisymétrie. Totale ou non.
- Nombreux exemples...
- Vocabulaire : majorant, plus grand élément, borne supérieure
- Relation d'ordre strict



Conclusion

Objectifs

⇒ Graphe et relations sur E

⇒ Relation d'ordre

Pour la prochaine fois

- Lecture du cours : Chap 12 - Relations binaires
  4. Relations d'équivalence
- Exercice n°233 (d'autres termes : avec limites)
- TD :
  Jeudi - 8h-10h : N° 235, 238, 240, 244
  Vendredi - 10h-12h : N° 237, 239, 241, 244
- Contrôle de calculs : Fiches 18 et 20

