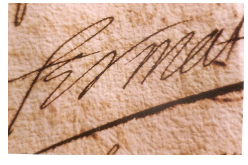


# Leçon 30 - Fonctions primitives et équations différentielles



**⇒Définir le vocabulaire associé aux équations différentielles**

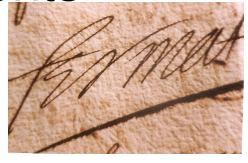
**⇒Méthode de résolution des équations différentielles linéaire d'ordre 1**

1. Problèmes

2. Primitives

3. Intégrales et primitives

4. Equations différentielles (dérivation/intégration tordue)
   - 4.1. Vocabulaire
   - 4.2. Equation différentielle linéaire d'ordre 1
   - 4.3. Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants



**⇒Définir le vocabulaire associé aux équations différentielles**

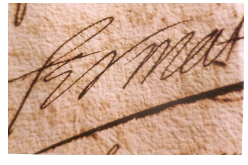
**⇒Méthode de résolution des équations différentielles linéaire d'ordre 1**

1. Problèmes

2. Primitives

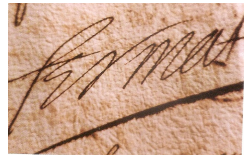
3. Intégrales et primitives

4. Equations différentielles (dérivation/intégration tordue)
   - 4.1. Vocabulaire
   - 4.2. Equation différentielle linéaire d'ordre 1
   - 4.3. Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants



# Remarque ! !

$\mathbb{K}$ désigne toujours $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Insistons : ici $a, b, c$ **sont constants**
(l'année prochaine, vous élargirez ce point de vue)



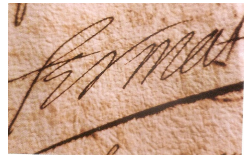
# Remarque ! !

$\mathbb{K}$ désigne toujours $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Insistons : ici $a, b, c$ **sont constants**
(l'année prochaine, vous élargirez ce point de vue)

## Définition - Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3, a \neq 0$ et $u : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur l'intervalle $I$ de $\mathbb{R}$.
On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ est solution de l'équation différentielle du second ordre à coefficients constants $(E) \quad ay'' + by' + cy = u(t)$ si

1. $f$ est deux fois dérivable sur $I$
2. $\forall t \in I,\ af''(t) + bf'(t) + cf(t) = u(t)$



# Ensemble des solutions (structure)

On considère donc l'équation homogène

$(H) \quad ay'' + by' + cy = 0 \quad a \neq 0.$

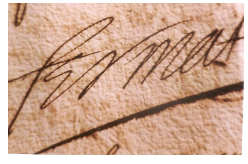


# Ensemble des solutions (structure)

On considère donc l'équation homogène

$(H) \quad ay'' + by' + cy = 0 \quad a \neq 0.$

**Analyse** Composition $F_{-\alpha} \circ F_{-\beta}$



# Ensemble des solutions (structure)

On considère donc l'équation homogène

$(H) \quad ay'' + by' + cy = 0 \quad a \neq 0.$

**Analyse** Composition $F_{-\alpha} \circ F_{-\beta}$

Cette analyse ne marche pas si $\alpha = \beta$.



# Ensemble des solutions (structure)

On considère donc l'équation homogène

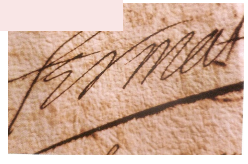
$(H) \quad ay'' + by' + cy = 0 \quad a \neq 0.$

**Analyse** Composition $F_{-\alpha} \circ F_{-\beta}$

Cette analyse ne marche pas si $\alpha = \beta$.

## Théorème - Cas complexe

- Si $ar^2 + br + c = 0$ possède deux racines distinctes $r_1$ et $r_2$ alors l'ensemble des solutions à valeurs dans $\mathbb{C}$ est :
$$S_H = \left\{ t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}; (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$
- Si $ar^2 + br + c = 0$ possède une racine double $r_0 \in \mathbb{C}$ alors l'ensemble des solutions à valeurs dans $\mathbb{C}$ est :
$$S_H = \left\{ t \mapsto (\lambda + \mu t) e^{r_0 t}; (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$



# Ensemble des solutions (structure)

On considère donc l'équation homogène

$(H) \quad ay'' + by' + cy = 0 \quad a \neq 0.$

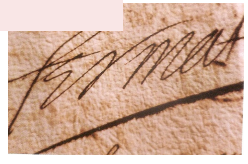
**Analyse** Composition $F_{-\alpha} \circ F_{-\beta}$

Cette analyse ne marche pas si $\alpha = \beta$.

## Théorème - Cas complexe

- Si $ar^2 + br + c = 0$ possède deux racines distinctes $r_1$ et $r_2$ alors l'ensemble des solutions à valeurs dans $\mathbb{C}$ est :
$$S_H = \left\{ t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}; (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$
- Si $ar^2 + br + c = 0$ possède une racine double $r_0 \in \mathbb{C}$ alors l'ensemble des solutions à valeurs dans $\mathbb{C}$ est :
$$S_H = \left\{ t \mapsto (\lambda + \mu t) e^{r_0 t}; (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

**Démonstration**



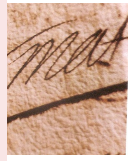
# Selon le signe de $\Delta$. Sur $\mathbb{R}$

Pour le cas réel, la partie correspondant aux racines complexes ($\Delta < 0$) est plus subtile.

## Théorème - Cas réel

On suppose ici $a, b, c$ réels, $a \neq 0$.

- Si $ar^2 + br + c = 0$ possède deux racines réelles distinctes $r_1$ et $r_2$ alors l'ensemble des solutions à valeurs dans $\mathbb{R}$ est :
$$S_H = \left\{ t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} ; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$
- Si $ar^2 + br + c = 0$ possède une racine double $r_0 \in \mathbb{R}$ alors l'ensemble des solutions à valeurs dans $\mathbb{R}$ est :
$$S_H = \left\{ t \mapsto (\lambda + \mu t) e^{r_0 t} ; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$
- Si $ar^2 + br + c = 0$ possède deux racines complexes conjuguées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ alors l'ensemble des solutions à valeurs dans $\mathbb{R}$ est :
$$S_H = \left\{ t \mapsto \lambda e^{\alpha t} \cos \beta t + \mu e^{\alpha t} \sin \beta t ; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

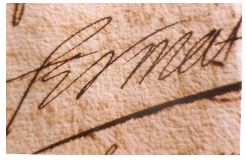


# Selon le signe de $\Delta$. Sur $\mathbb{R}$

Pour la démonstration, commençons par un lemme

## Lemme - Solution réelle d'une équation réelle

Soit $(H)$ l'équation différentielle homogène $ay'' + by' + cy = 0$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, a \neq 0$.
Si $f$ est solution de $(H)$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ alors $\mathbf{Re}f$ est solution de $(H)$ à valeurs réelles.
Plus précisément l'ensemble des solutions réelles de $(H)$ est exactement l'ensemble des parties réelles des solutions complexes de $(H)$.



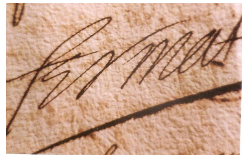
# Selon le signe de $\Delta$. Sur $\mathbb{R}$

Pour la démonstration, commençons par un lemme

## Lemme - Solution réelle d'une équation réelle

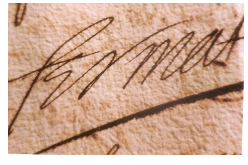
Soit $(H)$ l'équation différentielle homogène $ay'' + by' + cy = 0$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, a \neq 0$.
Si $f$ est solution de $(H)$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ alors $\mathbf{Re}f$ est solution de $(H)$ à valeurs réelles.
Plus précisément l'ensemble des solutions réelles de $(H)$ est exactement l'ensemble des parties réelles des solutions complexes de $(H)$.

**Démonstrations**



# Selon le signe de $\Delta$. Sur $\mathbb{R}$

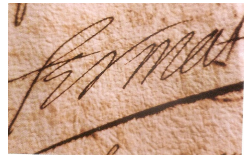
**Remarque** Autre expression pour le cas $\Delta < 0$



# Selon le signe de $\Delta$. Sur $\mathbb{R}$

**Remarque** Autre expression pour le cas $\Delta < 0$

**Remarque** Base d'une espace vectoriel



# Selon le signe de $\Delta$. Sur $\mathbb{R}$

**Remarque** Autre expression pour le cas $\Delta < 0$

**Remarque** Base d'une espace vectoriel

Exercice

Résoudre les équations différentielles suivantes (on cherchera les solutions réelles).

1. $y'' = \omega^2 y$
2. $y'' = -\omega^2 y$
3. $y'' - 4y' + 13y = 0$
4. $y'' - 4y' + 4y = 0$



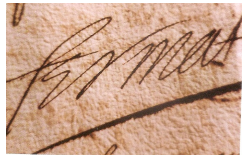
# Résolution avec second membre

On considère l'équation complète $(E)\quad ay'' + by' + cy = u(t)$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3, a \neq 0$.

## Théorème - Structure de l'ensemble $S_E$

La solution générale de l'équation $(E)$ est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène associée $(H)$, ce qui peut aussi s'écrire :
Si $\widetilde{y}$ est une solution particulière de l'équation $(E)$ et $(f_1, f_2)$ une base de $S_H$ alors

$$S_E = \left\{ t \mapsto \lambda f_1(t) + \mu f_2(t) + \widetilde{y}(t); (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \right\}.$$



# Résolution avec second membre

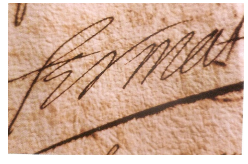
On considère l'équation complète $(E)$ $\quad ay'' + by' + cy = u(t)$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3, a \neq 0$.

## Théorème - Structure de l'ensemble $S_E$

La solution générale de l'équation $(E)$ est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène associée $(H)$, ce qui peut aussi s'écrire :
Si $\widetilde{y}$ est une solution particulière de l'équation $(E)$ et $(f_1, f_2)$ une base de $S_H$ alors

$$S_E = \left\{ t \mapsto \lambda f_1(t) + \mu f_2(t) + \widetilde{y}(t); (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \right\}.$$

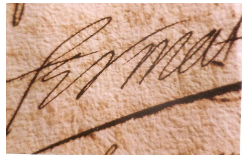
**Démonstration**



# Principe général

## Proposition - Principe de superposition des solutions

Si le second membre de l'équation $(E)$ est de la forme
$u(t) = u_1(t) + \cdots + u_n(t)$
et si l'on connaît des solutions particulières $\widetilde{y}_1, \ldots, \widetilde{y}_n$ des équations avec les seconds membres $u_1(t), \ldots, u_n(t)$,
alors une solution particulière de $(E)$ est $\widetilde{y} = \widetilde{y}_1 + \cdots + \widetilde{y}_n$.

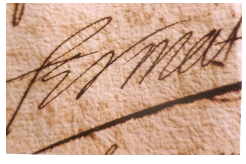


# Principe général

## Proposition - Principe de superposition des solutions

Si le second membre de l'équation $(E)$ est de la forme
$u(t) = u_1(t) + \cdots + u_n(t)$
et si l'on connaît des solutions particulières $\widetilde{y}_1, \ldots, \widetilde{y}_n$ des équations avec les seconds membres $u_1(t), \ldots, u_n(t)$,
alors une solution particulière de $(E)$ est $\widetilde{y} = \widetilde{y}_1 + \cdots + \widetilde{y}_n$.

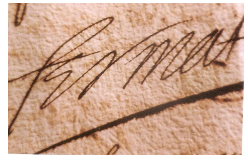
**Remarque** Démonstration



# Avec second membre : exponentielle-polynôme

On va s'intéresser au cas où $u(t) = e^{mt}P(t)$ avec $m \in \mathbb{C}$ et $P$ une fonction polynomiale à valeurs complexes.

Le théorème qui suit peut être lu comme un savoir-faire.



# Avec second membre : exponentielle-polynôme

On va s'intéresser au cas où $u(t) = e^{mt}P(t)$ avec $m \in \mathbb{C}$ et $P$ une fonction polynomiale à valeurs complexes.
Le théorème qui suit peut être lu comme un savoir-faire.

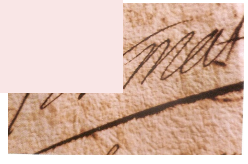
## Théorème - Second membre $e^{mt}P(t)$

Soit $m \in \mathbb{C}$ et $P$ une fonction polynomiale de degré $n$. Alors on peut trouver une solution particulière de l'équation

$$(E) \quad ay'' + by' + cy = e^{mt}P(t)$$

de la forme $\tilde{y}(t) = e^{mt}Q(t)$ où $Q$ est une fonction polynomiale

- de degré $n$ si $m$ n'est pas racine de $ar^2 + br + c = 0$
- de degré $n+1$ si $m$ est racine simple de $ar^2 + br + c = 0$
- de degré $n+2$ si $m$ est racine double de $ar^2 + br + c = 0$



# Avec second membre : exponentielle-polynôme

On va s'intéresser au cas où $u(t) = e^{mt}P(t)$ avec $m \in \mathbb{C}$ et $P$ une fonction polynomiale à valeurs complexes.
Le théorème qui suit peut être lu comme un savoir-faire.

## Théorème - Second membre $e^{mt}P(t)$

Soit $m \in \mathbb{C}$ et $P$ une fonction polynomiale de degré $n$. Alors on peut trouver une solution particulière de l'équation

$$(E) \quad ay'' + by' + cy = e^{mt}P(t)$$

de la forme $\widetilde{y}(t) = e^{mt}Q(t)$ où $Q$ est une fonction polynomiale

- de degré $n$ si $m$ n'est pas racine de $ar^2 + br + c = 0$
- de degré $n+1$ si $m$ est racine simple de $ar^2 + br + c = 0$
- de degré $n+2$ si $m$ est racine double de $ar^2 + br + c = 0$



**Démonstration**

# Polynôme× fonction trigonométrique

**Analyse** Polynôme trigonométrique



# Polynôme× fonction trigonométrique

**Analyse** Polynôme trigonométrique

## Savoir-faire. Second membre de la forme $e^{\alpha t}(P(t)\cos\beta t + Q(t)\sin\beta t)$

On peut trouver (par identification) une solution particulière de l'équation

$$(E) \quad ay'' + by' + cy = e^{\alpha t}(P(t)\cos t\beta t) + Q(t)\sin t\beta t))$$

de la forme $\widetilde{y}(t) = e^{\alpha t}(T(t)\cos t\beta t) + R(t)\sin t\beta t))$ où $T$ et $R$ sont des fonctions polynomiales

- de degré $n = \max(\deg(P), \deg(Q))$ si $\alpha + i\beta$ n'est pas racine de $ar^2 + br + c = 0$
- de degré $n+1 = \max(\deg(P), \deg(Q)) + 1$ si $\alpha + i\beta$ est racine simple de $ar^2 + br + c = 0$



# Exercices

Exercice

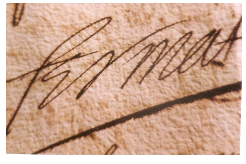
1. Résoudre $y'' - y' - 2y = 3e^{-t} + 1$.
2. Résoudre $y'' + 2y' + 5y = \cos^2 t$.



# Avec conditions initiales (problème de Cauchy)

## Théorème - Conditions initiales

Soit $(E)\quad ay'' + by' + cy = u(t)$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3, a \neq 0$ et $u : I \to \mathbb{K}$ de l'une des formes précédentes. Soit $(t_0, y_0, y_0') \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$.
Alors il existe une unique solution $f : I \to \mathbb{K}$ telle que $f(t_0) = y_0$ et $f'(t_0) = y_0'$.

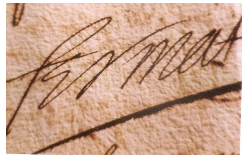


# Avec conditions initiales (problème de Cauchy)

## Théorème - Conditions initiales

Soit $(E)\quad ay''+by'+cy=u(t)$ avec $(a,b,c)\in\mathbb{K}^3, a\neq 0$ et $u:I\to\mathbb{K}$ de l'une des formes précédentes. Soit $(t_0,y_0,y_0')\in I\times\mathbb{K}\times\mathbb{K}$.
Alors il existe une unique solution $f:I\to\mathbb{K}$ telle que $f(t_0)=y_0$ et $f'(t_0)=y_0'$.

La démonstration est simple : les deux conditions initiales fixent les deux valeurs des deux variables libres $\lambda$ et $\mu$.



# Avec conditions initiales (problème de Cauchy)

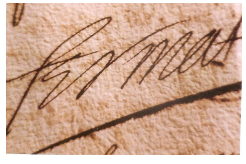
## Théorème - Conditions initiales

Soit $(E)\quad ay''+by'+cy=u(t)$ avec $(a,b,c)\in\mathbb{K}^3, a\neq 0$ et $u:I\to\mathbb{K}$ de l'une des formes précédentes. Soit $(t_0,y_0,y_0')\in I\times\mathbb{K}\times\mathbb{K}$.
Alors il existe une unique solution $f:I\to\mathbb{K}$ telle que $f(t_0)=y_0$ et $f'(t_0)=y_0'$.

La démonstration est simple : les deux conditions initiales fixent les deux valeurs des deux variables libres $\lambda$ et $\mu$.

Exercice

Résoudre le problème de Cauchy : $y''-2y'+y=te^t$ avec les conditions $y(0)=0$ et $y'(0)=1$.

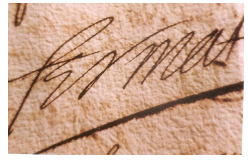


# Conclusion

**Objectifs**

⇒ Inégalité différentielle (d'ordre 1)

⇒ Méthode de résolution des équations différentielles linéaire d'ordre 2 à coefficients constants



# Conclusion

**Objectifs**

⇒ Inégalité différentielle (d'ordre 1)

- Recollement

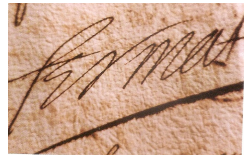


# Conclusion

**Objectifs**

⇒ Inégalité différentielle (d'ordre 1)

- Recollement
- Application aux inégalités différentielles : rectification de la torsion, et exploitant la positivité d'une dérivée.

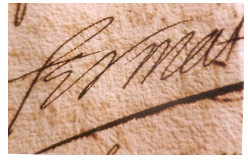


# Conclusion

**Objectifs**

⇒ Inégalité différentielle (d'ordre 1)

- Recollement
- Application aux inégalités différentielles : rectification de la torsion, et exploitant la positivité d'une dérivée.

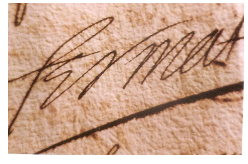


# Conclusion

**Objectifs**

⇒ Inégalité différentielle (d'ordre 1)

⇒ Méthode de résolution des équations différentielles linéaire d'ordre 2 à coefficients constants



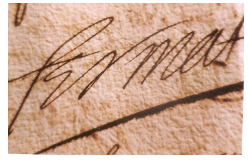
# Conclusion

**Objectifs**

⇒ Inégalité différentielle (d'ordre 1)

⇒ Méthode de résolution des équations différentielles linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

- Structure des solutions : espace affine



# Conclusion

**Objectifs**

⇒ Inégalité différentielle (d'ordre 1)

⇒ Méthode de résolution des équations différentielles linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

- Structure des solutions : espace affine
- Equation homogène



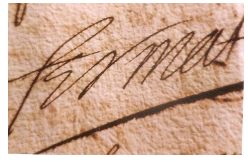
# Conclusion

**Objectifs**

⇒ Inégalité différentielle (d'ordre 1)

⇒ Méthode de résolution des équations différentielles linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

- Structure des solutions : espace affine
- Equation homogène
- Résolution explicite : résolution d'un trinôme à coefficients constants (cas sur $\mathbb{C}$)

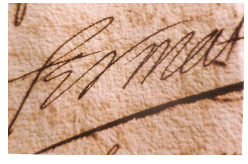


# Conclusion

**Objectifs**

⇒ Inégalité différentielle (d'ordre 1)

⇒ Méthode de résolution des équations différentielles linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

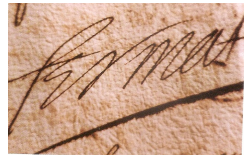


# Conclusion

**Objectifs**

⇒ Inégalité différentielle (d'ordre 1)

⇒ Méthode de résolution des équations différentielles linéaire d'ordre 2 à coefficients constants



# Conclusion

**Objectifs**

⇒ Inégalité différentielle (d'ordre 1)

⇒ Méthode de résolution des équations différentielles linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

**Pour la prochaine fois (jeudi19/11)**

- Lecture : Construction d'ensembles numériques
- Exercice n°199

