Chapitre 13

Construction d'ensembles numériques : des entiers à la droite réelle

Résumé -

Ce chapitre est comme une application du chapitre sur les relations pour donner une assise mathématique satisfaisante aux ensembles bien connus des élèves car largement utilisés. Dans l'histoire, ces constructions se sont passés à la fin du XIX siècle. Cela faisait des siècles (voire des millénaires) que certains de ces ensembles étaient exploités...

Il n'y a au fond qu'un seul problème : comment donner du sens aux ensembles : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *et* $\mathbb{C}$ *?*

Quelques vidéos sur internet :

- *Yvan Monka - Ils sont fous, ces nombres ! - Classification - https ://www.youtube.com/watch ?v=kL-eMNZiARM*
- *Exo7Maths - Nombres réels - https ://www.youtube.com/watch ?v=NCWWVven9Cs*
- *Science4all - La diagonale dévastatrice de Cantor - https ://www.youtube.com/watch ?v=xqSKawORrPo*

Sommaire

1. Problèmes 266
2. Nombres algébriques 267
2.1. Nombres entiers 267
2.2. Nombres rationnels 269
2.3. Nombres algébriques 270
3. Construction de $\mathbb{R}$ 270
3.1. Couple de suites bissecantes 270
3.2. Construction de $\mathbb{R}$ 271
3.3. Relation d'ordre 273
3.4. Corps $\mathbb{R}$ 274
3.5. Fonctions classiques associées à $\mathbb{R}$ 277
4. Parties de $\mathbb{R}$ et topologie 279
4.1. Bornes supérieure et inférieure 279
4.2. Densité de $\mathbb{D}$ et de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ 282
5. Bilan 284

1. Problèmes

? Problème 62 - Construction des entiers naturels

Au milieu du XIXième siècle, les mathématiciens se sont rendus compte que leurs sens leur faisaient défaut lorsqu'ils ont découvert les géométrie non euclidienne. Il a fallu tout reconstruire sur des bases très solides.
Comment construire l'ensemble des entiers sans équivoque!

? Problème 63 - Construction des entiers relatifs, des rationnels

Une fois que les entiers $1,2,3\ldots$ sont définis, ainsi que le 0, comment définir proprement les nombres entiers négatifs.
A savoir que dans l'histoire, les fractions sont apparues bien avant les nombres négatifs!
Nous verrons en algèbre générale qu'il est souvent préférable d'avoir un corps plutôt qu'un anneau (tous les éléments sont inversibles).
Comment définir alors proprement l'ensemble des fractions $\frac{a}{b}$ et justifier l'égalité $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, alors que $a\neq c$ et $b\neq d$?
Une fois que la construction est acquise (avec les lois + et ×), comment généraliser sur $\mathbb{Q}$ la relation d'ordre $\leqslant$ définie sur $\mathbb{Z}$?

? Problème 64 - Construction des réels

Pour le familier de la calculatrice (ou de Python), les nombres réels sont obtenus en écrivant les nombres décimalement quitte à ce que cette écriture soit infini. Cela marche bien; la preuve : le sur-développement des ordinateurs et autres objets numériques.
Comment faire cette construction et surtout comment gérer la problématique $1-0,999\ldots9\cdots=0$, donc la non unicité d'écriture de certains nombres réels.
Là aussi : comment définir la relation d'ordre?

? Problème 65 - Construction des réels

Une autre possibilité : exploiter le principe de la dichotomie. Cela rappelle la méthode des coupures de DEDEKIND, en séance de cours-TP.
Pouvons-nous dès maintenant anticiper cette méthode?

? Problème 66 - Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

La construction de $\mathbb{R}$ conduit à voir tous les éléments de $\mathbb{R}$ comme limite d'éléments de $\mathbb{Q}$.
On dit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ (associé à la continuité, c'est une propriété très forte!).
Et pourtant, les cardinaux de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont-ils comparables? Existe-t-il une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Q}$? de $\mathbb{Q}$ sur $\mathbb{R}$?

2. Nombres algébriques

2.1. Nombres entiers

Nombres entiers naturels

On commence par admettre la construction de l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$.

Heuristique - Nombres entiers naturels

La construction suivante est dûe à Péano. Soit E un ensemble non vide, possédant un élément de référence et dont tous les éléments ont un unique successeur (différent de l'élément de référence).
Cet élément de référence se note 0 (ou 1, selon). Puis on définit l'addition +1 comme le passage d'un nombre à son successeur.
On a ainsi les bases pour un raisonnement par récurrence et l'ensemble des entiers.
Ce qui suit est en fait assez naturel, même si cela peut paraître un peu compliqué la première fois qu'on le voit...

Théorème - Construction de PÉANO

Il existe un ensemble $\mathbb{N}$ non vide, munie d'une loi s (comme successeur) telle que :
- $\mathbb{N}$ étant non vide, il admet une élément premier noté 0.
- Pour tout élément $a \in \mathbb{N}$, il existe $b \in \mathbb{N}^*$ tel que $b = s(a)$.
- s est injective ($s(a) = s(a') \Rightarrow a = a'$)

Remarque - Addition +1

$s(a)$ correspond à la classique addition $+1$.
L'habitude consiste à associer à l'élément $s \circ s \circ \cdots s(0)$, le nombre n égal au nombre de fois que s est utilisé

Proposition - Opérations sur $\mathbb{N}$

On définit l'addition sur $\mathbb{N}$ par : $a + b = s^a(0) + s^b(0) = s^{a+b}(0)$.
On a $a + b = b + a$.
La multiplication est alors la répétition de l'addition : $a \times b = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{b \text{ fois}}$
On a $a \times b = b \times a$.

Proposition - Relation d'ordre

$\mathbb{N}$ est naturellement ordonné (récursivement) :
$\forall\, a \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant_{\mathbb{N}} a$
puis $\forall\, a, b \in \mathbb{N}^*,\ a \leqslant_{\mathbb{N}} b \iff s^{-1}(a) \leqslant_{\mathbb{N}} s^{-1}(b)$.
L'ordre est total.

Et il existe un algorithme, qui termine, permettant de connaître le plus petit entre a et b :

Informatique - Ordre

```
def petit(a,b):
    c,d=a,b
    while c>0 and d>0 :
        c,d=c-1,d-1
    if c==0:
        return(a)
    else :
        return(b)
```

Nombres entiers relatifs

Ensuite on construit l'ensemble des entiers relatifs. On propose ici un exercice.

Heuristique - Problématique

La problématique : l'addition à trou (ou recherche d'une opération réciproque) n'est qu'à moitié possible. En effet, elle dépend de la relation d'ordre entre les nombres soustraits.
Il faut donc créer un premier ensemble, afin que toute soustraction de nombres entiers soit possible.
Mais certaines soustractions peuvent conduire à un « même » résultat

Exercice
Sur $\mathbb{N}^2$,

1. Montrer que $\sim_1$ définie par :
$$(a,b) \sim_1 (c,d) \iff a+d = c+b$$
est une relation d'équivalence.
2. Montrer que tout couple (a,b) est dans la classe d'un couple $(0,d)$ ou $(d,0)$ selon que $a \leqslant b$ ou $a \geqslant b$
3. En déduire la construction de $\mathbb{Z}$ comme équivalent à l'ensemble $\dfrac{\mathbb{N}^2}{\sim_1}$

Exemple - Le nombre -2

Proposition - Opération sur $\mathbb{Z}$

L'ensemble $\mathbb{Z}$ est l'ensemble $\dfrac{\mathbb{N}^2}{\sim_1}$ (des classes d'équivalence sur $\mathbb{N}^2$ de la loi $\sim_1$).
On définit alors la relation d'ordre totale $\leqslant_{\mathbb{Z}}$ par :
$$\overline{(a,b)} \leqslant_{\mathbb{Z}} \overline{(c,d)} \iff a+d \leqslant_{\mathbb{N}} c+b$$
L'addition est alors simplement : $\overline{(a,b)} +_{\mathbb{Z}} \overline{(c,d)} = \overline{(a +_{\mathbb{N}} c, b +_{\mathbb{N}} d)}$
La multiplication est plus compliquée :
$$\overline{(a,b)} \times_{\mathbb{Z}} \overline{(c,d)} = \overline{(a \times_{\mathbb{N}} c +_{\mathbb{N}} b \times_{\mathbb{N}} d, b \times_{\mathbb{N}} c +_{\mathbb{N}} a \times_{\mathbb{N}} d)}$$

Remarque - La difficulté : l'indépendance au représentant

Il faut bien vérifier que chacune de ces définitions est indépendantes du représentant de la classe d'équivalence.
Ainsi : si $\overline{(a,b)} = \overline{(a',b')}$ *et* $\overline{(c,d)} + \overline{(c',d')}$,
alors $(a+c)+(b'+d') = (a+b')+(c+d') = (a'+b)+(c'+d) = (a'+c')+(b+d)$.
donc on a bien : $(a+c, b+d) \sim_1 (a'+c', b'+d')$.
Ainsi la définition de $+_{\mathbb{Z}}$ *est bien indépendante des représentants choisis.*

Exemple - Multiplication

Démonstration

Exercice
Montrer que l'ordre est total

2.2. Nombres rationnels

La construction de $\mathbb{Q}$ est en tout point équivalente à la construction de $\mathbb{Z}$, mais pour un problème lié à la multiplication (et donc division) au lieu de l'addition (et donc la multiplication).

Exercice
Sur $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$,

1. Montrer que $\sim_2$ définie par :
$$(a,b)\sim_2(c,d) \iff a\times_{\mathbb{Z}} d = c\times_{\mathbb{Z}} b$$
est une relation d'équivalence.
2. Montrer la construction de $\mathbb{Q}$ comme équivalent à l'ensemble $\frac{\mathbb{Z}\times\mathbb{N}}{\sim_2}$
3. Montrer que $\leqslant_{\mathbb{Q}}$ définie par $(a,b)\leqslant_{\mathbb{Q}}(c,d)$ ssi $a\times_{\mathbb{Z}} d\leqslant_{\mathbb{Z}} b\times_{\mathbb{Z}} c$ définie bien une relation d'ordre sur $\mathbb{Q}$
4. Comment définir $+_{\mathbb{Q}}$ et $\times_{\mathbb{Q}}$

Il faudrait vérifier que $\mathbb{Q}$ est bien un corps (addition, multiplication inversible) compatible avec $\leqslant_Q$. Cela se fait sans grande difficultés...

Proposition - Opération sur $\mathbb{Q}$
L'ensemble $\mathbb{Q}$ est l'ensemble $\frac{\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*}{\sim_2}$ (des classes d'équivalence sur $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ de la loi $\sim_2$).
On définit alors la relation d'ordre total $\leqslant_{\mathbb{Q}}$ par :
$$\overline{(a,b)}\leqslant_{\mathbb{Q}}\overline{(c,d)} \iff a\times_{\mathbb{Z}} d\leqslant_{\mathbb{Z}} c\times_{\mathbb{Z}} b$$
La multiplication est alors simplement : $\overline{(a,b)}\times_{\mathbb{Q}}\overline{(c,d)} = \overline{(a\times_{\mathbb{Z}} c, b\times_{\mathbb{Q}} d)}$
L'addition est plus compliquée : $\overline{(a,b)}+_{\mathbb{Q}}\overline{(c,d)} = \overline{(a\times_{\mathbb{Z}} d +_{\mathbb{Z}} b\times_{\mathbb{Z}} c, b\times_{\mathbb{Z}} d)}$.
L'ordre est total (démonstration comme pour comme pour $\leqslant\mathbb{Z}$).

Pour aller plus loin - Comment définir π simplement ?
Nous savons que le périmètre d'une forme régulière est proportionnel à son agrandissement.
Donc pour un cercle, il existe une constante telle que son périmètre est égale au produit de cette constante par le diamètre : $p = C\times d$. Par définition, on peut appeler pi1 π_1 cette constante.
Ou bien, de même nous savons que la surface d'une forme régulière est proportionnel au carré de son agrandissement.
Donc pour un disque, il existe une constante telle que son aire est égale au produit de cette constante par le carré du rayon : $S = C'\times r^2$. Par définition, on peut appeler π_2 cette constante.
L'enjeu : montrer que $\pi_1 = \pi_2$...

Pour aller plus loin - Généralisation
Ce principe qui permet de passer de l'anneau $\mathbb{Z}$ au corps des fractions $\mathbb{Q}$ est un principe régulièrement repris en mathématiques.
On suivra exactement ce même principe pour décrire le corps des fractions de polynômes $\mathbb{K}(X)$ à partir de l'anneau des polynômes : $\mathbb{K}[X]$

2.3. Nombres algébriques

La plupart du temps les nombres se définissent par une phrase, qui elle même se traduit en une équation (polynomiale).
On définit alors :

Définition - Nombre algébrique
Un nombre r est un nombre algébrique si il existe une fonction polynomiale P à coefficients entiers telle que $P(r) = 0$.
Si n est le plus petit degré d'un polynôme vérifiant cette relation, on dit que r est algébrique d'ordre n

Exemple - Nombres rationnels

Exemple - Nombres quadratiques

Pour aller plus loin - Nombres irrationnels
Ce fut un choc dans l'antiquité lorsqu'on compris que $\sqrt{2}$, qui existe bien (longueur de la diagonale du carré de côté 1), n'est pas une nombre rationnel. Quel type de nombre est-ce ?
Si l'on considère des nombres irrationnels (i.e. non rationnels) dans leur singularité, on n'en trouve pas beaucoup, ils sont en effet difficile à définir.

D'autres nombres, toujours « naturels » ne s'expriment pas à partir d'une équation polynomiale à coefficients entiers. C'est le cas de π ou de e.

Définition - Nombre transcendant
Si r n'est pas algébrique, on dit qu'il est transcendant.

Démontrer qu'un nombre donné est transcendant n'est pas une mission évidente.

Pour aller plus loin - Problème ouvert
Est-ce que γ est un nombre transcendant ou algébrique ?
Par définition, $\gamma = \lim(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n)$

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites bissecantes

Heuristique - Un ensemble ordonné, sans trou
La bonne idée : il s'agit d'un ensemble totalement ordonné, sans trou. Le schéma mental associé est donc celle de la ligne droite orientée (avec une origine et un sens).
Le théorème clé sur le nombre réel est alors le théorème des valeurs intermédiaires, vus en classe de seconde.
Pour « démontrer » ce théorème, une excellente idée est d'exploiter la dichotomie, que nous appellerons, selon la tradition mathématiques, la bissection. Nous construirons $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$ et de cette méthode algorithme de bissection.

On considère $\mathbb{Q}$ muni de la relation d'ordre total $\leqslant_{\mathbb{Q}}$ définie sur $\mathbb{Q}$.

***Pour aller plus loin - Coupures de* DEDEKIND**
La méthode des bissecantes proposée ici est propre à ce cours, efficace, mais un peu bricolée (même si c'est un beau bricolage ;-).)
On aurait pu reprendre les coupures de Dedekind, méthode plus aboutie, peut-être.
Une coupure (de $\mathbb{Q}$) est un couple (A,B) de parties de $\mathbb{Q}$ tel que $A \cup B = \mathbb{Q}$, $A \cap B = \emptyset$ et $\forall\, a \in A, b \in B$, $a \leqslant_Q b$ et enfin tel que A n'admet pas d'élément maximal (dans $A \subset Q$).
Ce couple définit un rationnel si B admet un élément minimal (cet élément) et un réel si B n'admet pas d'élément minimal.
On verra un exemple plus loin

Définition - Suites bissecantes de rationnels
Soient (a_n) et (b_n) deux suites de rationnels ($\in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$).
On dit que le couple $\big((a_n),(b_n)\big)$ forme un couple de suites (de rationnels) bissecantes si :

1. $\forall\, n \in \mathbb{N}$, a_n et $b_n \in \mathbb{Q}$ (suites de rationnels)
2. $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant_{\mathbb{Q}} a_{n+1} \leqslant_{\mathbb{Q}} b_{n+1} \leqslant_{\mathbb{Q}} b_n$
   La suite (a_n) est croissante, (b_n) est décroissante et (b_n) majore (a_n)
3. $\epsilon \in \mathbb{Q}_+^*$, (i.e. $0 \leqslant_{\mathbb{Q}} \epsilon$ et $\epsilon \neq 0$) : $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant_Q b_n - a_n \leqslant_{\mathbb{Q}} \epsilon$.

On note $\text{Bis}(\mathbb{Q})$ l'ensemble des couples de (suites de rationnels) bissecantes, et souvent $\begin{cases}(b_n)\searrow\\(a_n)\nearrow\end{cases}$ ses éléments.

Il faut démontrer la majoration de toute la suite (a_n) par la suite (b_n)..

Démonstration

Remarque - $N_\epsilon(a_n,b_n)$ ou N_ϵ
L'ensemble $A_\epsilon := \{n\in\mathbb{N}; b_n - a_n \leqslant_{\mathbb{Q}} \epsilon\}$ est non vide, inclus dans $\mathbb{N}$, donc admet un plus petit élément.
On le notera systématiquement $N_\epsilon(a_n,b_n)$ ou N_ϵ (si on n'a pas besoin de préciser les suites (a_n) et (b_n)).
On a par ailleurs, par croissance de (a_n) et décroissance de (b_n) :
$\forall\ n\in\mathbb{N}, \forall\ p\in\mathbb{N}, 0\leqslant_{\mathbb{Q}} b_{n+p}-a_{n+p}\leqslant_{\mathbb{Q}} b_n-a_n$,
et donc $A_\epsilon = [\![N_\epsilon,\infty[\![$.

Exemple - Dichotomie et $\sqrt{2}$

Pour aller plus loin - Coupures de* DEDEKIND*. Exemple
On note $A=\{\frac{p}{q} \mid pq<0 \text{ ou } p^2<2q^2\}$ et $B=\{\frac{p}{q}\mid p^2\geqslant 2q^2\}$.
Par construction : $A\cup B=\mathbb{Q}$, $A\cap B=\emptyset$ et $\forall\ a\in A, b\in B$, $a\leqslant_Q b$ car $a^2\leqslant 2\leqslant b^2$.
A n'admet pas d'élément maximal (exercice plus loin - non trivial sans indication). Cette coupure définit le nombre $\sqrt{2}$, réel car B n'admet pas d'élément minimal.

Heuristique - $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$. Et « quotientage »
Nous savons que cet exemple nous donne deux suites qui convergent vers $\sqrt{2}$, qui n'est pas rationnels (alors qu'il s'agit bien de suite de rationnels).
Nous cherchons à définir les nombres réels comme limite de telles suites. Mais un nombre réel peut être limite de deux couples de bissecantes distincts. Nous allons donc devoir quotienter, c'est-à-dire reconnaître comme égales deux suites qui conduisent au même nombre.

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

Préordre sur $\text{Bis}(\mathbb{Q})$ et conséquence.

Avant cela commençons par un lemme.

Lemme - Pré-transtivité
Considérons quatre suites de rationnels (a_n), (c_n), (d_n) et (f_n) telles que (a_n) est croissante, (f_n) décroissante et $\begin{cases} (d_n)\searrow \\ (c_n)\nearrow \end{cases} \in \text{Bis}(\mathbb{Q})$ un couple de bissecantes.
Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant_{\mathbb{Q}} d_n$ et $c_n \leqslant_{\mathbb{Q}} f_n$,
alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant_{\mathbb{Q}} f_n$

Démonstration

Définition - (et propriété) de préordre
On note $\preceq_{\text{Bis}}$ la relation :
$\begin{cases} (b_n)\searrow \\ (a_n)\nearrow \end{cases} \preceq_{\text{Bis}} \begin{cases} (d_n)\searrow \\ (c_n)\nearrow \end{cases}$ si et seulement si $\forall\ n \in \mathbb{N}\ a_n \leqslant_{\mathbb{Q}} d_n$.
Il s'agit d'une relation de préordre (i.e. réflexive et transitive)

Démonstration

Ensemble quotienté

A partir d'une relation de préordre, on définit une relation d'équivalence, naturellement... C'est l'ensemble $\mathbb{R}$.

Définition - Relation d'ordre sur les couples de bissecantes
On considère deux couples de suites bissecantes $\big((a_n),(b_n)\big)$ et $\big((c_n),(d_n)\big)$.
On dit que $\big((a_n),(b_n)\big)$ est similaire à $\big((c_n),(d_n)\big)$ si $\begin{cases} (b_n)\searrow \\ (a_n)\nearrow \end{cases} \preceq_{\text{Bis}} \begin{cases} (d_n)\searrow \\ (c_n)\nearrow \end{cases}$ et $\begin{cases} (d_n)\searrow \\ (c_n)\nearrow \end{cases} \preceq_{\text{Bis}} \begin{cases} (b_n)\searrow \\ (a_n)\nearrow \end{cases}$ ou encore : $\big((a_n),(b_n)\big)$ est similaire à $\big((c_n),(d_n)\big)$ si

$$\forall\ n \in \mathbb{N}, c_n \leqslant_{\mathbb{Q}} b_n \text{ et } a_n \leqslant_{\mathbb{Q}} d_n$$

Il s'agit d'une relation d'équivalence.
On dira par la suite que $\big((a_n),(b_n)\big)$ et $\big((c_n),(d_n)\big)$ définissent le même réel.
Pour cette relation d'équivalence, la relation $\preceq_{\text{Bis}}$ est une relation d'ordre.

La démonstration a déjà été vue en toute généralité en fin de chapitre 10.

Définition - Ensemble $\mathbb{R}$
On appelle $\mathbb{R}$, l'ensemble des classes de similarité définies sur l'ensemble des couples de bissecantes.
Formellement :

$$x \in \mathbb{R} \iff \exists \left((a_n),(b_n)\right) \text{couple de bissecantes tel que } x = \overline{\left((a_n),(b_n)\right)}$$

On notera $x = \begin{cases} (b_n)\searrow \\ (a_n)\nearrow \end{cases}$ ou encore $\begin{matrix}(b_n)\searrow \\ (a_n)\nearrow\end{matrix}\ x$.
Il sera donc toujours sous-entendu que :
$\forall\ n \in \mathbb{N}$, $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$ et $\forall\ \epsilon \in \mathbb{Q}_+^*$, $\exists\ N_\epsilon$ tel que $\forall\ n \geqslant N_\epsilon$, $0 \leqslant b_n - a_n \leqslant \epsilon$.

Savoir faire - Manipuler des nombres réels
On peut donc écrire :
Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors il existe $(a_n),(b_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall\ n \in \mathbb{N}, \qquad a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant x \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$$

(avec $0 \leqslant b_{n+1} - a_{n+1} \leqslant_{\mathbb{Q}} \dfrac{1}{2}(b_n - a_n)$).

Il reste à placer géométriquement x... Pour cela on exploite la relation d'ordre :

3.3. Relation d'ordre

Sur les classes d'équivalence, l'égalité est la bonne :

Définition - Relation d'ordre sur l'ensemble $\mathbb{R}$
On considère deux nombres de $\mathbb{R}$, x et y.
On dit que x est inférieur à y, noté $x \leqslant y$, si
pour tous couples $\begin{matrix}(b_n)\searrow \\ (a_n)\nearrow\end{matrix}\ x$ et $\begin{matrix}(d_n)\searrow \\ (c_n)\nearrow\end{matrix}\ y$, on a : $\forall\ n \in \mathbb{N}, a_n \leqslant_Q d_n$.
Il s'agit d'une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.

Savoir faire - Prolongement de l'ordre sur les suites
Si $x \leqslant y$, alors $\forall\ n, m \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant d_m$ i.e. $(a_n) \leqslant_{\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}} (d_n)$.

Démonstration

Proposition - L'ordre est total
Cette relation d'ordre est total. Si $x, y \in \mathbb{R}$, alors ou bien $x \leqslant y$ ou bien $y \leqslant x$.

Démonstration

Heuristique - Extension du cas rationnel

Si $x \in \mathbb{Q}$, alors $x = \overline{\left((x),(x+\frac{1}{2^n})\right)} \in \mathbb{R}$. Donc d'une certaine façon $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
Puis si $x \leqslant_{\mathbb{Q}} y$, alors $x \leqslant y$.
Donc la relation d'ordre définie sur $\mathbb{R}$, prolonge cela définie sur $\mathbb{Q}$.
On peut donc garder la même représentation en passant de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$.
C'est la représentation d'un droite pointillée qui devient ligne continue.

Application - Critère d'infériorité $x \leqslant y$

Exercice
De même montrer que $x \leqslant y$ ssi $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant y$.

3.4. Corps $\mathbb{R}$

La relation d'ordre est donc prolongée. Qu'en est-il des opérations algébriques.
Tout élément non nul est inversible, en exploitant l'inversion sur $\mathbb{Q}$

Définition - Opposé sur $\mathbb{R}$

Soit $x = \left\{ \begin{array}{l} (b_n) \searrow \\ (a_n) \nearrow \end{array} \right.$.

Alors $(-b_n, -a_n) \in \text{Bis}(\mathbb{Q})$. On note $-x = \left\{ \begin{array}{l} (-a_n) \searrow \\ (-b_n) \nearrow \end{array} \right.$

Démonstration

Définition - Addition sur $\mathbb{R}$

Soit $\left((a_n),(b_n)\right) \in \text{Bis}(\mathbb{Q})$ et $\left((c_n),(d_n)\right) \in \text{Bis}(\mathbb{Q})$.
Alors $\left((a_n+c_n),(b_n+d_n)\right) \in \text{Bis}(\mathbb{Q})$.
On définit donc l'addition sur $\mathbb{R}$:

$$x+y = \left\{ \begin{array}{l} (b_n) \searrow \\ (a_n) \nearrow \end{array} \right. + \left\{ \begin{array}{l} (d_n) \searrow \\ (c_n) \nearrow \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} (b_n+d_n) \searrow \\ (a_n+c_n) \nearrow \end{array} \right.$$

On vérifie que $x+(-x)=(-x)+x=0$.

On étend la soustraction par addition avec un nombre négatif (i.e. plus petit que 0, ie $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $a_n \leqslant_{\mathbb{Q}} 0$ ou de manière équivalente : $\exists\, n\in\mathbb{N}$ tel que $b_n \leqslant_{\mathbb{Q}} 0$).

Démonstration

Tout élément non nul est inversible, en exploitant l'inversion sur $\mathbb{Q}$

Définition - Inverse sur $\mathbb{R}$
Inverse sur $\mathbb{R}_+^*$.
Si $0\leqslant x=\begin{cases}(b_n)\searrow\\(a_n)\nearrow\end{cases}$ et $x\neq 0$.
On peut supposer que $a_n>0$, à partir d'un certain rang.
Alors $\left(\frac{1}{b_{n+n_0}},\frac{1}{a_{n+n_0}}\right)\in \mathrm{Bis}(\mathbb{Q})$. On note $\frac{1}{x}=\begin{cases}\left(\frac{1}{a_{n+n_0}}\right)\searrow\\\left(\frac{1}{b_{n+n_0}}\right)\nearrow\end{cases}$
Si $x\leqslant 0$ et $x\neq 0$, on considère l'opposée de l'inverse de l'opposé de x...

Démonstration

Concernant la multiplication, on exploite les segments emboîtés. Mais on est obligé de procéder en plusieurs temps (selon le signe du nombre) pour définition :

Définition - Multiplication sur $\mathbb{R}$
Produit sur $\mathbb{R}_+^*$.
Si $x=0$ ou $y=0$, alors $x\times y=0$.
Si $0<x=\begin{cases}(b_n)\searrow\\(a_n)\nearrow\end{cases}$ et $0<y=\begin{cases}(d_n)\searrow\\(c_n)\nearrow\end{cases}$.
Alors il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que $a_{n_0}>0$ et $c_{n_0}>0$,
et la suite $\left((a_{n+n_0}c_{n+n_0}),(b_{n+n_0}d_{n+n_0})\right)\in \mathrm{Bis}(\mathbb{Q})$,
on définit alors la multiplication $x\times y=\begin{cases}(b_{n_0+n}+d_{n_0+n})\searrow\\(a_{n_0+n}+c_{n_0+n})\nearrow\end{cases}$
On vérifie que pour $x\neq 0$, $x\times\frac{1}{x}=\frac{1}{x}\times x=1$

Démonstration

Exercice
Montrer que $x \times (y+z) = x \times y + x \times z$.

Compatibilité opératoire avec $\leqslant$

On admet les deux premières propositions suivantes. Elles découlent de la construction de $\mathbb{R}$.

Proposition - Compatibilité de la relation d'ordre avec les opérations usuelles
La relation d'ordre usuelle $\leqslant$ est compatible avec les opérations $+$ et $\times$:

$$\begin{array}{lll} \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, & x \leqslant y & \Longrightarrow \quad x+z \leqslant y+z \\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall z \in \mathbb{R}_+, & x \leqslant y & \Longrightarrow \quad xz \leqslant yz \end{array}$$

Démonstration

On en déduit les règles classiques sur la manipulation des inégalités :
Exercice
Montrer les règles d'usage suivantes :

$$\begin{array}{lll} \forall (x,y,x',y') \in \mathbb{R}^4, & \left\{ \begin{array}{l} x \leqslant y \\ x' \leqslant y' \end{array} \right. & \Longrightarrow \quad x+x' \leqslant y+y' \\ \forall (x,y,x',y') \in \mathbb{R}^4, & \left\{ \begin{array}{l} 0 \leqslant x \leqslant y \\ 0 \leqslant x' \leqslant y' \end{array} \right. & \Longrightarrow \quad xx' \leqslant yy' \\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, & x \leqslant y & \Longrightarrow \quad -y \leqslant -x \\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, & 0 < x \leqslant y & \Longrightarrow \quad 0 < \frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{x} \end{array}$$

3.5. Fonctions classiques associées à $\mathbb{R}$

Valeur absolue

Définition - Valeur absolue

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $|x| = \max(x,-x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ (plus grand des deux réels x et $-x$).

$d(x,y) = |x-y|$ mesure la distance entre deux réels x et y de la droite réelle.

Définition - Partie positive, partie négative

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $x^+ = \max(x,0)$ (partie positive du réel x)
et $x^- = \max(-x,0)$ (partie négative du réel x).
Ces deux réels sont POSITIFS.

Exercice

Ecrire $|x|$ en fonction de x^+ et x^-.
Ecrire x^+ en fonction de $|x|$ et de x.

Proposition - Encadrements à connaître

$$|x| \leqslant M \iff -M \leqslant x \leqslant M$$
$$|x| \geqslant M \iff (x \geqslant M \text{ ou } x \leqslant -M)$$
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |xy| = |x|\,|y|$$
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \Big||x| - |y|\Big| \leqslant |x+y| \leqslant |x| + |y|$$
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, d(x,y) \geqslant d(|x|,|y|) \text{ ou } |x-y| \geqslant \Big||x| - |y|\Big|$$

Démonstration

Partie entière

Proposition - Corps archimédien
Comme $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ est archimédien :

$$\forall\ (a,A) \in\in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+, \qquad \exists\ n \in \mathbb{N},\ \text{tel que } na \geqslant A$$

Avec $a = 1$, cela conduit à la définition :

Définition - Partie entière
Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ vérifiant $n \leqslant x < n+1$.
n s'appelle la partie entière de x, on la note $\lfloor x \rfloor$. On a donc

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1 \quad \text{et} \quad x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x.$$

Démonstration

Exercice
Pour tout entier $n \geqslant 1$, montrer :

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

En déduire la partie entière du réel $A = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10\,000}}$.

Savoir faire - Travailler avec la partie décimale
Fréquemment, on exploite également la fonction partie décimale θ : $\theta(x) = x - \lfloor x \rfloor$.
On voit que $\theta(x) \in [0,1[$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

Exercice
Pour tout réel x, déterminer la limite $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \cdots + \lfloor nx \rfloor}{n^2}$

Heuristique - Fonctions usuelles prolongée par encadrement
Les fonctions usuelles puissances irrationnelles et exponentielles sont obtenues par extension des définitions données sur $\mathbb{Q}$, à $\mathbb{R}$, par un argument d'encadrement du type :
$\forall\ x = \overline{((a_n),(b_n))}, y = \overline{((c_n),(d_n))} \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*,\ x^y = \overline{\left(a_n^{c_n}),(b_n^{d_n})\right)}$.

4. Parties de $\mathbb{R}$ et topologie

4.1. Bornes supérieure et inférieure

On commence par quelques rappels de définitions, mais adaptés ici au cas réel :

Définition - Sous-ensemble majoré, minoré, borné
Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On dit que :
- A est majoré s'il existe un réel M tel que, pour tout x de A, on ait $x \leqslant M$.
  M est alors un majorant de A.
- A est minoré s'il existe un réel m tel que, pour tout x de A, on ait $m \leqslant x$.
  m est alors un minorant de A.
- Si A est majoré et minoré, on dit qu'il est borné.

Pour aller plus loin - Rappels
Un majorant M est le plus grand élément de A si et seulement si il appartient également à A.
Un minorant m est le plus petit élément de A si et seulement si il appartient à A

Remarque - Ensemble $\mathbb{N}$
Pour l'ensemble $\mathbb{N}$, on a quelques propriétés :
- *Tout sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.*
- *Tout sous-ensemble non vide et majoré de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.*

Ce résultat n'est pas vrai si l'on remplace $\mathbb{N}$ par $\mathbb{R}$.

Pour aller plus loin - Récurrence
C'est la première propriété ici (avec un raisonnement par l'absurde) qui permet de montrer l'exactitude du raisonnement par récurrence (et aussi de la descente infinie) et aussi la méthode du variant de boucle en informatique.

Rappels :

Définition - Borne inférieure, borne supérieure
Soit $A \subset \mathbb{R}$.
- Si l'ensemble des majorants de A est non vide
  et si il admet un plus petit élément a,
  alors a est appelé borne supérieure de A, on note $a = \sup A$.
  Formellement :

$$\sup A := \min\{M \in \mathbb{R} \mid \forall\ a \in A, a \leqslant M\} \text{ (si non vide)}$$

- Si l'ensemble des minorants de A est non vide
  et si il admet un plus grand élément b,
  alors b est appelé borne inférieure de A, on note $a = \inf A$.
  Formellement :

$$\inf A := \max\{m \in \mathbb{R} \mid \forall\ a \in A, a \geqslant m\} \text{ (si non vide)}$$

Attention - Borne supérieure
Comme son nom ne l'indique pas, la borne supérieure est par définition le plus **petit** élément d'un certain ensemble (celui des majorants).

L'exercice suivant donne des exemples à toujours bien garder dans un coin de sa tête…

Exercice
Déterminer, s'ils existent, le plus grand élément, le plus petit élément, la borne supérieure, la borne inférieure (sur $\mathbb{R}$) des parties suivantes :

$$A = [0,1], \quad B = [0,1[, \quad C = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

Proposition - Condition d'existence de la borne supérieure
Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide. On suppose que A possède un plus grand élément a (resp. plus petit élément b).
Alors A possède une borne supérieure (resp. inférieure) et $\sup A = a$ (resp $\inf A = b$).

Savoir faire - Etudier une borne supérieure
En règle générale, pour obtenir une égalité sur la borne supérieure, on exploite deux inégalités :
- $\forall\ a \in A,\ a \leqslant \sup A$ (minoration de $\sup A$)
- $\forall\ M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\ a \in A,\ a \leqslant M$, alors $M \geqslant \sup A$
  (majoration de $\sup A$, par tous les majorants de A)

On a évidemment des relations symétriques pour la borne inférieure...
Exercice
Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ admettant des bornes supérieures. Montrer que

$$A \subset B \Rightarrow \sup A \leqslant \sup B.$$

Donner un résultat similaires avec les bornes inférieures.

Les deux propositions suivantes donnent des caractérisations *opératoires* (avec lesquelles travailler dans les démonstrations) et donc un nouveau savoir-faire :

Proposition - Caractérisation de la borne sup.
Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$
Alors $x = \sup A$ si et seulement si

$$\begin{cases} \forall\ a \in A,\ a \leqslant x \\ \forall\ \epsilon > 0, \exists\ a_\epsilon \in A \mid, x - \epsilon < a_\epsilon \end{cases}$$

Proposition - Caractérisation de la borne inf.
Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$
Alors $x = \inf A$ si et seulement si

$$\begin{cases} \forall a \in A,\ x \leqslant a \\ \forall \epsilon > 0, \exists a_\epsilon \in A \mid a_\epsilon < x + \epsilon \end{cases}$$

Exemple - $\sup [0,1[$**.**

Démonstration

Le théorème suivant est parfois pris comme caractérisation de $\mathbb{R}$. Nous en avons vu la démonstration dans le cours-TD (il faut une défintion pour $\mathbb{R}$)

Théorème - Existence de la borne supérieure
Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.
Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Attention - Propriété non vérifiée par $\mathbb{Q}$
Cette propriété différencie $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$:
- $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$ admet une borne supérieure (dans $\mathbb{R}$), que l'on notera : $\sqrt{2}$
- mais $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$ (non existence d'un plus petit élément dans $\mathbb{Q}$ de l'ensemble des majorants rationnels).

Heuristique - Manipuler l'ensemble des majorants et non l'ensemble E lui-même

L'ensemble E peut être très compliqué, un ensemble à trous par exemple $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[(1+\frac{1}{n})^n - \frac{1}{n^2}; (1+\frac{1}{n})^n + \frac{1}{n^2}\right]$

Il vaut mieux raisonner sur l'ensemble des majorants $\mathcal{M}$: celui-ci est nécessairement un intervalle :
Mieux (mais on ne le sait pas encore) il s'agit de l'intervalle fermé $[\sup E, +\infty[$.

Exercice
Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{M}(A)$, l'ensemble des majorants de A.
A quoi ressemble $\mathcal{M}(A)$?

Démonstration

Pour aller plus loin - Démonstration de ce résultat
$E = \{r \in \mathbb{Q}^+ \mid r^2 < 2\}$ n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$ en considèrant $s = \frac{p}{q} \mapsto \frac{3p+4q}{2p+3q}$.
Si $s = \frac{p}{q} \in E$, alors $\frac{p^2}{q^2} < 2$ et $s' = \frac{3p+4q}{2p+3q} \in \mathbb{Q}$.
Par ailleurs, $s^2 < s'^2 < 2$.
En effet : $s' > 0$ et $s < s' \Leftrightarrow p(2p+3q) < q(3p+4q) \Leftrightarrow 2p^2 < 4q^2 \Leftrightarrow \frac{p^2}{q^2} < 2$
et $s'^2 < 2 \Leftrightarrow (3p+4q)^2 < 2(2p+3q)^2 \Leftrightarrow 9p^2 + 16q^2 + 24pq < 8p^2 + 18q^2 + 24pq \Leftrightarrow \frac{p^2}{q^2} < 2$
Par conséquent, si $s = \frac{p}{q}$ est le plus petit des majorants de E, alors nécessairement $s \notin E$.
Mais de même si $s = \frac{p}{q} \notin E$, alors $\frac{p^2}{q^2} > 2$ puis $s' = \frac{3p+4q}{2p+3q} \notin E$ est un majorant plus petit !
Il n'est donc pas possible de trouver un majorant, le plus petit, de E dans $\mathbb{Q}$.

Corollaire - Critère de nullité d'un nombre
Un réel a vérifiant $\forall \epsilon > 0, |a| \leqslant \epsilon$ est nul.

Démonstration

On avait déjà fait une démonstration ici par contraposée.

4.2. Densité de $\mathbb{D}$ et de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Ensemble $\mathbb{D}$

Définition - Ensemble des décimaux
Soit $x \in \mathbb{R}$.
On dit que x est un nombre décimal s'il existe $p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ tels que $x = \dfrac{p}{10^n}$.
On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux. On a $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

Remarque - Un nombre décimal...
... c'est tout simplement un nombre qui s'écrit avec une virgule et une fin dans le développement.
Par exemple : $25,456394 = \dfrac{25\,456\,394}{10^6}$

Définition - Valeur décimale approchée
Si $p \in \mathbb{Z}$ est tel que $\frac{p}{10^n} \leqslant x \leqslant \frac{p+1}{10^n}$,
on dit que $\frac{p}{10^n}$ (resp. $\frac{p+1}{10^n}$) est une valeur décimale approchée par défaut (resp. par excès) de x à la précision 10^{-n}.

Proposition - Obtenir la valeur décimale approchée
Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ (resp. $\frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$) est une valeur approchée de x par défaut (resp. par excès) à la précision 10^{-n}.

Démonstration

$\mathbb{D}$ (et $\mathbb{Q}$) denses dans $\mathbb{R}$

Heuristique - Une partie dense?
Une partie X est dense dans $\mathbb{R}$ si elle peut toucher (à $\epsilon > 0$ près - choisi par avance, aussi petit qu'on veut) tous les éléments de $\mathbb{R}$ avec ceux de X.

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \forall \epsilon > 0, \exists r \in X, |x - r| < \epsilon$$

Analyse - Vers une définition équivalente

Définition - Partie dense dans $\mathbb{R}$
Une partie non vide X de $\mathbb{R}$ est dite dense dans $\mathbb{R}$
si elle rencontre tout intervalle ouvert non vide,
c'est-à-dire si pour deux réels a et b, $a < b$, $X \cap]a, b[\neq \emptyset$.

Théorème - Parties denses dans $\mathbb{R}$
$\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Démontrons la densité de $\mathbb{D}$ et celle de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Comme $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$, on en déduira la densité de $\mathbb{Q}$

Démonstration

Par l'absurde :

Corollaire -
Tout intervalle de $\mathbb{R}$ contient donc au moins un rationnel et un irrationnel. On en déduit qu'il y a un rationnel (ainsi qu'un irrationnel) « aussi proche que l'on veut » d'un réel x donné :

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R} \quad : \quad \forall \epsilon > 0, \exists r \in \mathbb{Q}, |x-r| < \epsilon, \qquad \exists \xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, |x-\xi| < \epsilon$$

5. Bilan

Synthèse

⇝ Les ensembles numériques classiques (de $\mathbb{N}$ à $\mathbb{R}$), se déduisent les uns des autres à partir de relation d'équivalence, qui permet d'étendre la relation d'ordre $\leqslant$ toujours totale sur chaque ensemble. Au commencement, l'ensemble $\mathbb{N}$ est la répétition (récursive) de l'addition $+1$.

⇝ Nous proposons ici une construction originale et complète de $\mathbb{R}$, à partir de suite de bissecantes de rationnels. Le processus n'est pas nécessairement à retenir, mais il permet de TOUT démontrer, là où le programme demande d'admettre le théorème de la borne supérieure sur $\mathbb{R}$.

⇝ On termine par définir la fonction valeur absolue, la partie entière sur $\mathbb{R}$. On étend aussi la notion d'intervalle numérique en sur-ensemble et sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Savoir-faire et Truc & Astuce du chapitre

— Savoir-faire - Manipuler des nombres réels
— Savoir-faire - Travailler avec la partie décimale
— Savoir-faire - Etudier une borne supérieure

Notations

Notations	*Définitions*	*Propriétés*	*Remarques*
$\lvert x\rvert$	Valeur absolue de x, $\lvert x\rvert = \max(x,-x)$,	$\lvert x\rvert \geqslant 0$	On note $x_+ = \max(x,0)$, $x_- = \max(-x,0)$. Alors $\lvert x\rvert = x_+ + x_-$, $x = x_+ - x_-$ et $x_+ \geqslant 0$, $x_- \geqslant 0$
$\lfloor x\rfloor$	Partie entière de x. $\lfloor x\rfloor = \sup\{n \in \mathbb{N} \mid n \leqslant x\}$	$\lfloor x\rfloor \in \mathbb{N}$ et $\lfloor x\rfloor \leqslant x < \lfloor x\rfloor + 1$	On note $\theta = x - \lfloor x\rfloor \in [0,1[$, partie fractionnaire ou décimale de x.
$\sup A$	Borne supérieure de A.	Le plus PETIT des éléments plus grand que TOUS les éléments de A	$m = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\, a \in A, a \leqslant m \\ M \geqslant a, \forall\, a \in A \Rightarrow M \leqslant m \end{cases}$

Retour sur les problèmes

62. Par récurrence...
63. Vu en cours (avec deux relations d'équivalence)
64. Vu en cours (avec une relation d'équivalence)

65. Vu en TD-cours

66. Bien que $\overline{Q} = \mathbb{R}$, on a une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Q}$, mais pas de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{R}$.
D'après un théorème de Bernstein, il suffit de montrer qu'il existe une injection de $\mathbb{Q}$ sur $\mathbb{N}$.

On peut prendre $\mathbb{Q} \to \mathbb{N}$, $(\frac{a}{b}) \mapsto 2^{[a\geqslant 0]}3^{|a|}5^b$, injective (non surjective),

on voit qu'en fait pour tout $q \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N}^q$ s'injecte dans $\mathbb{N}$ (infinité de nombres premiers).

Par ailleurs, si il existe $\varphi : \mathbb{N} \to [0,1]$ bijective. On note $\varphi(i) = x_i = 0, x_1^i x_2^i \dots x_n^i \cdots \in [0,1]$ (écriture décimale)

Considérons alors le nombre $X = 0, X_1 X_2, \dots X_n \dots$ tel que $X_i \equiv \varphi(i)_i + 5[10]$.

Nécessairement, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\varphi(i)_i \neq X_i$, donc $\varphi(i) \neq X$.

Ainsi φ n'est pas surjective. Contradiction.