Chapitre 19

Continuité

Résumé -

Nous formalisons ici la notion de continuité. Suivant Bolzano puis Weierstrass qui au XIX siècle ont défini proprement la continuité, il est nécessaire de suivre l'ordre suivant : 1. notion de limite de fonction ; 2. notion de continuité en un point ; 3. notion de continuité sur un intervalle.
Nous verrons qu'en considérant f continue globalement sur son ensemble de définition (intervalle voire segment), nous obtenons des résultats importants d'existence (théorèmes des valeurs intermédiaires, de Weierstrass, de Heine).
Le chapitre se termine par l'extension aux fonctions à valeurs complexes.
Des liens youtube :

- *Jaicompris Maths - fonctions continues : comprendre la définition - le cours et les propriétés. https ://www.youtube.com/watch ?v=uuwlDYw49h4*
- *Maths Adulte - Théorème des valeurs intermédiaires et applications. https ://www.youtube.com/watch ?v=xgENfRQvPrA*
- *Bibmaths.net - Théorème de Bolzano-Weierstrass. https ://www.youtube.com/watch ?v=5WqLT_J8T4s*

Sommaire

1. Problèmes 390
2. Limites (de fonctions) 390
2.1. Définitions 390
2.2. Ordre et limites 395
2.3. Opérations sur les limites 396
2.4. Cas des fonctions monotones 398
2.5. Continuité en un point 399
3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...) 400
3.1. Fonctions continues sur I 400
3.2. Prolongement par continuité 401
3.3. Théorème des valeurs intermédiaires 402
3.4. Cas de l'image d'un segment par f continue 403
3.5. Théorème de la bijection (bis) 405
3.6. Continuité uniforme 407
4. Généralisation aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ 409
4.1. Opérations classiques sur $\mathscr{F}(X,\mathbb{C})$ 409
4.2. Fonctions bornées 409
4.3. Limites 410
4.4. Opérations sur les limites 410
4.5. Continuité 411
5. Bilan 411

1. Problèmes

? Problème 87 - Limite. Propriété algébrique.

Un célèbre ouvrage de mathématique (L'analyse au fil de l'histoire) commence par la citation : « *Qu'est-ce qu'une dérivée ? une limite. Qu'est-ce qu'une intégrale ? Une limite. Qu'est-ce qu'une limite ? Un nombre* »
La notion de limite (on pourrait ajouter de borne supérieure) est au coeur de l'analyse mathématique réelle ou complexe.
Que peut-on faire avec les limites ? En particulier quelles sont les propriétés algébriques du passage à la limite (passage à la limite d'une combinaison linéaire, par exemple) ?
De cette réponse découlera beaucoup de propriétés d'analyse.

? Problème 88 - Qu'est-ce qu'une fonction continue ?

Le théorème des valeurs intermédiaires dont on parle au problème précédent, s'appuie sur l'hypothèse essentielle de continuité.
Mais qu'est-ce qu'une fonction continue ? Si l'on visualise bien la réponse : une fonction que l'on trace « sans lever le crayon », cette réponse ne semble pas passer les canons des définitions mathématiques en MPSI. On aimerait également une réponse que ne soit pas vraiment associé à une représentation graphique.
Comment formaliser la définition de la continuité d'une fonction ?

? Problème 89 - Fonction nulle part continue.

Existe-t-il des fonctions définies en tout point, mais continue nulle part ?

? Problème 90 - Image d'un intervalle par une fonction continue ?

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f continue sur I.
Que peut-on dire de $f(I)$? En particulier, est-il borné ?
Si $f(I)$ est bornée, alors $\sup(f(I))$ existe. A-t-on nécessairement : $\exists\, x_0 \in I$ tel que $f(x_0) = \sup f(I)$?
Faut-il ajouter des conditions nécessaires, suffisantes supplémentaires ?

? Problème 91 - Continuité prolongée

Qu'est-ce que la continuité pour des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$?

2. Limites (de fonctions)

Par la suite I est toujours un intervalle.

2.1. Définitions

Limite

Définition - Limite
Soient f une fonction définie sur $I \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$
et a un élément d'accumulation ou adhérent de I.
On dit que f tend vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ quand x tend vers a si :

$$\forall W \in \mathcal{V}_\ell, \exists V \in \mathcal{V}_a \mid f(I \cap V) \subset W$$

ou de manière équivalente :

$$\forall W \in \mathcal{V}_\ell, f^{-1}(W) := [f \in W] \in \mathcal{V}_a$$

On note $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$.

L'avantage : on a créé une définition unifiée. Elle est même unique pour le cas de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$…
Mais on peut aussi la décomposer en 9 parties.

Remarque - Rappel sur les images réciproques
On note en réalité $f^{-1}(W)$ l'ensemble $\{x \in I \mid f(x) \in W\}$.
On peut aussi trouver la notation vue pour les variables aléatoires : $[f \in W]$ ou $[f = a] = \{x \in E \mid f(x) = a\} = f^{-1}(\{a\})$.
On a alors presque trivialement : $f(f^{-1}(B)) = f([f \in B]) \subset B$ et $B \subset [f \in f(B)] = f^{-1}(f(B))$.

Pour aller plus loin - Point d'adhérent ou d'accumulation
Un point isolé, donc adhérent, ne serait pas un bon candidat pour regarder la limite (on aurait $f^{-1}(W) = \{a\} \notin \mathcal{V}_a$.
Mais comme ici, on se situe dans un intervalle, il n'y a pas de point isolé et on ne peut pas différencier les points adhérents de points d'accumulation.

Analyse - Pourquoi ces deux définitions sont équivalentes ?

Exemple - $x \mapsto x \ln x$

Attention - L'importance de l'intervalle de définition
Notons que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$ n'est pas continue en 0.
En revanche, $f_1 : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$ est continue en 0. Puisqu'ici, par définition de I, la limite de f en 0, impose de regarder $x \to 0^-$.

Ainsi si une fonction f n'est pas définie sur un intervalle (mais une réunion, par exemple), il faudrait préciser la continuité selon quel intervalle. On pourrait écrire ici que f est continue en 0, selon (l'intervalle) $\mathbb{R}_-$.

Attention à l'ordre des quantificateurs

Remarque - Ordre et quantificateurs

On souligne l'ordre des objets et les quantificateurs associés :

1. $\forall$ *associé au voisinage image*
2. $\exists$ *associé au voisinage des antécédents (et qui dépend donc du voisinage image fixé en 1.).*

Remarque - Selon la nature de a et de ℓ

Cette définition recouvre en fait plusieurs définitions suivant que a ou ℓ sont réels ou infinis.

- $a \in \mathbb{R}, \ell \in \mathbb{R}$ *:* $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$ *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x-a| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon$$

- $a \in \mathbb{R}, \ell = +\infty$ *:* $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$ *si*

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x-a| \leqslant \eta \Rightarrow f(x) \geqslant A$$

- $a \in \mathbb{R}, \ell = -\infty$ *:* $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$ *si*

$$\forall A < 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x-a| \leqslant \eta \Rightarrow f(x) \leqslant A$$

- $a = +\infty, \ell \in \mathbb{R}$ $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0, \forall x \in I, x \geqslant B \Rightarrow |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon$$

- $a = +\infty, \ell = +\infty$ $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ *si*

$$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in I, x \geqslant B \Rightarrow f(x) \geqslant A$$

- $a = +\infty, \ell = -\infty$ $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ *si*

$$\forall A < 0, \exists B > 0, \forall x \in I, x \geqslant B \Rightarrow f(x) \leqslant A$$

On peut le résumer en un tableau (à compléter)

	$\ell = -\infty$ $\forall\ A<0 \ldots\ldots f(x)<A$	$\ell \in \mathbb{R}$ $\forall\ \epsilon>0 \ldots\ldots \lvert f(x)-\ell\rvert<\epsilon$	$\ell = +\infty$ $\forall\ A>0 \ldots\ldots f(x)>A$
$a=-\infty$ $\ldots \exists\, B<0$ tq $x<B \Rightarrow \ldots$			
$a=-\infty$ $\ldots \exists\, \eta>0$ tq $\lvert x-a\rvert<\eta \Rightarrow \ldots$			
$a=+\infty$ $\ldots \exists\, B>0$ tq $x>B \Rightarrow \ldots$			

Remarque - Inégalités larges ou strictes

Selon une remarque précédente, les inégalités larges dans les définitions peuvent être remplacées par des inégalités strictes et les voisinages fermés par des voisinages ouverts.

Exemple - Cas simples

Unicité

La seconde partie de la définition est plus efficace, mais elle cache le rôle joué par l'ensemble I de définition de f. Pour la démonstration du théorème qui suit, on exploitera plutôt la première définition.

Lemme - Voisinages séparés
Soient $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$, avec $\ell_1 \neq \ell_2$.
Alors il existe $W_1 \in \mathcal{V}_{\ell_1}$ et $W_2 \in \mathcal{V}_{\ell_2}$ tels que $W_1 \cap W_2 = \emptyset$.

Démonstration

Théorème - Unicité
Si f admet une limite en $a \in \overline{\mathbb{R}}$, celle-ci est unique.
Lorsque $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$ ($(a,\ell) \in \overline{\mathbb{R}}^2$), cette proposition permet donc de parler de « la » limite de f en a et de noter $\ell = \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Cette limite peut être à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Démonstration

Proposition - Limite finie donc bornée
Toute fonction admettant une limite finie en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ est bornée sur un voisinage de a.

Démonstration

Limite à droite, limite à gauche

Définition - Limite à gauche, à droite
Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

— On suppose que $a \in \mathbb{R}$ n'est pas la borne inférieure de I. On dit que f admet $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ pour limite à gauche si la fonction $f_{|I\cap]-\infty,a[}$ admet ℓ pour limite en a, c'est-à-dire :
(cas $\ell = -\infty$) : $\forall A < 0, \exists \eta > 0 \,|\, \forall x \in I,\ a - \eta \leqslant x < a \Rightarrow f(x) < A$
(cas $\ell \in \mathbb{R}$) : $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \,|\, \forall x \in I,\ a - \eta \leqslant x < a \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \epsilon$.
(cas $\ell = +\infty$) : $\forall A > 0, \exists \eta > 0 \,|\, \forall x \in I,\ a - \eta \leqslant x < a \Rightarrow f(x) > A$
On note $f(x) \underset{x\to a, x<a}{\longrightarrow} \ell$ ou $f(x) \underset{x\to a^-}{\longrightarrow} \ell$.

— On suppose que $a \in \mathbb{R}$ n'est pas la borne supérieure de I. On dit que f admet $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ pour limite à droite si la fonction $f_{|I\cap]a,+\infty[}$ admet ℓ pour limite en a, c'est-à-dire
(cas $\ell = -\infty$) : $\forall A < 0, \exists \eta > 0 \,|\, \forall x \in I,\ a \leqslant x < a + \eta \Rightarrow f(x) < A$
(cas $\ell \in \mathbb{R}$) : $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \,|\, \forall x \in I,\ a < x \leqslant a + \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \epsilon$
(cas $\ell = +\infty$) : $\forall A > 0, \exists \eta > 0 \,|\, \forall x \in I,\ a \leqslant x < a + \eta \Rightarrow f(x) > A$
On note $f(x) \underset{x\to a, x>a}{\longrightarrow} \ell$ ou $f(x) \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} \ell$.

Proposition - Limite et limite à gauche et droite
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.
Si a n'est pas une extrémité de I, f admet ℓ pour limite en a si et seulement si f admet ℓ pour limite à gauche et à droite en a et si $f(a) = \ell$.

Si a est une extrémité de I, on a le même résultat en supprimant *limite à gauche* si a est l'extrémité gauche ou *limite à droite* si a est l'extrémité droite.

Caractérisation à l'aide de suites

Théorème - Caractérisation séquentielle
Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un point ou une extrémité de I. Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.
On a $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ si et seulement si pour toute suite réelle (u_n) de points de I ayant pour limite a, la suite $(f(u_n))$ a pour limite ℓ.

Remarque - Convergence de suites et voisinage
On a (u_n) converge vers ℓ
ssi $\forall\, \epsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall\, n > N, |u_n - \ell| < \epsilon$.
ssi $\forall\, W \in \mathcal{V}_\ell$, *il existe* $V \in \mathcal{V}_{+\infty}$ *tel que* $\forall\, n \in \mathbb{N} \cap V, u_n \in W$.

Démonstration

Exercice
Prouver que la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $x \mapsto \sin \dfrac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0.
De même on prouverait que les fonctions sin ou cos n'ont pas de limite en $+\infty$.

2.2. Ordre et limites

Théorème - Passage à la limite dans les inégalités
Soient f, g deux fonctions définies sur I intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$.
On suppose que sur un voisinage V de a on a $f(x) \leqslant g(x)$ et que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell'$. Alors $\ell \leqslant \ell'$.

Démonstration

Exercice
Refaire la démonstration en exploitant le théorème sur les suites.

Théorème - Théorème de limite par encadrement, dit « des gendarmes' »
Soient f, g, h trois fonctions définies sur un voisinage V de $a (\in \overline{I})$ et $\ell \in \mathbb{R}$.
On suppose que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell$ et que $\forall x \in V,\ f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$.
Alors le fonction g admet une limite en a et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell$.

Démonstration

On a un résultat analogue au théorème précédent pour les limites infinies.

Théorème - Divergence vers $+\infty$ par minoration (resp. $-\infty$ par majoration)
Soient f et g deux fonctions définie sur un voisinage V de $a \in \overline{I}$ telles que $\forall x \in V,\ f(x) \leqslant g(x)$. Alors

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty \Longrightarrow g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$$

$$g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty \Longrightarrow f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$$

Démonstration

2.3. Opérations sur les limites

Théorème - Composition des limites
Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$, $g \in \mathscr{F}(J,\mathbb{R})$, $f(I) \subset J$.
Soit $a \in \overline{I}$ (élément ou extrémité de I). On suppose que $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b$ et que $g(y) \underset{y\to b}{\longrightarrow} \ell$. Alors

$$g \circ f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell.$$

Démonstration

On voit ici l'idée principale de la définition des limites de fonctions : penser en application réciproque (de l'arrivée vers le départ)

Lemme -
Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$ et g bornée, au voisinage de $a \in \overline{I}$,
alors $(f \times g)(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$

Démonstration

Rappelons que nous avons vu que $f_\lambda : x \mapsto \lambda x$ (pour $\lambda \neq 0$) admet une limite en tout a égale à λa.
Et de même $h : x \mapsto \frac{1}{x}$ admet une limite en tout $a \in \mathbb{R}^*$ égale à $\frac{1}{a}$, une limite nulle en $+\infty$ et en $-\infty$.

Théorème - Opération sur les limites
On suppose que f et g ont des limites respectives $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell' \in \overline{\mathbb{R}}$ en $a \in \overline{I}$.
Alors :
- $|f|$ a une limite en a qui est $|\ell|$;
- lorsque $\lambda\ell$ n'est pas une forme indéterminée, λf a une limite qui est $\lambda\ell$;
- lorsque $\ell + \ell'$ n'est pas une forme indéterminée, $f + g$ a une limite qui est $\ell + \ell'$;
- lorsque $\ell\ell'$ n'est pas une forme indéterminée, fg a une limite qui est $\ell\ell'$;
- si $\ell' \neq 0$, il existe un voisinage de a sur lequel g ne s'annule pas et la restriction de $\dfrac{1}{g}$ à ce voisinage a une limite en a qui est $\dfrac{1}{\ell'}$.

Démonstration

Exercice
Montrer que si $g \to 0$, alors $|\frac{1}{g}| \to +\infty$.
Si on maitrise le signe de $\frac{1}{g}$ (constant au voisinage de a), on peut trouver $\lim \frac{1}{g}$.

2.4. Cas des fonctions monotones

Dans le cas des fonctions monotones, on obtient un résultat sur l'existence des limites similaires à celui obtenu pour les suites monotones.

Théorème - Théorème de la limite monotone
Soient $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ et $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction monotone.
- si f est croissante majorée, alors f admet une limite finie en b égale à $\sup\{f(x), x \in]a,b[\}$;
- si f est croissante non majorée, alors $f(x) \underset{x\to b}{\longrightarrow} +\infty$;
- si f est croissante minorée, alors f admet une limite finie en a égale à $\inf\{f(x), x \in]a,b[\}$;
- si f est croissante non minorée, alors $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$;

de même :
- si f est décroissante minorée, alors f admet une limite finie en b égale à $\inf\{f(x), x \in]a,b[\}$;
- si f est décroissante non minorée, alors $f(x) \underset{x\to b}{\longrightarrow} -\infty$;
- si f est décroissante majorée, alors f admet une limite finie en a égale à $\sup\{f(x), x \in]a,b[\}$;
- si f est décroissante non majorée, alors $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$.

Démonstration

Théorème - Limite monotone en touts points
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ monotone. Alors f admet des limites finies à droite et à gauche en tout point de I qui n'est pas une extrémité de I.
Si f est croissante on a : $\lim_{x\to a^-} f(x) \leqslant f(a) \leqslant \lim_{x\to a^+} f(x)$.
Si f est décroissante on a $\lim_{x\to a^+} f(x) \leqslant f(a) \leqslant \lim_{x\to a^-} f(x)$.

Démonstration

Exercice

Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ croissante. On suppose de plus que $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$.
Montrer que f admet une limite en tout point.

2.5. Continuité en un point

Continuité (en un point)

Définition - Continuité en un point x_0
Soit $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$.
Soit $x_0 \in I$. On dit que f est continue en x_0 si $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} f(x_0)$ ce qui peut aussi s'écrire :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \mid \forall\, x \in I, |x - x_0| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \epsilon$$

Histoire - Continuité au XIX
Cauchy introduit en 1821 le concept de fonction continue, en exigeant que des variations indéfiniment petites de x produisent des variations indéfiniment petites de y.
Bolzano (1817) et Weierstrass (1874) furent plus précis : la différence $f(x) - f(x_0)$ peut être arbitrairement petite, à condition qur la différence $x - x_0$ soit suffisamment petite

Remarque - Lien avec les limites
D'après ce que l'on a vu précédemment, f est continue en $x_0 \in I$ si et seulement si elle admet une limite finie en x_0 (égale à $f(x_0)$).

Remarque - Continuité à gauche, à droite
On peut également définir la continuité à gauche, ou à droite en x_0.

Discontinuité(s)

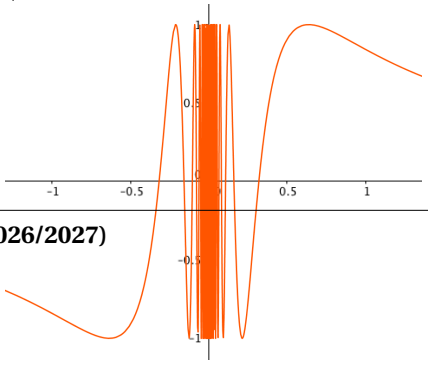
Définition - Discontinuité de deux types
On dit qu'une fonction f définie sur l'intervalle I possède en un point $a \in \mathring{I}$ une discontinuité de première espèce ou une discontinuité simple si f est discontinue en ce point mais que $\lim_{a^+} f$ et $\lim_{a^-} f$ existent.
Tous les autres points de discontinuité sont dits de seconde espèce.

Exercice
Donner un exemple de chacune de ces deux discontinuités.

Caractérisation séquentielle (=à l'aide de suite) de la continuité

Proposition - Caractérisation séquentielle de la continuité
Soit $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ et $x_0 \in I$. Alors f est continue en x_0 si et seulement si pour

Représentation - Fonction sans limite



La fonction $x \mapsto \sin\frac{1}{x}$ n'admet pas de limite en 0.

toute suite réelle (u_n) de points de I convergeant vers x_0, la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(x_0)$.

Démonstration

Corollaire - Limite de suite $u_{n+1} = f(u_n)$
Soit f une fonction continue et (u_n) une suite définie par u_0 et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.
Si (u_n) converge alors sa limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$.

Démonstration

Savoir faire - Démontrer la non-continuité d'une fonction en exploitant les suites
Le théorème précédent fournit un moyen de prouver qu'une fonction n'a pas de limite en a.

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

Continuité sur un intervalle

La définition suivante donne la continuité sur un intervalle. On voit comment la notion de jauge (re)fait son entrée. Elle permet une *sorte* d'interversion des quantificateurs : $\forall\, x_0 \exists\, \eta$:

Définition - Continuité sur un intervalle
Soit $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$.
On dit que f est continue sur I si elle est continue en tout point de I

$$\forall\, x_0 \in I, \forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \mid , \forall\, x \in I, |x - x_0| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \epsilon$$

ou de manière équivalente

$$\forall\, \epsilon > 0 \exists\, \delta_\epsilon : I \to \mathbb{R}_+^* \text{ jauge } \mid \forall\, x_0, x \in I, |x - x_0| \leqslant \delta_\epsilon(x_0) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \epsilon$$

On note $C(I)$ ou $\mathscr{C}^0(I)$ l'ensemble des fonctions continues sur I. ($C(I, \mathbb{R})$ ou $\mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$ s'il y a un risque de confusion sur l'ensemble d'arrivée).

Attention - Fonctions usuelles, continues ?
La plupart des fonctions usuelles sont continues sur leur ensemble de définition, mais il existe des fonctions qui ne sont pas continues partout, par exemple la fonction partie entière ou la fonction indicatrice de $\{0\}$.

Il existe même des fonctions nulle part continues, comme le montre l'exercice suivant

Exercice
Montrer que la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$, $1_{\mathbb{Q}}$, n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$.

Une application : résoudre des équations fonctionnelles
Exercice
On veut déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues vérifiant

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y).$$

1. Déterminer $f(0)$. Montrer que f est impaire.
2. Déterminer la restriction de f à $\mathbb{N}$, à $\mathbb{Z}$, puis à $\mathbb{Q}$.
3. Déterminer finalement f.

Opérations sur les fonctions et continuité

Proposition - Opération de continuité
Si f et g sont deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$, continues en $x_0 \in I$, alors $|f|$, $f+g$, fg sont continues en x_0, ainsi que $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ si $g(x_0) \neq 0$.
On a le même résultat concernant la continuité sur un intervalle I.

Démonstration

Exercice
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit les fonctions f^+ et f^- par $f^+(x) = \max(f(x), 0)$ et $f^-(x) = \max(-f(x), 0)$. Montrer que si f est continue en x_0, alors f^+ et f^- sont continues en x_0.

Proposition - Continuité d'une composée
Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$, $g \in \mathscr{F}(J, \mathbb{R})$, $f(I) \subset J$. Soit $x_0 \in I$. Si f est continue en x_0 et g continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.
On a le même résultat concernant la continuité sur J de g, sur I de f et donc également de $g \circ f$.

Démonstration

3.2. Prolongement par continuité

Savoir faire - Définir f (continue) de X à $\overline{X}$
Si f est définie sur un ensemble X, la continuité de f peut permettre d'étendre f sur $\overline{X}$.

Définition - Prolongement par continuité
Soit I un intervalle.
— Soit $f : I \to \mathbb{R}$, x_0 une extrémité réelle de I, $x_0 \notin I$.
Si f admet une limite réelle ℓ en x_0, alors la fonction $\tilde{f}$ définie sur

$I \cup \{x_0\}$ par

$$\begin{cases} \tilde{f}(x) = f(x) \text{ si } x \neq x_0; \\ \tilde{f}(x_0) = \ell \end{cases}$$

prolonge f à $I \cup \{x_0\}$ et est continue en x_0.

— Si $x_0 \in I$, si f définie sur $I \setminus \{x_0\}$ admet des limites réelles à droite et à gauche en x_0 et si ces limites sont égales (à ℓ) alors la fonction $\tilde{f}$ définie sur I par

$$\begin{cases} \tilde{f}(x) = f(x) \text{ si } x \neq x_0; \\ \tilde{f}(x_0) = \ell \end{cases}$$

prolonge f à I et est continue en x_0.

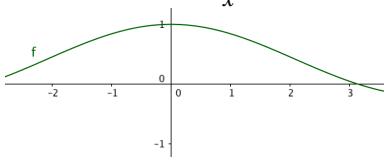
Dans les deux cas $\tilde{f}$ s'appelle le prolongement par continuité de f en x_0.

Exemple - $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$

Remarque - Sur le vocabulaire

Si f n'est pas définie en x_0, il y a une infinité de façon de définir un prolongement de f à $I \cup \{x_0\}$, mais il y a au plus un prolongement qui soit continu, c'est le prolongement par continuité.

Représentation - $\dfrac{\sin x}{x}$



Exercice

Montrer que la fonction $x \mapsto x \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$ est prolongeable par continuité en 0.

Savoir faire - Démontrer la continuité de f sur I ou prolonger la continuité de f sur I

Dans les deux cas, la méthode est la même :

1. On s'assure, par les théorèmes généraux, que f est continue sur I sauf en un point x_0 particulier.
2. Puis on regarde la limite de f en x_0.
   — Si $x_0 \in \mathscr{D}_f$, alors $f(x_0)$ existe. Il s'agit de démontrer la continuité de f en x_0.
   — Si $x_0 \notin \mathscr{D}_f$, alors $f(x_0)$ n'existe pas (ou pas encore).
   Il s'agit de voir si on peut ajouter un point x_0 dans l'ensemble de définition de f. De manière à ce que f reste continue.
   On dit que l'on fait un prolongement par continuité de f.

3.3. Théorème des valeurs intermédiaires

C'est un théorème de surjectivité. L'hypothèse est simple : la continuité de f.

Théorème - Théorème des valeurs intermédiaires

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue.
Soient a et b deux réels, $(a,b) \in I^2$ et $a < b$. On suppose que $f(a) \times f(b) \leqslant 0$.
Alors il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$.

Pour aller plus loin - Exercices

Autre démonstration possible pour l'élève motivé : démontrer le TVI avec l'axiome de la borne supérieure.

La démonstration a été vu au chapitre précédent avec le processus de dichotomie. A savoir (re)faire.

Corollaire - TVI entre $f(a)$ et $f(b)$
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I. Soient a et b deux réels, $(a,b) \in I^2$ et $a < b$. Alors pour toute valeur d comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe $t \in [a,b]$ tel que $f(t) = d$.

Démonstration

Corollaire - Image d'un intervalle par une fonction continue
Soit I un intervalle et f une fonction continue sur I. Alors $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.
Mieux : si I est un connexe de $\mathbb{R}$, alors $f(I)$ est également connexe.

Démonstration

Exercice
Montrer que toute fonction polynomiale de degré impair s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Exercice
Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice
Supposons que f continue et ne s'annule pas. Donc pour tout $t \in [a,b]$, $f(t) \neq 0$.
Soit $\delta : [a,b] \to \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto \alpha(t) > 0$, tel que $f([t-\alpha(t), t+\alpha(t)]) \subset [f(t)-\epsilon, f(t)+\epsilon]$ avec $\epsilon = \left|\frac{f(t)}{2}\right|$.
En appliquant le lemme de Cousin, montrer que f est de signe constant. Conclure.

3.4. Cas de l'image d'un segment par f continue

Théorème - Théorème de Weierstrass
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur le segment $[a,b]$. Alors f est bornée et atteint ses bornes :

$$\exists (x_1, x_2) \in [a,b]^2 \mid f(x_1) = \inf_{x \in [a,b]} f(x) \text{ et } f(x_2) = \sup_{x \in [a,b]} f(x).$$

$f(x_1)$ s'appelle l'infinimum de f et $f(x_2)$ le supremum de f.

Remarque - Mieux
Si f est continue. Si K est un compact de $\mathbb{R}$, alors $f(K)$ est également compact.

Heuristique - Deux résultats!
Il y a en fait deux parties dans ce théorème :
- $f([a,b])$ est borné. C'est l'existence de $\sup_{x \in [a,b]} f(x)$.
- Cette borne supérieure est atteinte : $\exists\, x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$

La démonstration se fera également en deux temps (avec le principe de dichotomie).
On notera que pour cette démonstration, on exploite de deux façons distinctes ce principe :

une fois par l'absurde (méthode ascendante et globale), une fois pour exhiber un nombre en particulier (méthode descendante et locale).

Démonstration

Histoire - Karl Weierstrass



Karl Weierstrass est né le 31 octobre 1815 à Ostenfelde (Westphalie), et est mort le 19 février 1897 à Berlin. C'était un mathématicien allemand, souvent qualifié de « père de l'analyse moderne ». Il a été lauréat de la médaille Copley en 1895.

Exercice

Démontrer le théorème de Weierstrass à l'aide du théorème de Bolzano-Weierstrass.

1. Supposons que f n'est pas bornée sur $[a,b]$.
   Montrer qu'il existe $(x_n) \in [a,b]^{\mathbb{N}}$ tel que $f(x_n) \to +\infty$.
   En déduire une contradiction avec le théorème de Bolzano-Weierstrass.
2. On considère alors $M = \sup f$. Montrer qu'il existe $(y_n) \in [a,b]^{\mathbb{N}}$ tel que $f(y_n) \to M$.
   Conclure avec le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Exercice

Démontrer le théorème de Weierstrass à l'aide du lemme de Cousin.
L'existence d'un maximum est facile dans le cas d'un ensemble fini. En prenant un jauge puis une subdivision pointée bien choisies, on peut réduire à la recherche d'un maximum pour un nombre fini de points

Théorème - Image d'un segment par une fonction continue
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur le segment $[a,b]$. Alors $f([a,b])$ (image directe du segment) est un segment de $\mathbb{R}$.

Démonstration

Exercice
Montrer qu'une fonction périodique, continue sur $\mathbb{R}$, est bornée et atteint ses bornes.

Savoir faire - Montrer l'existence d'un point x tel que ...

Plusieurs possibilités :
- Théorème des valeurs intermédiaires (φ continue sur $]a,b[$) :
  Pour tout $y \in]\varphi(a),\varphi(b)[$ (ou $]\varphi(b),\varphi(a)[$), $\exists\, c \in]a,b[$ tel que $y=\varphi(c)$.
- Théorème de Weierstrass (φ continue sur $[a,b]$) :
  $\exists\, c \in [a,b]$ tel que $\varphi(a) = \sup_{[a,b]} \varphi$
- Principe de dichotomie.
  $\exists\, ([a_n,b_n])_n$ suite de segments emboîtés de limite ℓ telle que...
- Principe de convergence monotone ((a_n) monotone et bornée).
  $\exists\, \ell = \lim(a_n)$.
- Théorème de Bolzano-Weierstrass ((a_n) suite bornée).
  $\exists\, c$, limite d'une sous-suite de (a_n) telle que...
- Théorème de Cauchy ((a_n) suite de Cauchy).
  $\exists\, c$, limite de (a_n) telle que...
- Une autre possibilité au chapitre suivant avec le théorème de Rolle (ou E.A.F.) - (φ dérivable sur $]a,b[$) :
  $\exists\, c \in]a,b[$ tel que $\varphi'(c) = \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}$

Si cela n'est pas naturel, la difficulté consiste à trouver la bonne fonction φ. En particulier, si on cherche un point fixe d'une fonction f, on prend $\varphi : x \mapsto f(x) - x$...

Exercice
Soit f continue sur $[a,b]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) < \alpha$.
Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $\forall\, x \in [a,b]$, $f(x) \leqslant \alpha - \epsilon$.

Exercice
Soit $f : [a,b] \to [a,b]$, continue tel que pour tout $x \neq y \in [a,b]$, $|f(y)-f(x)| < |y-x|$.

1. Montrer que f admet un unique point fixe, noté x_0.
2. On considère la suite (u_n) définie par récurrence par $u_0 \in [a,b]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que $(u_n) \to x_0$.

3.5. Théorème de la bijection (bis)

C'est un théorème d'injectivité. L'hypothèse est simple, en plus de la continuité : la stricte monotonie de f.

Théorème - Injectivité et monotonie stricte
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I. Alors f est injective si et seulement si elle est strictement monotone.

Démonstration

Théorème - Théorème de la bijection
Soit f une fonction définie sur I, continue, strictement monotone sur I (intervalle de $\mathbb{R}$), alors f est bijective de I sur l'intervalle $J = f(I)$.
Sa bijection réciproque f^{-1} est continue sur J, de même sens de variations que f.

Démonstration

Remarque - Un théorème supplémentaire ?
Le dernier point de la démonstration montre que :
si f est monotone sur I et $f(I)$ est un intervalle, alors f est nécessairement continue

3.6. Continuité uniforme

Définition - Fonction uniformément continue
Soit $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$. On dit que f est uniformément continue sur I si

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \,|\, \forall\, (x,y) \in I^2, |x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \epsilon.$$

Attention - Différence entre continuité et uniforme continuité
La différence avec la définition de la continuité en x est que le réel η est le même pour tout $x \in I$.
A comparer :

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \,|\, \forall\, (x,y) \in I^2, |x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \epsilon.$$

$$\forall\, \epsilon > 0, \forall\, x \in I \exists \eta > 0 \,|\, \forall\, y \in I, |x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \epsilon.$$

Attention - Ordre des quantificateurs
Insistons un peu... L'ordre des quantificateurs est important :
- $\exists \cdots \forall \cdots \neq \forall \cdots \exists \cdots$ (l'exercice qui suit donne un contre-exemple)
- En revanche : $\exists \cdots_1 \exists \cdots_2 = \exists \cdots_2 \exists \cdots_1$ et $\forall \cdots_1 \forall \cdots_2 = \forall \cdots_2 \forall \cdots_1$

Proposition - Implication
Une fonction uniformément continue sur I est continue sur I.

Démonstration

Il existe une réciproque, dans le cadre des fonctions définie sur un segment. C'est le théorème de Heine :

Théorème - Théorème de Heine
Une fonction continue sur un segment de $\mathbb{R}$ est uniformément continue sur ce segment.

Remarque - Démonstration
Pour faire cette démonstration, nous allons exploiter le lemme de Cousin.
Il s'agit en fait de rendre η constant minimal (mais non nul). Ce serait simple si $\inf \eta > 0$.
Mais en fait, bien que $\forall\, x \in I, \eta(x) > 0$, on n'a pas assurément $\inf \eta > 0$.
Nous faisons la démonstration avec le lemme de Cousin, car il se joue ici la même manipulation que pour manipuler l'intégrale de Kurzweil-Henstock (que nous verrons - définie avec un jauge variable) est plus subtile que l'intégrale de Riemann (vue ailleurs - définie avec un jauge constante, grâce au théorème de Heine).

Pour aller plus loin - Propriété de compacité
Dans la démonstration, on peut voir le passage de l'étude sur un ensemble infini (même pas dénombrable de points) - $\forall\, x, y$, à l'étude pour un nombre fini de points - t_k.
C'est vraiment la propriété de compacité

Remarque - Faire un schéma de la démonstration !
Pour les démonstrations topologiques, il faut faire des dessins !

Pour aller plus loin - $\inf$ d'une réunion
On a exploité ici : $\inf_{x \in A \cup B} f(x) = \min(\inf_{x \in A} f(x), \inf_{x \in B} f(x))$.

Démonstration

Pour aller plus loin - Principe de prolongement

Si une propriété est vraie pour tout x sur un de ses voisinages, et vérifie la sous-additivité pour la fonction d'intervalle associée, alors cette propriété est vraie sur tout le segment (compact) sur lequel est étudié le problème

Remarque - Commentaires sur la démonstration

En fait on peut dire les choses autrement :

— *f est continue sur I, si*

$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta : I \to \mathbb{R}_+^*$ (jauge) telle que $\forall\, x \in I, |y-x| \leqslant \delta(t) \Longrightarrow |f(y)-f(x)| \leqslant \epsilon$

— *f est uniformément continue sur I, si*

$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ (jauge **CONSTANTE**) telle que $\forall\, x \in I, |y-x| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(y)-f(x)| \leqslant \epsilon$

On comprend ainsi bien l'emploi du mot uniforme dans uniforme continuité.
On comprend également bien pourquoi l'uniforme continuité implique la continuité sur I (l'hypothèse est plus restrictive).
Enfin, la démonstration indique que si $[a,b]$ est un compact (segment de $\mathbb{R}$ - fermé et borné), alors il est possible de le considérer avec une propriété de finitude. On peut alors prendre $\delta = \min \delta(t_k)$, ce qui permet de passer de la continuité à la continuité uniforme.

Exercice

Soit f continue sur $[a,b]$ et $\epsilon > 0$.
On note pour tout $\alpha < \beta \in [a,b]$,

$$G(\alpha,\beta) = 0 \text{ si } \exists\, \delta > 0 \mid \forall\, x,y \in [\alpha,\beta], |x-y| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \epsilon$$

et $G(\alpha,\beta) = 1$, sinon.

1. Montrer que G est sous-additive (on pourra utiliser la continuité en β)
2. Montrer que si $G(a,b) = 1$, on a une contradiction.
3. En déduire que f est uniformément continue sur $[a,b]$

Exercice

Il s'agit de démontrer le théorème de Heine avec le théorème de Bolzano-Weierstrass.
On considère f continue sur $[a,b]$ et par l'absurde, on suppose que f n'est pas uniformément continue.

1. Formaliser cette dernière hypothèse. On considèrera un tel ϵ.
2. Montrer qu'il existe deux suites (x_n) et (y_n) de $[a,b]$ telles que $(x_n - y_n) \to 0$ mais pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f(x_n)-f(y_n)| > \epsilon$

3. Aboutir à une contradiction en exploitant le théorème de Bolzano-Weierstrass

Exercice

1. Montrer que si f est lipschitzienne sur I alors f est uniformément continue sur I.
   Montrer que sinus est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ (donc uniformément continue sur $\mathbb{R}$).
2. Montrer que $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0,+\infty[$ mais n'est pas lipschitzienne sur $[0,+\infty[$.
3. Montrer que $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $[0,+\infty[$.

Pour aller plus loin - Fonction lipschitzienne
On dit que f est lipschitzienne sur I si :
il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall\, x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|$$

4. Généralisation aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

Soit X une partie de $\mathbb{R}$.

4.1. Opérations classiques sur $\mathscr{F}(X,\mathbb{C})$

Définition - Transformations classiques
A partir de $f \in \mathscr{F}(X,\mathbb{C})$, on définit les applications suivantes à valeurs dans $\mathbb{R}$:
• $|f|$ (module de f) : $\forall x \in X, |f|(x) = |f(x)|$
• $\mathrm{Re}f$ (partie réelle de f) : $\forall x \in X, (\mathrm{Re}f)(x) = \mathrm{Re}(f(x))$
• $\mathrm{Im}f$ (partie imaginaire de f) : $\forall x \in X, (\mathrm{Im}f)(x) = \mathrm{Im}(f(x))$
On définit également $\overline{f}$, fonction conjuguée de f, à valeurs dans $\mathbb{C}$, par $\forall x \in X, \overline{f}(x) = \overline{f(x)}$

4.2. Fonctions bornées

Définition - Fonctions à valeurs complexes bornées
On dit que $f \in \mathscr{F}(X,\mathbb{C})$ est bornée si la fonction $|f| \in \mathscr{F}(X,\mathbb{R})$ est majorée, c'est-à-dire si

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in X, |f(x)| \leqslant M.$$

Attention - Majoration dans $\mathbb{C}$
Dire qu'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$ est majorée, ou minorée, n'a pas de sens.

Proposition - Stabilité pour fonctions bornées
$f \in \mathscr{F}(X,\mathbb{C})$ est bornée si et seulement si $\mathrm{Re}f$ et $\mathrm{Im}f$ ($\in \mathscr{F}(X,\mathbb{R})$) sont bornées.
Toute combinaison linéaire et tout produit de deux fonctions bornées sont des fonctions bornées.

Démonstration

4.3. Limites

Définition - Limite de fonction complexe
On dit que la fonction f à valeurs dans $\mathbb{C}$ admet le complexe ℓ pour limite en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ (ou que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a) si la fonction à valeurs réelles $|f-\ell|$ tend vers 0 en a.

Attention - Pas de limite infinie pour des fonctions à valeurs complexes
On ne définit pas de limite infinie pour une fonction à valeurs complexes...

Proposition - Critère de convergence
Soit f une fonction à valeurs complexes, $\ell \in \mathbb{C}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$.
Alors f admet ℓ pour limite en a si et seulement si les fonctions $\mathrm{Re}f$ et $\mathrm{Im}f$ admettent respectivement $\mathrm{Re}\ell$ et $\mathrm{Im}\ell$ pour limite en a.
On en déduit que si f admet une limite en a, celle-ci est unique.

Démonstration

Proposition - Limite donc bornée
Si f admet une limite en $a \in \overline{\mathbb{R}}$, alors f est bornée au voisinage de a.

Démonstration

4.4. Opérations sur les limites

Proposition - Bilan
Soient $f, g \in \mathscr{F}(X, \mathbb{C})$, $(\ell, m) \in \mathbb{C}^2$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.

On suppose que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ et $\lim_{x\to a} g(x) = m$. Alors

$$\lim_{x\to a} |f|(x) = |\ell|$$
$$\lim_{x\to a} \overline{f}(x) = \overline{\ell}$$
$$\lim_{x\to a} (\lambda f + \mu g)(x) = \lambda\ell + \mu m$$
$$\lim_{x\to a} \frac{f}{g}(x) = \frac{\ell}{m} \text{ pour } m \neq 0$$

Soit $f \in \mathscr{F}(X, \mathbb{C})$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$, telle que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{C}$;
soit (u_n) une suite de X telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$.
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$.
Soient $f \in \mathscr{F}(X, \mathbb{C})$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $\phi \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$ telle que $\phi(I) \subset X$, $t_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{C}$ et $\lim\limits_{t\to t_0} \phi(t) = a$ alors $\lim\limits_{t\to t_0} (f\circ\phi)(t) = \ell$.

Démonstration

4.5. Continuité

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.

Définition - Continuité d'une fonction à valeurs complexes
Soit f définie sur I et $a \in I$, f admet une limite en a équivaut à dire que $\mathrm{Re} f$ et $\mathrm{Im} f$ admettent des limites réelles en a, c'est-à-dire qu'elles sont continues en a
Si c'est le cas on dit que f est continue en a.
$f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{C})$ est continue sur I si elle est continue en tout point de I.
Cela équivaut à dire que $\mathrm{Re} f, \mathrm{Im} f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$ sont continues sur I.
On note $\mathscr{C}(I, \mathbb{C})$ ou $\mathscr{C}^0(I, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{C}$.

Proposition - Stabilité par continuité
Si $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{C})$ est continue sur I alors $\overline{f} \in \mathscr{F}(I, \mathbb{C})$ et $|f| \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$ sont continues sur I.
Soient $f, g \in \mathscr{C}(I, \mathbb{C})$, $(\lambda, \mu) \in$
Ce^2. Alors :
$\lambda f + \mu g \in \mathscr{C}(I, \mathbb{C})$ ($\mathscr{C}(I, \mathbb{C})$ est un s.e.v. de $\mathscr{F}(I, \mathbb{C})$).
Si g ne s'annule pas, $\frac{f}{g} \in \mathscr{C}(I, \mathbb{C})$.
Si $\phi \in \mathscr{C}(J, \mathbb{R})$ avec $\phi(J) \subset I$ alors $f \circ \phi \in \mathscr{C}(J, \mathbb{C})$.

Exercice
Les propriétés suivantes restent-elles vraies en passant de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$

1. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ continue sur $[a, b]$. Alors f est bornée sur $[a, b]$ et il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $|f(x_0)| = \sup_{[a,b]} |f(x)|$.
2. Le théorème des valeurs intermédiaires (image continue d'un segment).

5. Bilan

Synthèse

⇝ La continuité est d'abord une notion locale, qui se généralise à un intervalle.

⇝ La continuité/limite est une notion subtile qui mérite qu'on y passe un temps conséquent. Pour n'en perdre pas trop, il faut parfois plonger dans l'abstraction.

⇝ L'un des plus importants résultats de topologie réelle est le TVI : il n'y a pas de trou dans $\mathbb{R}$ et toute transformation qui conserve une partie sans trou (ou intervalle) de $\mathbb{R}$ doit être continue. L'enjeu est donc la continuité ! Il faut pour cela définir la notion de limite de fonction, en un point, puis sur un intervalle.

⇝ Nous terminons par l'étude des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Savoir-faire et Truc & Astuce du chapitre

— Savoir-faire - Démontrer la non-continuité d'une fonction en exploitant les suites
— Savoir-faire - Démontrer la continuité de f sur I ou prolonger f par continuité.
— Savoir-faire - Définir f (continue) de X à $\overline{X}$
— Savoir-faire - Démontrer la continuité de f sur I ou prolonger la continuité de f sur I
— Savoir-faire - Montrer l'existence d'un point tel que…

Notations

Notations	*Définitions*	*Propriétés*	*Remarques*
$\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$ (resp. $\mathscr{C}(I,\mathbb{C})$)	Ensemble des fonctions continues de l'intervalle I sur $\mathbb{R}$ (resp. sur $\mathbb{C}$)		

Retour sur les problèmes

87. C'est une des clés de l'analyse. Et pour avoir accès à la limite, en règle générale, on encadre…
88. Rappelons la définition du cours : une fonction est continue sur I, si elle continue en tout point de I. Et une fonction est continue en un point x de I, si *simplement* elle admet une limite en x.
89. Oui, on a vu par exemple l'indicatrice de $\mathbb{Q}$.
90. Si I est un intervalle, $f(I)$ est un intervalle. Mais il peut être ouvert et donc on n'a pas nécessairement x_0 tel que $f(x_0) = \sup_I f$. Par exemple avec $f : x \mapsto x$ et $I = [0,1[$. Pour tout $x \in I$, $f(x) < 1 = \sup_I f$.
Si l'intervalle est fermé, les choses sont différentes (cf. théorème de Weierstrass).
91. Voir dernier chapitre du cours. Pour la continuité des fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, cela est a priori plus compliqué car il n'y a pas de relation d'ordre dans $\mathbb{C}$…