MPSI 3 - Fermat Le 03.10.17
2017-2018

Devoir à la maison n°2
CORRECTION

Problème

Dans ce problème, on cherche à retrouver un résultat obtenu par GAUSS (1777-1855) lorsqu'il avait 17 ans : « *il est possible de couper un disque en 17 parts égales uniquement avec une règle et un compas* ».

Pour l'ensemble du problème, on note

$$\xi_k = \exp\left(i\frac{2k\pi}{17}\right)$$

Une autre notation apparaîtra par la suite en fin de première partie.

0. Soient $h, k \in \mathbb{Z}$,

$$\xi_h \times \xi_k = \exp\left(i\frac{2h\pi}{17}\right) \times \exp\left(i\frac{2k\pi}{17}\right) = \exp\left(i\frac{2h\pi}{17} + i\frac{2k\pi}{17}\right) = \exp\left(i\frac{2(h+k)\pi}{17}\right)$$

Donc

$$\boxed{\forall\ h, k \in \mathbb{Z}, \qquad \xi_h \times \xi_k = \xi_{h+k}}$$

A. Une racine primitive 17$^{\text{e}}$

1. Pour faire le tableau des $r_{17}(3^s)$, on procède de la façon suivante :
   — Soit $s \in \mathbb{N}$ et supposons que l'on connaisse $r_{17}(3^s)$.
   Par exemple pour $s = 4$, on a $r_{17}(3^s) = 13$)
   — On a alors $r_{17}(3^{s+1}) = r_{17}(3 \times r_{17}(3^s))$.
   Par exemple $r_{17}(3^5) = r_{17}(3 \times r_{17}(3^4)) = r_{17}(3 \times 13) = r_{17}(39) = 5$
   On ne calcule donc jamais exactement la valeur de 3^s !
   Cela donne

s	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$r_{17}(3^s)$	1	3	9	10	13	5	15	11	16	14	8	7	4	12	2	6	1

On définit

$$f : \begin{array}{ccc} [\![0, 15]\!] & \longrightarrow & [\![1, 16]\!] \\ s & \longmapsto & r_{17}(3^s) \end{array}$$

2. Le tableau que l'on a donné est suffisant pour répondre à la question, on peut voir que :

$$\boxed{\forall\ k \in [\![1, 16]\!], \exists\ !s \in [\![0, 15]\!] \text{ tel que } k = f(s)}$$

Remarques !
Dans un cadre plus général, où un nombre a (ici $a = 3$) a toutes ses puissances successives différentes modulo b (donc les puissances de 0 à $b-1$ - sinon, il y aurait strictement plus de b restes différents), on dit que ξ_a est une racine primitive b^{e}de l'unité

Par la suite, on notera

$$\forall\ s \in [\![0, 15]\!], \xi_{[s]} = \xi_{f(s)} \text{ où } f(s) \in [\![1, 16]\!]$$

B. Factorisation de $z^{17} - 1$

On considère maintenant les nombres $\sigma_{i,j}$ définie par :

$$\forall\ i \in \mathbb{N}, \forall\ j \in [\![0, i-1]\!], \qquad \sigma_{i,j} = \sum_{s \equiv j[i]} \xi_{[s]}$$

Seuls les nombres $\sigma_{2,j}$, $\sigma_{4,j}$ et $\sigma_{8,j}$ nous seront vraiment utiles.

1. Ecriture polynomiale

(a) C'est une factorisation classique (cours) :

$$\boxed{\forall\, z \in \mathbb{C}, \qquad z^{17}-1=(z-1)\times(z^{16}+z^{15}+\cdots+z+1) \text{ donc } R(z)=\sum_{k=0}^{16} z^k}$$

On cherche à factoriser R

(b) Les racines de $z^{17}-1$ sont les racines dix-septième de l'unité.
Comme 1 n'est pas à considérer (vu que c'est la racine de $z-1$), il s'agit donc des 16 racines dix-septième de l'unité, un excepté.

$$\boxed{\text{Les racines (complexes) de } R \text{ forme l'ensemble } \{\xi_k, k\in [\![1,16]\!]\}}$$

(c) D'après la question précédente, le développement de $\displaystyle\prod_{k=1}^{16}(z-\xi_k)$ donne donc $R(z)$

(aucune des racines n'est double puisque R contient exactement 16 racines).

Donc pour tout $z\in\mathbb{C}$,

$$z^{16}+z^{15}+\cdots+z+1=\prod_{k=1}^{16}(z-\xi_k)=z^{16}-(\sum_{k=1}^{16}\xi_k)z^{15}+\cdots+(-1)^{16}(\prod_{k=1}^{16}\xi_k)$$

On peut identifier (écriture unique d'un polynôme sur $\mathbb{C}$) :

$$\boxed{\sum_{s=0}^{15}\xi_{[s]}=\sum_{k=1}^{16}\xi_k=-1}$$

(d) Et avec la même identification :

$$\boxed{\prod_{s=0}^{15}\xi_{[s]}=\prod_{k=1}^{16}\xi_k=1}$$

2. Etude de $\sigma_{2,j}$

(a) Tous les entiers s sont congrus à 0 ou 1 modulo 2 donc

$$\boxed{\sigma_{2,0}+\sigma_{2,1}=\sum_{s\equiv 0[2]}\xi_{[s]}+\sum_{s\equiv 1[2]}\xi_{[s]}=\sum_{k=1}^{16}\xi_k=-1}$$

(b) A partir du tableau écrit précédemment :

$$\sigma_{2,0}=\xi_{[0]}+\xi_{[2]}+\xi_{[4]}+\xi_{[6]}+\xi_{[8]}+\xi_{[10]}+\xi_{[12]}+\xi_{[14]}=\xi_1+\xi_9+\xi_{13}+\xi_{15}+\xi_{16}+\xi_8+\xi_4+\xi_2$$

$$\sigma_{2,1}=\xi_{[1]}+\xi_{[3]}+\xi_{[5]}+\xi_{[7]}+\xi_{[9]}+\xi_{[11]}+\xi_{[13]}+\xi_{[15]}=\xi_3+\xi_{10}+\xi_5+\xi_{11}+\xi_{14}+\xi_7+\xi_{12}+\xi_6$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{2,0}\times\sigma_{2,1} &= (\xi_1+\xi_9+\xi_{13}+\xi_{15}+\xi_{16}+\xi_8+\xi_4+\xi_2)\times(\xi_3+\xi_{10}+\xi_5+\xi_{11}+\xi_{14}+\xi_7+\xi_{12}+\xi_6)\\
&= (\xi_4+\xi_{11}+\xi_6+\xi_{12}+\xi_{15}+\xi_8+\xi_{13}+\xi_7)+(\xi_{12}+\xi_2+\xi_{14}+\xi_3+\xi_6+\xi_{16}+\xi_4+\xi_{15})\\
&\quad +(\xi_{16}+\xi_6+\xi_1+\xi_7+\xi_{10}+\xi_3+\xi_8+\xi_2)+(\xi_1+\xi_8+\xi_3+\xi_9+\xi_{12}+\xi_5+\xi_{10}+\xi_4)\\
&\quad +(\xi_2+\xi_9+\xi_4+\xi_{10}+\xi_{13}+\xi_6+\xi_{11}+\xi_5)+(\xi_{11}+\xi_1+\xi_{13}+\xi_2+\xi_5+\xi_{15}+\xi_3+\xi_{14})\\
&\quad +(\xi_7+\xi_{14}+\xi_9+\xi_{15}+\xi_1+\xi_{11}+\xi_{16}+\xi_{10})+(\xi_5+\xi_{12}+\xi_7+\xi_{13}+\xi_{16}+\xi_9+\xi_{14}+\xi_8)\\
&= 4\sum_{k=1}^{16}\xi_k=-4
\end{aligned}$$

Remarques !

Evidemment, les calculs « marchent » bien car on a fait un bon regroupement des racines.
Pourquoi est-ce ainsi qu'il fallait procéder ? C'est la bonne question, la réponse est au coeur de l'idée de Gauss *même si elle a mis quelques temps à se formaliser. Cette réponse est : car ainsi on a une structure naturelle de groupe ! Nous reverrons cela en fin de semestre*

$$\boxed{\sigma_{2,0} \times \sigma_{2,1} = -4}$$

(c) Ainsi :

$$(x - \sigma_{2,0})(x - \sigma_{2,1}) = x^2 - (\sigma_{2,0} + \sigma_{2,1})x + \sigma_{2,0}\sigma_{1,0} = x^2 + x - 4$$

$$\boxed{\sigma_{2,0} \text{ et } \sigma_{2,1} \text{ sont les racines du polynômes à coefficients entiers : } z^2 + z - 4}$$

On obtient les racines, en exploitant le discriminant $\Delta = 1 + 16 = 17$.
Une représentation rapide des racines 17ede l'unité montre que les nombres ξ_1, ξ_2, ξ_4, ξ_{13}, ξ_{15}, ξ_{16} ont partie réelles positives, supérieure en valeurs absolue à la somme de celle de $\xi_9 + \xi_8$.
Donc la partie réelle de $\sigma_{2,0}$ est positive, alors que celle de $\sigma_{2,1}$ est négative.

$$\boxed{\sigma_{2,0} = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \text{ et } \sigma_{2,1} = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}}$$

3. Etude de $\sigma_{4,j}$

(a) $\sigma_{4,0} = \xi_{[0]} + \xi_{[4]} + \xi_{[8]} + \xi_{[12]} = \xi_1 + \xi_{13} + \xi_{16} + \xi_4$.
Et $\sigma_{4,2} = \xi_{[2]} + \xi_{[6]} + \xi_{[10]} + \xi_{[14]} = \xi_9 + \xi_{15} + \xi_8 + \xi_2$
On a donc $\sigma_{4,0} + \sigma_{4,2} = \sigma_{2,0}$.
alors que

$$\begin{aligned}
\sigma_{4,0} \times \sigma_{4,2} &= (\xi_1 + \xi_{13} + \xi_{16} + \xi_4) \times (\xi_9 + \xi_{15} + \xi_8 + \xi_2) \\
&= \xi_{10} + \xi_{16} + \xi_9 + \xi_3 + \xi_5 + \xi_{11} + \xi_4 + \xi_{15} \\
&\quad + \xi_8 + \xi_{14} + \xi_7 + \xi_1 + \xi_{13} + \xi_2 + \xi_{12} + \xi_6 \\
&= \sum_{k=1}^{16} \xi_k = -1
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\sigma_{4,0} \text{ et } \sigma_{4,1} \text{ sont les deux racines du polynôme } z^2 - \sigma_{2,0}z - 1}$$

(b) Les racines de ce polynômes sont égales à

$$\frac{\sigma_{2,0} \pm \sqrt{\sigma_{2,0}^2 + 4}}{2} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{17} - 1 \pm \sqrt{(-1 + \sqrt{17})^2 + 16}\right) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{17} - 1 \pm \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}\right)$$

Puis, comme $\xi_1 + \xi_{16} = \xi_1 + \overline{\xi_1} = 2\cos\frac{2\pi}{17}) > 2\cos\frac{4\pi}{17} = \xi_2 + \xi_{15}$
et $\xi_4 + \xi_{13} = \xi_4 + \overline{\xi_4} = 2\cos\frac{8\pi}{17}) > 0 > 2\cos\frac{16\pi}{17} = \xi_8 + \xi_9$
on en déduit que $\sigma_{4,0} > \sigma_{4,1}$ et donc

$$\boxed{\sigma_{4,0} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{17} - 1 + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}\right), \ \sigma_{4,2} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{17} - 1 - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}\right)}$$

(c) De même :
— $\sigma_{4,1} + \sigma_{4,3} = \sigma_{2,1}$
— $\sigma_{4,1} \times \sigma_{4,3} = \sum_{k=1}^{16} \xi_k = -1$
— $\sigma_{4,1}$ et $\sigma_{4,3}$ sont les deux racines de $z^2 - \sigma_{2,1} - 1$
— Or ces racines sont égales à $\frac{1}{4}\left(-\sqrt{17} - 1 \pm \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}\right)$
— $\sigma_{4,3} < \sigma_{4,1}$
Bilan

$$\boxed{\sigma_{4,1} = \frac{1}{4}\left(-\sqrt{17} - 1 + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}\right), \ \sigma_{4,3} = \frac{1}{4}\left(-\sqrt{17} - 1 - \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}\right)}$$

4. Etude de $\sigma_{8,j}$

(a) Un simple calcul :

$$\boxed{\sigma_{8,0} = \xi_{[0]} + \xi_{[8]} = \xi_1 + \xi_{16} = \xi_1 + \overline{\xi_i} = 2\cos\frac{2\pi}{17}}$$

(b) Comme précédemment : $\sigma_{8,0} + \sigma_{8,4} = \sigma_{4,0}$ et

$$\sigma_{8,0} \times \sigma_{8,4} = (\xi_1 + \xi_{16}) \times (\xi_{13} + \xi_4) = \xi_{14} + \xi_5 + \xi_{12} + \xi_3 = \sigma_{4,1}$$

Donc

$$\boxed{\sigma_{8,0} \text{ et } \sigma_{8,4} \text{ sont les deux racines de } z^2 - \sigma_{4,0} + \sigma_{4,1}}$$

(c) Comme $\sigma_{8,0} = 2\cos\frac{2\pi}{17} > 2\cos\frac{8\pi}{17} = \sigma_{8,4}$, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\sigma_{8,0} &= \frac{\sigma_{4,0} + \sqrt{\sigma_{4,0}^2 - 4\sigma_{4,1}}}{2} \\
&= \frac{1}{8}\left(\sqrt{17} - 1 + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \sqrt{(\sqrt{17} - 1 + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}})^2 + 16(\sqrt{17} + 1 - \sqrt{34 + 2\sqrt{17}})}\right) \\
&= \frac{1}{8}\Big(\sqrt{17} - 1 + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \\
&\quad + \sqrt{(17 + 1 - 2\sqrt{17} + 34 - 2\sqrt{17} + 2(\sqrt{17} - 1)\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + 16(\sqrt{17} + 1 - \sqrt{34 + 2\sqrt{17}})}\Big) \\
&= \frac{1}{8}\Big(\sqrt{17} - 1 + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \sqrt{68 + 12\sqrt{17} + 2(\sqrt{17} - 1)\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}\Big)
\end{aligned}$$

Notons que

$$2(\sqrt{17} - 1)\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} = 2\sqrt{(\sqrt{17} - 1)^2(34 - 2\sqrt{17})} = 2\sqrt{(17 + 1 - 2\sqrt{17})(34 - 2\sqrt{17})}$$

$$= 2\sqrt{2(9 - \sqrt{17})2(17 - \sqrt{17})} = 4\sqrt{17 \times 9 + 17 - (17 + 9)\sqrt{17}} = 4\sqrt{170 - 26\sqrt{17}}$$

Donc,

$$\sigma_{8,0} = \frac{1}{8}\Big(\sqrt{17} - 1 + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + 2\sqrt{17 + 3\sqrt{17} + \sqrt{170 - 26\sqrt{17}} - 4\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}\Big)$$

Reste à démontrer que

$$\sqrt{170 - 26\sqrt{17}} - 4\sqrt{34 + 2\sqrt{17}} = -\sqrt{170 + 38\sqrt{17}}$$

Cette égalité est équivalente à (on peut élever au carré : tout est positif)

$$(\sqrt{170 - 26\sqrt{17}} + \sqrt{170 + 38\sqrt{17}})^2 = (4\sqrt{34 + 2\sqrt{17}})^2$$

$$\iff 170 - 26\sqrt{17} + 170 + 38\sqrt{17} + 2\sqrt{(170 - 26\sqrt{17})(170 + 38\sqrt{17})} = 16(34 + 2\sqrt{17})$$

$$\iff 340 + 12\sqrt{17} + 2\sqrt{(170 - 26\sqrt{17})(170 + 38\sqrt{17})} = 340 + 6 \times 34 + 32\sqrt{17}$$

$$\iff \sqrt{712 \times 17 + 170 \times 12\sqrt{17}} = 6 \times 17 + 10\sqrt{17}$$

$$\iff 712 \times 17 + 170 \times 12\sqrt{17} = (6 \times 17 - 5\sqrt{17})^2 = 612 \times 17 + 100 \times 17 + 12 \times 170\sqrt{17}$$

$$\iff \text{VRAI}$$

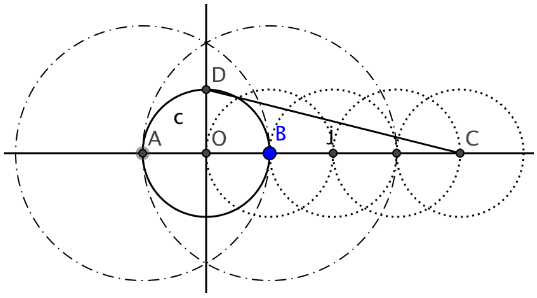
En divisant par 2 pour obtenir $\cos\frac{2\pi}{17}$:

$$\boxed{\cos\frac{2\pi}{17} = \frac{1}{2}\sigma_{8,0} = \frac{1}{16}\left(\sqrt{17} - 1 + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}\right) + \frac{1}{8}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{170 + 38\sqrt{17}}}}$$

C. Un peu de géométrie

1. Avec la règle, on trace une droite passant par le centre du cercle.
   On obtient un rayon de longueur 1 (sur la figure : $[OB]$), on reconduit 4 fois cette longueur grâce au compas (sur la figure on trouve C). On a ainsi une longueur de côté 4.
   Avec le compas, on trace la médiatrice de $[AB]$, elle coupe le cercle en D.
   On a un triangle rectangle OCD, de côté 4 et 1.

$$\boxed{\text{Son hypoténuse vaut } \sqrt{17}}$$



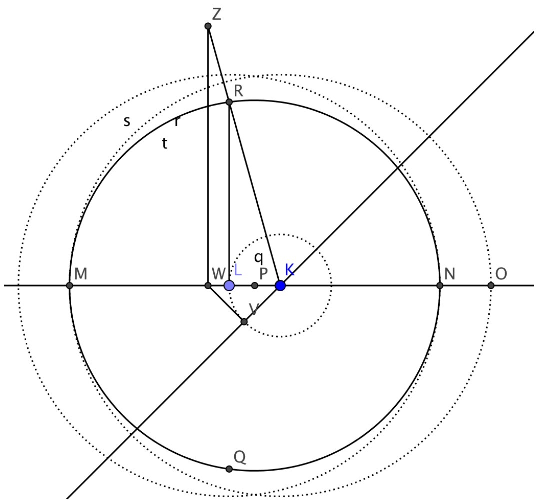
2. Ici, on utilise une autre méthode qu'on aurait pu également exploiter précédemment. Si l'on trace un cercle de diamètre de longueur $a + b$ ($AC = a$ et $CB = b$), alors le segment $[CD]$ perpendiculaire à $[AB]$, coupant le cercle en D a une longueur égale à $\sqrt{ab}$.
   En effet, on peut supposer en toute généralité que $b > a$.
   Ce cercle a pour rayon $OD = \frac{1}{2}AB = \frac{a+b}{2}$.
   La distance $OC = OA - AC = \frac{a+b}{2} - a = \frac{b-a}{2}$.
   Le théorème de Pythagore pour le triangle OCD rectangle en C donne

$$CD = \sqrt{OD^2 - OC^2} = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2} = \sqrt{ab}$$

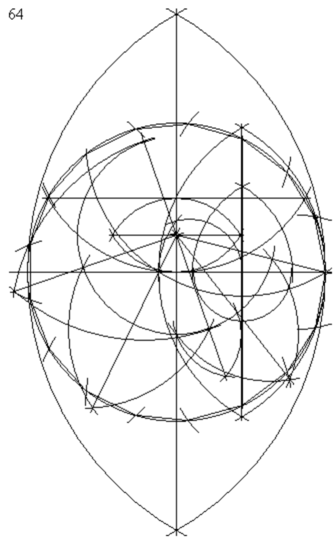
   On applique cette méthode, en notant que

$$\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} = \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{17} \times (\sqrt{17} - 1)}$$

   On utilise donc la méthode précédente pour obtenir $\sqrt{17}$. Ensuite, la démarche est expliquée :
   $KL = 1$, $KM = \sqrt{17}$ et $KN = \sqrt{17} - 1$ et donc $LR = \sqrt{\sqrt{17}(\sqrt{17} - 1)} = \sqrt{17 - \sqrt{17}}$.
   Puis, on trace le triangle KVW rectangle isocèle en V, avec $KV = 1$, donc $KW = \sqrt{2}$.
   Enfin avec le théorème de Thallès : $WZ = \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{17} \times (\sqrt{17} - 1)} = \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}$

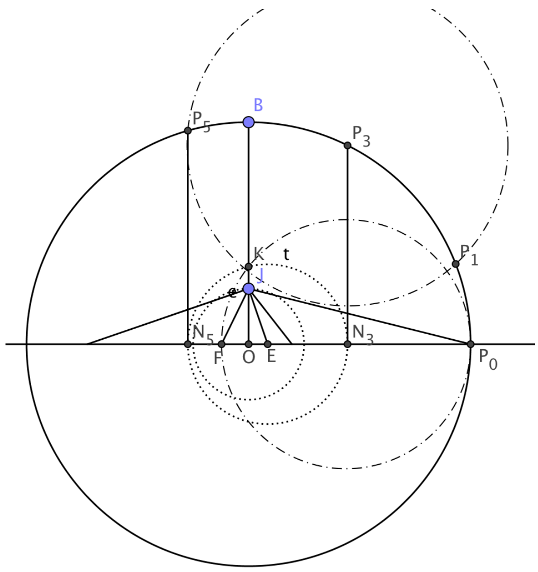


3. Voici une représentation complète des 64 étapes de la méthode de Gauss (elle n'est pas optimale...).
   Pour mieux la comprendre, il faut se rendre sur le site : https ://fr.wikipedia.org/wiki/Heptadécagone



Remarques !

Dans Introduction to geometry, COXETER *(Londres 1907- Toronto 2003) présente la construction de Richmond du polygone régulier à 17 côtés.*
On joint P_0 *au point* J *situé sur* OB *au quart de la distance à partir de* O. *Sur le diamètre passant par* P_0, *on construit les points* E *et* F *tels que* $\widehat{OJE} = \frac{1}{4}\widehat{OJP_0}$ *et* $\widehat{FJE} = \frac{\pi}{4}$.
Le cercle de diamètre FP_0 *rencontre* OB *en* K *et le cercle de centre* E *et de rayon* EK *rencontre* OP_0 *en* N_3 *(situé entre* O *et* P_0*) et en* N_5. *Les perpendiculaires à* OP_0 *en ces deux points coupent le cercle en* P_3 *et en* P_5. *Alors l'arc* P_3P_5 *(de même que* P_1P_3*) vaut* $\frac{2}{17}$ *de la circonférence.*



La démonstration de la justesse de cette construction utilise à plusieurs reprises le fait que les racines du polynôme

$$x^2 + \frac{1}{\tan(2\alpha)}x - 1 = 0$$

valent $\tan\alpha$ *et* $-\frac{1}{\tan\alpha}$

Remarques !

On démontre que les nombres N *constructibles à la règle et au compas (i.e. dont les angles* $\frac{2\pi}{N}$ *sont constructibles à la règle et au compas), si les nombres produit de puissance de 2 et de nombres premiers de Fermat (**théorème de Gauss-Wantzel**).*
C'est nombres premiers de Fermat sont des nombres premiers de la forme $F_p = 2^{2^p} + 1$.
On sait que $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$, $F_4 = 65\,537$ *sont bien des nombres premiers.*
A l'inverse de ce que pensait FERMAT, *ce n'est pas le cas de* $F_5 = 4\,294\,967\,297$, *dont* EULER *démontra que* 641 *était un diviseur. . .*