MPSI 3 - Fermat
2017-2018

Le 14.10.17

Devoir surveillé n°2

Durée de l'épreuve : 4 heures
La calculatrice est interdite

Le devoir est composé de deux exercices et d'un problème.
Lorsqu'une question est jugée, a priori, plus difficile, elle est précédée du symbole $(*)$ voire $(**)$.
La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la <u>précision</u> des raisonnements et l'énoncé des <u>formules utilisées</u>**.

BON COURAGE

Exercice 1

Donner les domaines de définition et de dérivation de $f : x \mapsto \arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$.
En déduire une nouvelle l'expression de f (*avec la fonction* arctan *et en trois morceaux*).

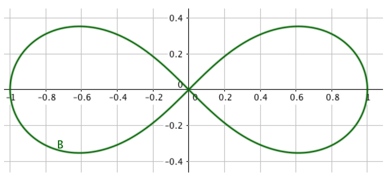
Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note pour tout entier $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\xi_k = \exp(i\frac{2k\pi}{n})$.
On note pour tout réel x, $P_n(x) = x^n - 1$ et pour tout complexe z, $P_n(z) = z^n - 1$.

1. Factoriser P_n sur $\mathbb{C}$
2. Montrer que P_n est dérivable sur $\mathbb{R}$. Que vaut $P_n'(x)$?
   En déduire, pour $x \in \mathbb{R}$, la forme développée de : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \prod_{h=0, h\neq k}^{n-1} (x - \xi_h)$
3. On admet que la formule précédente reste vraie pour une variable z complexe.
   Que vaut, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\displaystyle\prod_{h\neq k, h=0}^{n-1} (\xi_k - \xi_h)$?
4. On cherche à calculer une primitive de $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{x^n - 1}$. On suppose que $n = 2N+1$ est impair.
   (a) On admet que que :
   si un polynôme de degré $n-1$ admet n racines disctinctes, alors il est nul.
   (*) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{C} \setminus \{\xi_h, h \in [\![0, n-1]\!]\}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\xi_k}{n}\prod_{h\neq k}(x - \xi_h)\right) - 1 = 0$.
   (b) En déduire que : pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\displaystyle\frac{1}{x^n - 1} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x-1} + \sum_{k=1}^{N} \frac{2\cos(\frac{2k\pi}{n})x - 2}{x^2 - 2\cos(\frac{2k\pi}{n})x + 1}\right)$
   (c) (*) Donner alors une expression de la primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^n - 1}$

Problème

Sur $\mathbb{C}$, on considère : $\mathcal{B} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid (x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2\}$
Cet ensemble, appelé lemniscate de Bernoulli est représenté par la courbe suivante :



Dans la première partie, on étudie cette courbe particulière de $\mathbb{C}$ particulière. En dernière question, on calcule la longueur d'une de ces branches (plus précisément, on en donne une expression).
Pour cela on exploite le résultat suivant :

Si $f : I \subset \mathbb{C}$ est une équation injective d'une courbe de $\mathbb{C}$, de classe $\mathcal{C}^1$ et $M_1 = f(x_1)$ et $M_2 = f(x_2)$ sont deux points de cette courbe, alors la longueur de la courbe entre les points M_1 et M_2 est donnée par le calcul $\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} \lvert f'(t)\rvert \mathrm{d}t$

Dans la seconde partie, on crée une fonction `sl` (dite « *sinus lemniscatique* ») qui joue pour la lemniscate le même rôle que le sinus pour le cercle. Elle est en particulier définie à partir (fonction réciproque) d'un paramétrage de longueur de la courbe.
Dans la troisième partie -*prochain devoir maison*-, on étudie plus précisément, cette fonction `sl` (ainsi que `cl` associée) grâce à leurs propriétés analytiques comparables à celle de sin (et cos, respectivement).

I. La lemniscate de Bernoulli.

Lorsque cette définition a du sens, on note $g(\theta) = \sqrt{\cos(2\theta)}$

1. On considère $\mathcal{B}^{+,-} = \mathcal{B} \cap \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid x \geqslant 0, y \leqslant 0\}$.
   Montrer l'équivalence :
$$z = \rho e^{i\theta} \in \mathcal{B}^{+,-} \Longleftrightarrow \theta \in [\frac{-\pi}{4}, 0] \text{ et } \rho = g(\theta)$$
2. Donner l'ensemble de définition de g.
   Montrer que g est périodique. Etudier la parité de g
3. Montrer que g établit une bijection de $[-\pi/4, 0]$ sur $[0, 1]$.
4. On cherche à calculer la longueur de la branche de la lemnsicate $\mathcal{B}^{+,-}$.
   Pour cela on exploite le résultat donné en début d'énoncé.
   (a) On considère donc $\Phi : [\frac{-\pi}{4}, 0] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\theta \longmapsto g(\theta)e^{i\theta}$.
   Montrer que Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\frac{-\pi}{4}, 0]$ et donner une expression de Φ'
   (b) Montrer que $|\Phi'(\theta)|^2 = \dfrac{1}{\cos(2\theta)}$
   (c) En déduire que la longueur de la branche $\mathcal{B}^{+,-}$ est donnée par le calcul intégral :
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^4}}$$
   On pourra faire le changement de variable $u = -\tan\theta$, après avoir justifié son emploi.

II. Le sinus lemniscatique.

Dans cette partie on s'intéresse à
$$F(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1-r^4}} \tag{4}$$
On notera $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^4}}$, la dérivée de F.
(Les ensembles de définition sont étudiés au fur et à mesure de l'énoncé)

1. Donner l'ensemble de définition I de f. En déduire celui de F.
   Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.
2. Montrer que F est une fonction impaire
3. (a) Montrer que F est croissante sur I.
   (b) Montrer que pour tout $x \in [0, 1[$, $F(x) \leqslant \arcsin(x)$, puis que $F(x) \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

Des deux questions précédentes, on déduit que F admet une limite en $x = 1$.
On note cette limite $\sigma = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1-r^4}}$.
Et l'on vient de prouver que F est continue sur $[-1, 1]$ à valeurs dans $[-\sigma, \sigma]$.

4. Dessiner le graphe de F sur $[-1, 1]$.
5. Montrer que F admet une fonction réciproque F^{-1}, continue et impaire, définie sur $[-\sigma, \sigma]$.
6. Etude de la dérivée de F^{-1}.
   (a) Montrer que F^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\sigma, \sigma[$ et calculer sa dérivée.
   (b) Montrer que $\left(F^{-1}\right)'$ admet une limite (finie et dont on donnera la valeur) à gauche en σ.
   (c) Montrer alors que F^{-1} est dérivable en σ.

Nous avons donc montré que F^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\sigma, \sigma]$.
On prolonge la fonction F^{-1} à $[-\sigma, 3\sigma]$ en opérant sur son graphe une symétrie par rapport à la droite $x = \sigma$, puis on prolonge F^{-1} à $\mathbb{R}$ tout entier par périodicité, on note `sl` la fonction ainsi construite. On a alors `sl` de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

7. Exprimer la fonction dérivée `sl'` en fonction de `sl`.
   On notera que pour tout $u \in \mathbb{R}$, $[\mathtt{sl}'(u)]^2 = 1 - [\mathtt{sl}(u)]^4$
8. Tracer le graphe de `sl` sur $[-3\sigma, \sigma]$.

La suite en DM 4. . .