Devoir surveillé n°2
CORRECTION

Exercice 1

Pour que $f(x)$ soit définie, il est nécessaire et suffisant que $1+x^2 \neq 0$, $\dfrac{2x}{1+x^2} \in [-1,1]$.
Or $1+x^2>0$ et pour tout x,

$$0 \leqslant (1-x)^2 = 1-2x+x^2 \Longrightarrow 1+x^2 \geqslant 2x \Longrightarrow \frac{2x}{1+x^2} \leqslant 1$$

$$0 \leqslant (1+x)^2 = 1+2x+x^2 \Longrightarrow 1+x^2 \geqslant -2x \Longrightarrow \frac{-2x}{1+x^2} \leqslant 1 \Longrightarrow \frac{2x}{1+x^2} \geqslant -1$$

Ainsi /0,5

$$\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}}$$

Remarques !
On aurait aussi très bien pu faire une étude de fonctions.

Par composition, f est dérivable en tout point de $\mathcal{D}_f$ telle que $\dfrac{2x}{1+x^2} \neq \pm 1$.

Or l'étude de signe précédent, nous montre qu'il y a alors un problème en et uniquement en 1 et -1. /1

$$\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathcal{D}_{f'} =]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[.}$$

On a alors pour tout $x \in \mathcal{D}_{f'}$,

$$f'(x) = \frac{\frac{2(1+x^2)-(2x)^2}{(1+x^2)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)\sqrt{(1+x^2)^2-4x^2}} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)\sqrt{1-2x^2+x^4}}$$

/1,5

$$= \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)\sqrt{(1-x^2)^2}} = \begin{cases} \dfrac{2}{1+x^2} & \text{si } \; 1-x^2>0 \Leftrightarrow x \in [-1,1] \\ \dfrac{-2}{1+x^2} & \text{si } \; 1-x^2<0 \Leftrightarrow x \notin [-1,1] \end{cases}$$

Donc, en intégrant sur chacun des trois intervalles :

$$\exists\ k_1,k_2,k_3 \in \mathbb{R} \text{ tels que } f(x) = \begin{cases} -2\arctan(x)+k_1 & \text{si} \quad x<-1 \\ 2\arctan(x)+k_2 & \text{si} \quad x \in]-1,1[\\ -2\arctan(x)+k_3 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

Pour déterminer les valeurs de ces constantes, on prend des valeurs en des points particuliers :

$$f(0) = \arcsin\left(\frac{0}{1+0^2}\right) = 0 \Longrightarrow k_2 = 0$$

Par composition de limites :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \arcsin(0) = 0 \Longrightarrow k_3 = \pi$$

De même $k_1 = -\pi$ (ou bien on exploite l'imparité). Une nouvelle expression de f : /2

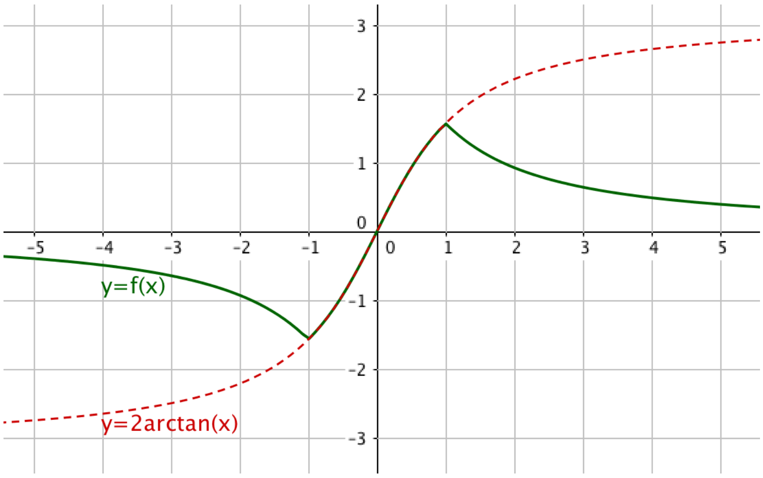
$$\boxed{\forall\ x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \begin{cases} -2\arctan(x)-\pi & \text{si} \quad x<-1 \\ 2\arctan(x) & \text{si} \quad x \in]-1,1[\\ 2\arctan(x)+\pi & \text{si} \quad x>1 \end{cases}}$$

Remarques !

On notera que f est bien continue en 1 (et en -1 par imparité) :

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2\arctan(1) - \pi = 2\frac{\pi}{4} - \pi = \frac{\pi}{2} = \lim_{x\to 1^-} f(x)$$

On peut représenter les fonctions f est $x \mapsto 2\arctan(x)$:



Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note pour tout entier $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\xi_k = \exp(i\frac{2k\pi}{n})$.
On note pour tout réel x, $P_n(x) = x^n - 1$ et pour tout complexe z, $P_n(z) = z^n - 1$.

1. P_n admet n racines distinctes : exactement les n racines complexes de l'unité (résultat du cours). Donc /1

$$\boxed{P_n = \prod_{k=0}^{n-1}(x - \xi_k)}$$

2. P_n est un polynôme, donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{\forall\ x \in \mathbb{R}, P_n'(x) = nx^{n-1}}$$

Si $f = g$, alors $f' = g'$, on en déduit par dérivation d'un produit : /2

$$\boxed{\forall\ x \in \mathbb{R}, P_n'(x) = nx^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1}\prod_{h\neq k}(x - \xi_h)}$$

3. On admet que la formule précédente reste vraie pour une variable z complexe.
On applique alors la formule en $z = \xi_k$,

$$P_n'(\xi_k) = n\xi_k^{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1}\prod_{h\neq j}(\xi_k - \xi_h)$$

Or si $j \neq q$, il existe un entier h tel que $\xi_h = \xi_k$.
donc pour tout $j \neq k$, $\prod_{h\neq j}(\xi_k - \xi_h) = 0$.
Ainsi dans la somme précédente, il ne reste que la situation $j = k$: /2

$$\boxed{n\xi_k^{n-1} = \prod_{h\neq k}(\xi_k - \xi_h)}$$

4. On considère donc le polynôme $R = 1 - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\xi_k\prod_{h\neq k}(x - \xi_h)$.
Comme $n = 2N + 1$ est impair, la seule racine réelle du polynôme $x^n - 1$ est 1.

(a) Alors, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$,

$$R(\xi_j) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n}\xi_k \prod_{h\neq k}(\xi_j - \xi_h)$$

Or si $j \neq k$, $\prod_{h\neq k}(\xi_j - \xi_h) = 0$, car l'un des h vaut j.

il reste donc, dans la somme d'indice k, la situation $k = j$: /1,5

$$R(\xi_j) = 1 - \frac{\xi_j}{n}\prod_{h\neq j}(\xi_j - \xi_h) = 1 - \frac{\xi_j}{n}(nx_j^{n-1}) = 1 - x_j^n = 0$$

Donc tous les nombres ξ_j, pour $j \in [\![0, n-1]\!]$ sont racines de R.

Par conséquent R admet n racines distinctes.

Mais deg $\prod_{h\neq k}(x - \xi_h) = n - 1$ et donc $\deg(R) \leqslant n - 1$. /2

Ainsi, d'après la remarque de l'énoncé $R = 0$ et donc

$$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{C}\setminus\{\xi_k, k \in [\![0, n-1]\!]\} \text{ et donc pour tout } x \in \mathbb{R}\setminus\{1\},\ \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\xi_k\prod_{h\neq k}(x - \xi_h) = 1}$$

(b) Donc, en divisant par $x^n - 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$

$$\frac{1}{x^n - 1} = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\xi_k\prod_{h\neq k}(x - \xi_h)}{\displaystyle\prod_{h=1}^{n}(x - \xi_h)} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\xi_k}{x - \xi_k}$$

Par ailleurs, comme pour $h \in [\![1, k]\!]$, $\overline{\xi_k} = \xi_{n-k}$, on a /1,5

$$\frac{1}{x^n - 1} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x - 1} + \sum_{k=1}^{N}\frac{\xi_k}{x - \xi_k} + \frac{\overline{\xi_k}}{x - \overline{x_k}}\right)$$

Et donc en mettant au même dénominateur :

$$\frac{1}{x^n - 1} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x - 1} + \sum_{k=1}^{N}\frac{2\mathrm{Re}(\xi_k)x - 2|\xi_k|^2}{x^2 - 2\mathrm{Re}(\xi_k)x + |\xi_k|^2}\right)$$

/2

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}\setminus\{1\},\ \frac{1}{x^n - 1} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x - 1} + \sum_{k=1}^{N}\frac{2\cos(\frac{2k\pi}{2n+1})x - 2}{x^2 - 2\cos(\frac{2k\pi}{2n+1})x + 1}\right)}$$

(c) Il s'agit maintenant d'intégrer ce calcul pour trouver une primitive sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}\setminus\{1\}$. Or une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ est $x \mapsto \ln(x - 1)$.

Et comme

$$\frac{2\cos(\frac{2k\pi}{2n+1})x - 2}{x^2 - 2\cos(\frac{2k\pi}{2n+1})x + 1} = \cos(\frac{2k\pi}{2n+1})\frac{2x - 2\cos(\frac{2k\pi}{2n+1})}{x^2 - 2\cos(\frac{2k\pi}{2n+1})x + 1} + 2\frac{\cos^2(\frac{2k\pi}{2n+1}) - 1}{x^2 - 2\cos(\frac{2k\pi}{2n+1})x + 1}$$ /1

$$= \cos(\frac{2k\pi}{2n+1})\frac{2x - 2\cos(\frac{2k\pi}{2n+1})}{x^2 - 2\cos(\frac{2k\pi}{2n+1})x + 1} - 2\frac{\sin^2(\frac{2k\pi}{2n+1})}{(x - \cos(\frac{2k\pi}{2n+1}))^2 + \sin^2(\frac{2k\pi}{2n+1})}$$

alors une primitive de $x \mapsto \frac{2\cos(\frac{2k\pi}{2n+1})x - 2}{x^2 - 2\cos(\frac{2k\pi}{2n+1})x + 1}$ est

$$x \mapsto \cos(\frac{2k\pi}{2n+1})\ln(x^2 - 2\cos(\frac{2k\pi}{2n+1})x + 1) - 2\frac{\sin^2(\frac{2k\pi}{2n+1})}{\sin(\frac{2k\pi}{2n+1})}\arctan\left(\frac{x - \cos(\frac{2k\pi}{2n+1})}{\sin(\frac{2k\pi}{2n+1})}\right)$$

/2

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Les primitives de } x \mapsto \frac{1}{x^n-1} \text{ sur } I \subset \mathbb{R}\setminus\{1\} \text{ sont les fonctions de la forme } x \mapsto \dfrac{1}{n}\Big(\ln(x - 1) \\ \displaystyle + \sum_{h=0}^{N}\left(\cos(\frac{2h\pi}{2n+1})\ln(x^2 - 2\cos(\frac{2h\pi}{2n+1})x + 1) - 2\sin(\frac{2h\pi}{2n+1})\arctan\left(\frac{x - \cos(\frac{2h\pi}{2n+1})}{\sin(\frac{2h\pi}{2n+1})}\right) + C\right)\Big),\ C \in \mathbb{R}\end{array}}$$

Problème

noindent Sur $\mathbb{C}$, on considère

$$\mathcal{B} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid (x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2\}$$

I. La lemniscate de Bernoulli.

Lorsque cette définition a du sens, on note $g(\theta) = \sqrt{\cos(2\theta)}$

1. On considère $\mathcal{B}^{+,-} = \mathcal{B} \cap \{z = x+iy \in \mathbb{C} \mid x \geqslant 0, y \leqslant 0\}$.
   $z = x + iy = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}$

$$\begin{array}{rcl} z \in \mathcal{B}^{+,-} & \Longleftrightarrow & (x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2, x \geqslant 0, y \leqslant 0 \\ & \Longleftrightarrow & \rho^4 = \rho^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta), \theta \in [-\frac{\pi}{2}, 0] \\ & \Longleftrightarrow & \rho = 0 \text{ ou } \rho^2 = \cos(2\theta), \theta \in [-\frac{\pi}{2}, 0] \end{array}$$

   Or $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$ et $\cos 2\theta > 0 \Longrightarrow \theta \in [-\frac{\pi}{4}, 0]$.
   Ainsi, on a l'équivalence : /2

$$\boxed{z = \rho e^{i\theta} \in \mathcal{B}^{+,-} \Longleftrightarrow \rho = g(\theta) \text{ où } g : [\frac{-\pi}{4}, 0] \to \mathbb{R}_+, \theta \mapsto \sqrt{\cos(2\theta)}}$$

2. $\mathcal{D}_g = \{\theta \in \mathbb{R} \mid \cos(2\theta) \geqslant 0\}$ Donc

$$\begin{array}{rcl} \theta \in \mathcal{D}_g & \Longleftrightarrow & \exists\, k \in \mathbb{Z} \mid 2\theta \in \left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right] \\ \theta \in \mathcal{D}_g & \Longleftrightarrow & \exists\, k \in \mathbb{Z} \mid \theta \in \left[k\pi - \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{\pi}{4}\right] \end{array}$$

/1

$$\boxed{\mathcal{D}_g = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[k\pi - \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{\pi}{4}\right]}$$

   Pour tout $\theta \in \mathcal{D}_g$, $\exists\, k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta \in \left[k\pi - \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{\pi}{4}\right]$.
   donc $\theta + \pi \in \theta \in \left[(k+1)\pi - \frac{\pi}{4}, (k+1)\pi + \frac{\pi}{4}\right]$ et $\theta - \pi \in \theta \in \left[(k-1)\pi - \frac{\pi}{4}, (k-1)\pi + \frac{\pi}{4}\right]$.
   Donc $\theta + \pi$ et $\theta - \pi \in \mathcal{D}_g$.
   De plus $g(\theta + \pi) = \sqrt{\cos(2\theta + 2\pi)} = g(\theta)$. /1
   Enfin, pour tout $\theta \in \mathcal{D}_g$, $\exists\, k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta \in \left[k\pi - \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{\pi}{4}\right]$.
   donc $-\theta \in \theta \in \left[-k\pi - \frac{\pi}{4}, -k\pi + \frac{\pi}{4}\right]$, donc $-\theta \in \mathcal{D}_g$. Et $g(-\theta) = \sqrt{\cos(-2\theta)} = g(\theta)$. /1

$$\boxed{\text{Bilan : } g \text{ est paire et } \pi\text{-périodique}}$$

3. g est continue sur $[-\pi/4, 0]$ (composition de fonctions continues).
   Si $-\frac{\pi}{4} \leqslant \theta_1 < \theta_2 \leqslant 0$, par croissance (stricte) de cos sur $[\frac{-\pi}{2}, 0]$: $0 \leqslant \cos(2\theta_1) < \cos(2\theta_2) \leqslant 1$.
   Puis car croissance (stricte) de la fonction racine : g est strictement croissante sur $[-\pi/4, 0]$. /2

$$\boxed{g \text{ établit donc une bijection de } [-\pi/4, 0] \text{ sur } [g(-\frac{\pi}{4}), g(0)] = [0, 1].}$$

4. On cherche à calculer la longueur de la branche de la lemnsicate $\mathcal{B}^{+,-}$.
   Pour cela on exploite le résultat donné en début d'énoncé.
   (a) Par produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, /1

$$\boxed{\Phi \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [\frac{-\pi}{4}, 0] \text{ et } \forall\, x \in [\frac{-\pi}{4}, 0],\ \Phi' = g'(\theta)e^{i\theta} + ig(\theta)e^{i\theta}}$$

   (b) Alors (puisque $g(\theta) \in \mathbb{R}$) :

$$\begin{array}{rcl} |\Phi'(\theta)|^2 & = & \Phi'(\theta)\overline{\Phi'(\theta)} = \left(g'(\theta)e^{i\theta} + ig(\theta)e^{i\theta}\right) \times \left(g'(\theta)e^{-i\theta} - ig(\theta)e^{-i\theta}\right) \\ & = & [g'(\theta)]^2 + [g(\theta)]^2 = \left(\dfrac{-\sin(2\theta)}{\sqrt{\cos 2\theta}}\right)^2 + \left(\sqrt{\cos(2\theta)}\right)^2 \\ & = & \dfrac{\sin^2(2\theta) + \cos^2(2\theta)}{\cos(2\theta)} = \dfrac{1}{\cos(2\theta)} \end{array}$$

/2

$$\boxed{|\Phi'(\theta)|^2 = \frac{1}{\cos(2\theta)}}$$

   (c) D'après la propriété donnée dans l'énoncé :

$$\ell = \int_{-\pi/4}^{0} |\Phi'(\theta)| \mathrm{d}\theta = \int_{-\pi/4}^{0} \sqrt{\frac{1}{\cos(2\theta)}} \mathrm{d}\theta$$

On fait le changement de variable bijectif : $[-\frac{\pi}{4}, 0] \to [0,1]$, $\theta \mapsto -\tan\theta = u$. /2

La réciproque est donnée par $\theta = \arctan(-u)$, donc $\mathrm{d}\theta = \dfrac{-1}{1+u^2}\mathrm{d}u$

Donc, comme $\cos(2\theta) = \dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$, on trouve

$$\ell = \int_1^0 \frac{-\mathrm{d}u}{(1+u^2)\sqrt{\frac{1-u^2}{1+u^2}}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(1-u^2)(1+u^2)}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^4}}$$ /1

Ainsi :

$$\boxed{\text{La longueur de la branche } \mathcal{B}^{+,-} \text{ est donnée par le calcul intégral : } \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^4}}}$$

Remarques !

On pourra s'étonner de trouver une intégrale sur un intervalle où la fonction intégrant n'est pas définie...Ici, il y a un problème en $u=1$ pour $\frac{1}{\sqrt{1-u^4}}$...En réalité, le calcul existe bien (c'est la longueur de la courbe) ! C'est un peu comme si l'on devait calculer

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = [\arcsin(u)]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

pour obtenir la longueur d'un quart de périmètre de cercle.

II. Le sinus lemniscatique.

Dans cette partie on s'intéresse à

$$F(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1-r^4}}$$

On notera $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^4}}$, la dérivée de F.

(Les ensembles de définition sont étudiés au fur et à mesure de l'énoncé)

1. $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \mid 1-x^4 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid (1-x)(1+x)(1+x^2) > 0\} =]-1,1[$.
   Donc /1

   $$\boxed{\mathcal{D}_f =]-1,1[= \mathcal{D}_F}$$

   Par composition de fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur domaine de définition ouvert, f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.
   F est une primitive de f, /1

   $$\boxed{F \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } I =]-1,1[.}$$

2. Si $x \in]-1,1[$, alors $-x \in]-1,1[$.
   Puis on calcule $F(-x)$, en faisant le changement de variable $u = -r$, donc $r^4 = u^4$ et $\mathrm{d}r = -\mathrm{d}u$,

   $$F(-x) = \int_0^{-x} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1-r^4}} = \int_0^x \frac{-\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^4}} = -F(x)$$

   /2

   $$\boxed{F \text{ est donc une fonction impaire}}$$

3. (a) Sur I, $f = F' \geqslant 0$, donc /1

   $$\boxed{F \text{ est croissante sur } I.}$$

   (b) Soit $x \in [0,1[$, soit $r \in [0,x]$, donc $r \in [0,1]$,
   et alors $r^4 \leqslant r^2$, donc $1-r^4 \geqslant 1-r^2$ et $\dfrac{1}{\sqrt{1-r^4}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1-r^2}}$.
   Par positivité de l'intégration :

   $$F(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1-r^4}} \leqslant \int_0^x \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1-r^2}} = [\arcsin(r)]_0^x = \arcsin(x)$$

   On en déduit, par majoration de arcsin : /2

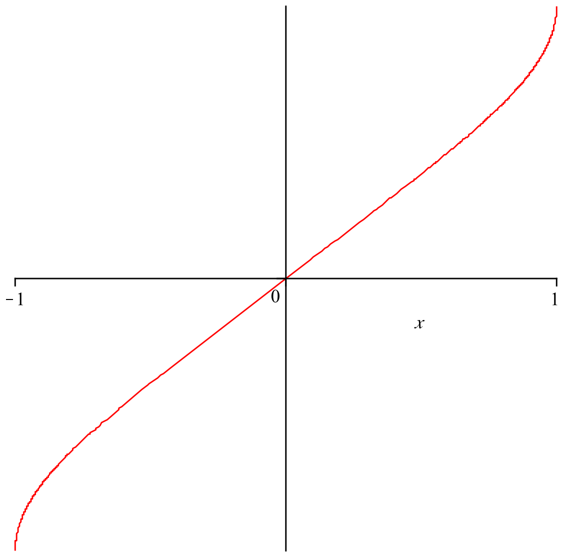
   $$\boxed{\text{pour tout } x \in [0,1[, \ F(x) \leqslant \arcsin(x), \text{ puis que } F(x) \leqslant \frac{\pi}{2}.}$$

Des deux questions précédentes, on déduit que F admet une limite en $x = 1$.

On note cette limite $\sigma = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1-r^4}}$.

Et l'on convient de prouver que F est continue sur $[-1,1]$ à valeurs dans $[-\sigma, \sigma]$.

4. Pour la représentation graphique, on exploite l'imparité de F. On sait aussi que F est croissante. /2



5. Comme F est dérivable, elle est continue.
Par ailleurs $F' = f > 0$ sur $]-1,0[\cup]0,1[$, donc F est strictement croissante sur $]-1,1[$.
Finalement, F est continue et strictement croissante sur $[-1,1]$, donc F établit une bijection de $[-1,1]$ sur $[-\sigma,\sigma]$.
Ainsi /3

$$\boxed{F \text{ admet une fonction réciproque } F^{-1}, \text{ continue, impaire (et croissante comme } F) \text{ sur } [-\sigma,\sigma].}$$

6.

Remarques !
Gros problème ici : F n'est pas dérivable en -1 et en 1.
Donc on est obligé de faire une première étude sur $]-1,1[$ et donc pour F^{-1} sur $]-\sigma,\sigma[$. Puis connaissant $(F^{-1})'$, on regarde si on peut calculer $(F^{-1})'(\sigma)$. Cela rendra F^{-1} de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\sigma,\sigma]$.
Mais attention, il ne faut pas se tromper dans la définition de $(F^{-1})'(\sigma)$, il s'agit bien du calcul de la limite $\lim\limits_{x\to\sigma} \dfrac{F^{-1}(x)-F^{-1}(\sigma)}{x-\sigma}$.

(a) Comme F est dérivable sur $]-1,1[$, F^{-1} est dérivable sur $\{x \in]-\sigma,\sigma[\mid F'(F^{-1}(x)) \neq 0\}$.
Or $F'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^4}} \neq 0$ Donc /3

$$\boxed{F^{-1} \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]-\sigma,\sigma[\text{ et } \left(F^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1-[F^{-1}(x)]^4}}} = \sqrt{1-[F^{-1}(x)]^4}}$$

(b) Par composition, comme F^{-1} admet une limite en σ qui vaut 1, on a /2

$$\boxed{\lim_{x\to\sigma^-} \left(F^{-1}\right)'(x) = 0}$$

(c)

Piste de recherche...
Il s'agit donc de calculer $\lim\limits_{x\to\sigma^-} \dfrac{F^{-1}(x)-F^{-1}(\sigma)}{x-\sigma}$.
Si cette limite existe et si $(F^{-1})'$ est continue,
alors elle vaut nécessairement $\lim\limits_{x\to\sigma^-} \left(F^{-1}\right)'(x) = 0$.

Nous avons vu que F est croissante, il en est de même de F^{-1}, sa réciproque.

Nous savons enfin, que pour $x \geqslant 0$, $F^{-1}(x) \geqslant 0$.

Donc $x \mapsto F^{-1}(x) = \sqrt{1 - F^{-1}(x)^4}$ est décroissante sur $[0, \sigma[$.

Donc pour tout $x \in [0, \sigma[$:

$$0 \leqslant F^{-1}(\sigma) - F^{-1}(x) = \int_x^\sigma F^{-1\prime}(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_x^\sigma F^{-1\prime}(x)\mathrm{d}t = (\sigma - x)F^{-1}(x)$$

$$0 \leqslant \frac{F^{-1}(\sigma) - F^{-1}(x)}{\sigma - x} = \frac{F^{-1}(x) - F^{-1}(\sigma)}{x - \sigma} \leqslant F^{-1}(x)$$

Or la limite de la fonction à droite est égale à celle de gauche : elle est nulle.

D'après le théorème de convergence par encadrement : $\lim_{x \to \sigma^-} \frac{F^{-1}(x) - F^{-1}(\sigma)}{x - \sigma} = 0$ */3*

$$\boxed{F^{-1} \text{ est dérivable en } \sigma \text{ et } F^{-1}(\sigma) = 1.}$$

Nous avons donc montré que F^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\sigma, \sigma]$.
On prolonge la fonction F^{-1} à $[-\sigma, 3\sigma]$ en opérant sur son graphe une symétrie par rapport à la droite $x = \sigma$, puis on prolonge F^{-1} à $\mathbb{R}$ tout entier par périodicité, on note `sl` la fonction ainsi construite. On a alors `sl` de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

7. La formulation trouvée en question 6.(a) donne une formulation précise sur $[-\sigma, \sigma]$:
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathtt{sl}'(x) = \sqrt{1 - \mathtt{sl}(x)^4}$.

   Et par symétrie axiale, les coefficients directeurs des tangentes sont multipliés par -1.

   On notera qu'on passe de $u \in [\sigma, 3\sigma]$ à son symétrique de $[-\sigma, \sigma]$ en prenant $2\sigma - u$.

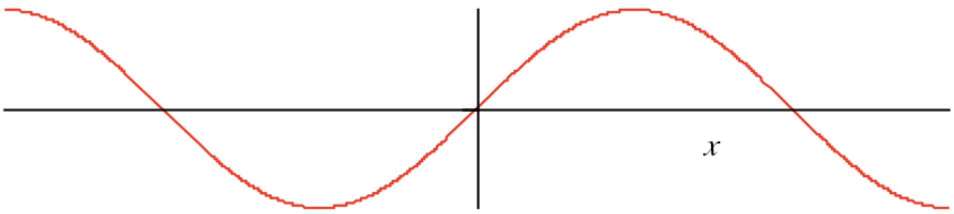
   $\forall u \in [\sigma, 3\sigma]$, $\mathtt{sl}'(u) = -\mathtt{sl}'(2\sigma - u) = -\sqrt{1 - \mathtt{sl}^4(2\sigma - u)} = -\sqrt{1 - \mathtt{sl}^4(u)}$

   puisque par symétrie $\mathtt{sl}^4(2\sigma - u) = \mathtt{sl}^4(u)$. */2*

   La périodicité ne perturbe pas ce calcul : */1*

$$\boxed{\begin{array}{lll} \forall u \in \mathbb{R}, & \text{si } u \in [(4k-1)\sigma, (4k+1)\sigma], & \mathtt{sl}'(u) = \sqrt{1 - \mathtt{sl}^4(u)} \\ & \text{et si } u \in [(4k+1)\sigma, (4k+3)\sigma], & \mathtt{sl}'(u) = -\sqrt{1 - \mathtt{sl}^4(u)} \end{array}}$$

8. Tracer le graphe de `sl` sur $[-3\sigma, \sigma]$. */3*



Remarques !

En fait, on démontre (par exemple en exploitant la formule du binôme de Newton pour $f : r \mapsto (1 - r^4)^{-1/2}$ puis en intégrant) que :

$$F(x) = \mathtt{argsl}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(4n+1)2^{2n}(n!)^2} x^{4n+1}$$

Ce développement en série entière de F donne à cette fonction une grande robustesse et de nombreuses qualités (elle est analytique donc holomorphe...)