Devoir à la maison n°4

La notation tiendra particuliérement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

Exercice

On considère l'ensemble $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites numériques **non nulles à partir d'un certain rang**.
On définit deux relations sur cet ensemble :

$$(u_n) \sim (v_n) \Longleftrightarrow \lim \frac{u_n}{v_n} = 1 \qquad \text{et} \qquad (u_n) = o\big((v_n)\big) \Longleftrightarrow \lim \frac{u_n}{v_n} = 0$$

1. (a) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence définie sur E.
   (b) Donner deux exemples de suites équivalentes à $(a_n) = (n^2)$.
2. (a) Montrer que $= o(\cdot)$ est transitive sur E Est-ce une relation d'ordre définie sur E ?
   (b) Est-elle totale ?
   (c) Donner deux exemples de suite (b_n) et (c_n) telle que $(b_n) = o\big((a_n)\big)$ et $(a_n) = o\big((c_n)\big)$.
   (avec (a_n) définie en 1.(b).)
3. Avons-nous pour tout suite (u_n) et (v_n) :

$$(u_n) \sim (v_n) \qquad \text{ou} \qquad (u_n) = o\big((v_n)\big) \qquad \text{ou} \qquad (v_n) = o\big((u_n)\big) \qquad ?$$

Problème

Ici on reprend (notations...) ce qui a été vu dans le problème du devoir surveillé n°2. On rappelle les notations/définitions :

$$\sigma = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1 - r^4}} \tag{1}$$

$$F(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1 - r^4}} \tag{2}$$

Et `sl` est le prolongement à $\mathbb{R}$, par symétrie puis 2σ-périodicité de F^{-1}.

III. Equation différentielle et trigonométrie lemniscatique.

1. Montrer que `sl` est de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}$

$$y''(x) + 2y^3(x) = 0 \tag{3}$$

   Soit f une solution de (3) sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que la fonction H définie par

$$H(x) = f'(x)^2 + f(x)^4 \tag{4}$$

   est constante sur $\mathbb{R}$. On note encore H cette constante.
   On choisit désormais de considérer le cas où $H > 0$, et on définit la fonction φ par

$$\varphi(x) = F(H^{-1/4} f(x)) \tag{5}$$

   où F a été définie à la formule (2).

3. En calculant la puissance quatrième de $H^{-1/4} f(x)$, montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer, toujours grâce au même calcul, que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle ouvert $]\alpha, \beta[$ où f' ne s'annule pas et calculer alors sa dérivée. En déduire qu'il existe une constante $b \in \mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = H^{1/4} \mathtt{sl}(H^{1/4} x + b) \tag{6}$$

pour tout $x \in]\alpha, \beta[$.

On admet que **pour toute solution** f **de l'équation différentielle** (3)**,**
il existe une constante $b \in \mathbb{R}$ **telle que** $\underline{\forall\ x \in \mathbb{R}}$ **,** $f(x) = H^{1/4}\mathtt{sl}(H^{1/4}x + b)$

La fonction $\mathtt{cl}$ est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\mathtt{cl}(x) = \frac{\mathtt{sl}'(x)}{1 + \mathtt{sl}^2(x)} \tag{7}$$

5. Montrer que pour tout x réel on a

$$\mathtt{sl}^2(x) + \mathtt{cl}^2(x) = 1 - \mathtt{sl}^2(x)\mathtt{cl}^2(x) \tag{8}$$

6. Calculer la fonction dérivée $\mathtt{cl}'$ de $\mathtt{cl}$ et en déduire que $\mathtt{cl}$ vérifie l'équation différentielle (3).
7. Montrer que pour tout x réel on a

$$\mathtt{cl}(x) = \mathtt{sl}(\sigma - x) \tag{9}$$

On définit la fonction G sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par

$$G(x, y) = \frac{\mathtt{sl}(x)\mathtt{sl}'(y) + \mathtt{sl}(y)\mathtt{sl}'(x)}{1 + \mathtt{sl}^2(x)\mathtt{sl}^2(y)}$$

8. Montrer que G vérifie l'équation

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial G}{\partial y}$$

   en déduire que pour tout a dans $\mathbb{R}$, G est constante le long de la droite d'équation $x + y = a$.
9. Montrer que

$$\mathtt{sl}(x + y) = G(x, y)$$

   et en déduire une formule d'addition pour la fonction $\mathtt{sl}$, c'est à dire une expression de $\mathtt{sl}(x+y)$ ne faisant intervenir que $\mathtt{sl}(x)$, $\mathtt{sl}(y)$, $\mathtt{cl}(x)$ et $\mathtt{cl}(y)$.