

Devoir à la maison n°7

La notation tiendra particulièrement compte de la **qualité de la rédaction**, la **précision des raisonnements** et l'**énoncé des formules utilisées**.

Problème 1. Valeur prise par une fonction au voisinage de $+\infty$

On fixe dans tout l'exercice une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ quelconque. On considère l'ensemble :

$$X_f = \{y \in \mathbb{R} \mid \forall A \in \mathbb{R}, \exists x \geq A, f(x) = y\}$$

1. Soit $T > 0$ fixé. On suppose que f est T -périodique.
Montrer que $X_f = f([0, T[)$.
2. On suppose maintenant que f est une fonction injective.
Montrer que l'ensemble X_f est vide.
3. On suppose que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.
Montrer que, là encore, l'ensemble X_f est vide.
4. On suppose que la fonction f admet en $+\infty$ une limite réelle ℓ .
 - (a) Montrer que $X_f \subset \{\ell\}$.
 - (b) Montrer par des exemples (avec les justifications nécessaires) que l'inclusion réciproque peut être vraie ou fausse.
5. On suppose que la fonction f est continue.
Montrer que X_f est un intervalle de $\mathbb{R}$
(on commencera par rappeler la définition d'un intervalle).

Problème 2. Etude d'une fonction

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \neq 0, f(x) = \frac{1}{x^2} \times \exp\left(-\frac{1}{x}\right)$$

1. Représentation de la fonction f .
 - (a) Etudier la continuité à gauche et à droite, la dérivabilité à gauche et à droite de f en 0.
 - (b) Etudier les limites et variations de f (à résumer dans un tableau) ; préciser les branches infinies.
 - (c) Tracer la courbe représentative $\mathcal{C}$ de cette fonction dans un repère orthonormal (unité : 2 cm).
On donne : $e^{-2} \approx 0,135$; $e^{-1} \approx 0,36$ et $e \approx 2,72$.
2. Dérivées successives de la fonction f et polynômes associés.
 - (a) Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.
 - (b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n à coefficients réels tel que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n+2}} \times e^{-\frac{1}{x}}$$

- . Démontrer de plus que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1} = X^2 P'_n + [1 - 2(n+1)X]P_n$.
 - (c) Calculer P_n pour $n \in [0, 4]$.
 - (d) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le degré, le coefficient dominant et le terme constant de P_n .
 - (e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, étudier la limite à droite en 0 de $f^{(n)}$.
En déduire que la fonction $f_{|]0, +\infty[}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
3. Nouvelles relations entre les polynômes P_n .
On considère la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow x^2 f(x)$.
 - (a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g^{(n+1)} = f^{(n)}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la formule de Leibniz pour calculer $g^{(n+1)}$, démontrer que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, P_{n+1}(x) = [1 - 2(n+1)x]P_n(x) - n(n+1)x^2P_{n-1}(x)$$

(c) En déduire que : $\forall x \in]0, +\infty[, P'_n(x) = -n(n+1)P_{n-1}(x)$.

4. Etude des racines du polynôme P_n . On notera $p_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction polynomiale associée au polynôme P_n .

(a) A l'aide de la relation établie à la question 3 - c), montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x > 0$, $p_n(x) \neq 0$ ou $p_{n-1}(x) \neq 0$.

(b) En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, +\infty[$, si la fonction p_n s'annule en x , alors $p'_n(x) \neq 0$. En déduire que la fonction p_n change de signe au point x .

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction polynomiale p_n a au plus un nombre fini de points d'annulation sur $]0, +\infty[$.

Notons k ce nombre et plaçons-nous dans le cas où $k \geq 2$; notons $x_1 < \dots < x_k$ ces points d'annulation.

i. Déterminer le signe de p_n sur les intervalles $[0, x_1[$, $]x_1, x_2[$, $\dots$, $]x_{k-1}, x_k[$.

ii. Montrer que $p'_n(x_i)$ est du signe de $(-1)^i$.

iii. Etudier le signe de p_{n+1} en chacun des x_i .

iv. Etudier la limite de p_{n+1} en $+\infty$.

v. Supposons ici $k = n$. Que peut-on en déduire sur les points d'annulation de la fonction p_{n+1} ?

(d) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme P_n possède au moins n racines dans $]0, +\infty[$.

Peut-on être plus précis ?

Problème 3. Groupes à 2, 3, 4 éléments

Soit G un ensemble fini. Si $\star$ est une loi de composition interne (LCI) sur l'ensemble G , on appellera table de la loi $\star$ le tableau $T, \star$ ci-dessous, où on lit dans la ligne x et la colonne y le « produit » $x \star y$ (dans cet ordre). On recherche les lois de composition interne $\star$ sur G telles que $(G, \star)$ est un groupe, c'est-à-dire :

(i) la loi $\star$ est associative,

(ii) la loi $\star$ admet un élément neutre dans G ,

(iii) tout élément $g \in G$ possède un symétrique dans G (que l'on notera g^{-1}) pour la loi $\star$.

On suppose que $\star$ est une telle loi. On notera désormais e l'élément neutre de G pour la loi $\star$. On le fera toujours apparaître en première position dans la table $T, \star$.

1. (a) Soit $x \in G$ fixé. Montrer que $f_x : G \rightarrow G, y \mapsto x \star y$ est bijective (on déterminera la bijection réciproque).

Que peut-on en déduire sur les lignes de la table de la loi $\star$?

(b) Soit $x \in G$ fixé. Montrer de même que $h_x : G \rightarrow G, y \mapsto y \star x$ est bijective.

Que peut-on en déduire sur les colonnes de la table de la loi $\star$?

2. (a) On suppose ici que G est de cardinal 2. On note $G = \{e, a\}$.

Démontrer que la table de la loi $\star$ est nécessairement la table ci-dessous :

$\star$	e	a
e	e	a
a	a	e

On expliquera clairement pourquoi il n'y a qu'une façon possible de remplir la table $T, \star$.

(b) On suppose ici que G est de cardinal 3. On note $G = \{e, a, b\}$.

i. Montrer que $a \star a = b$ (on pourra raisonner par l'absurde en essayant de remplir la table $T, \star$).

ii. En déduire qu'il n'y a qu'une table possible pour la loi $\star$.

3. On suppose ici que G est de cardinal 4. On va distinguer deux « familles » de loi de groupe sur G .

(a) On suppose ici que, pour tout $x \in G, x \star x = e$.

On note $G = \{e, a, b, c\}$. Montrer qu'il n'y a dans ce cas qu'une table $T, \star$ possible.

(b) On suppose ici qu'il existe $a \in G$ tel que $a \star a \neq e$. On pose $b = a \star a$.

i. Montrer que $b \neq a$. On note alors c le quatrième élément de G .

ii. Montrer qu'il n'y a qu'une façon possible de remplir la table $T, \star$.

(c) Combien existe-t-il de lois de composition interne sur G de cardinal 4 telles que $(G, \star)$ soit un groupe ?