Devoir surveillé n°5

Durée de l'épreuve : 4 heures
La calculatrice est interdite

Le devoir est composé d'un problème.
Lorsqu'une question est jugée, a priori, plus difficile, elle est précédée du symbole ($*$) voire ($**$).
La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

BON COURAGE

Problème - Autour de la conjecture de Bertrand

En 1845, Joseph Bertand énonce la conjecture suivante : « *l'écart entre un nombre premier et le nombre premier suivant ne peut pas être supérieur au nombre duquel on est parti* ».
Cela se formalise de la façon suivante :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \exists\, p \in \mathcal{P}, \text{ nombre premier tel que } n < p \leqslant 2n$$

Notations :

— Dans la suite, on notera donc $\mathcal{P}$, l'ensemble des nombres premiers. C'est un ensemble infini mais dénombrable, on supposera que

$$\mathcal{P} = \{p_1, p_2, p_3, \dots p_k \dots\}$$

où pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $p_i < p_{i+1}$. L'ensemble $\mathcal{P}$ est donc ainsi ordonné.
p_k est donc le k^{e}nombre premier. On a par exemple : $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7\dots$

— On note, pour tout $p \in \mathcal{P}$ et $a \in \mathbb{Z}$, $v_p(a)$, la valuation p-adique de a.

$$v_p(a) = \max\{\alpha \in \mathbb{N} \mid p^\alpha | a\}$$

On a donc l'équivalence : $v_p(a) = \alpha \iff p^\alpha | a$ et $p^{\alpha+1} \not| a$

— Pour tout nombre réel x, on note $\lfloor x \rfloor_{\mathcal{P}}$ le plus grand nombre premier inférieur à x.

$$\lfloor x \rfloor_{\mathcal{P}} = \max\{p \in \mathcal{P}, p \leqslant x\}$$

— Pour tout nombre réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ le plus grand nombre entier inférieur à x.

$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{N}, n \leqslant x\}$$

Dans la **partie I**, on fait quelques remarques élémentaires, puis on établit certains résultats (plus compliqués) qui pourront être exploités dans chacune des deux parties suivantes.
Dans la **partie II**, on suit la méthode employé par Paul Erdös lorsqu'il avait 19 ans, pour démontrer la conjecture de Bertrand et un peu plus.
Dans la **partie III**, on marche sur les pas de Pafnouti Tchebychev qui fut le premier à démontrer la conjecture de Bertrand, en 1850. Sa méthode ouvre également une voie pour démontrer le théorème des nombres premiers qui ne fut concluante qu'en 1948, soit 52 ans après les démonstrations historiques de 1896 de Jacques Hadamard et de Charles de la Vallé-Poussin.

I. Quelques résultats préliminaires

1. Donner la valeur des nombres p_i, pour $i \in [\![1, 10]\!]$
2. Soit $K \in \mathbb{N}$, donner un nombre n tel qu'il n'existe aucun nombre premier entre n et $n + K - 1$. (Résultat que l'on démontrera)
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $P = \prod_{k=1}^{n} p_k + 1$.
   (a) Montrer que $p_{n+1} \leqslant P$.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$p_n \leqslant 2^{2^{n-1}}$$
4. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout nombre premier $p \in \mathcal{P}$,
   $$v_p(n!) = \sum_{k \geqslant 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \qquad \text{(formule de Legendre)}$$
   (la somme est en réalité nécessairement finie)

II. Stratégie d'Erdös

1. On admet que 2, 3, 5, 7, 13, 23, 43, 83, 163, 317 et 631 sont tous des nombres premiers. Montrer que la conjecture de Bertrand est vrai pour tous les entiers $n \leqslant 500$ (astuce de Landau)
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $p_r = \lfloor x \rfloor_{\mathcal{P}} = \max\{p \in \mathcal{P}, p \leqslant x\}$.
   Sur l'ensemble de ces questions 2., on cherche ici à montrer l'inégalité :
   $$\prod_{p \leqslant x} p = \prod_{i=1}^{r} p_i \leqslant 4^{x-1}$$
   (le produit est définie sur tous les nombres p, premiers et inférieurs ou égaux à x).
   (a) Montrer que le résultat est vraie pour tout x tel que $p_r = 2$
   (b) Supposons que $p_r = 2m + 1$.
      i. Montrer que $\displaystyle\prod_{m+1 < p \leqslant 2m+1} p$ divise $\displaystyle\binom{2m+1}{m}$
      ii. Quel rapport existe-t-il entre $\displaystyle\binom{2m+1}{k}$ et $\displaystyle\binom{2m+1}{2m+1-k}$?
      En déduire que $\displaystyle\binom{2m+1}{m} \leqslant 2^{2m}$
   (c) Montrer alors par récurrence que $\displaystyle\prod_{p \leqslant p_r} p \leqslant 4^{p_r - 1}$, puis le résultat recherché.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathcal{P}$. *Dans l'ensemble de ces questions 3, on cherche des condition sur les nombres premiers p pour être (ou ne pas être) diviseur de* $\binom{2n}{n}$.
   (a) En exploitant la formule de Legendre, montrer que
   $$v_p\left(\binom{2n}{n}\right) = \sum_{k \geqslant 1} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right)$$
   (b) Montrer que $\displaystyle\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \leqslant 1$,
   puis que $v_p\left(\binom{2n}{n}\right) \leqslant \max\{r \mid p^r \leqslant 2n\}$.
   En déduire que pour $p > \sqrt{2n}$, $v_p(\binom{2n}{n}) \leqslant 1$
   (c) Montrer que l'intersection de $D_1 = \{p \in \mathcal{P} \mid \frac{2}{3}n < p \leqslant n\}$ et $D_2 = \mathcal{D}\left(\binom{2n}{n}\right) = \left\{k \in \mathbb{N} \mid k | \binom{2n}{n}\right\}$ est vide.
4. *En exploitant les résultats obtenus à la question précédente, on cherche dans ces questions 4 à trouver des inégalités fondamentales vérifiés par n.*
   (a) En exploitant la formule du binôme de Newton, montrer que $4^n \leqslant 2n\displaystyle\binom{2n}{n}$

(b) (*) A l'aide des questions 3. et en décomposant le nombre $\binom{2n}{n}$ en 4 produits de nombres premiers, montrer que

$$\binom{2n}{n} \leqslant \prod_{p\leqslant\sqrt{2n}} 2n \prod_{\sqrt{2n}<p\leqslant\frac{2}{2}n} p \prod_{n<p\leqslant 2n} p$$

(le produit est défini sur les nombres premiers p)

(c) En déduire que l'inégalité fondamentale :

$$4^n \leqslant (2n)^{1+\sqrt{2n}} \times \prod_{\sqrt{2n}<p\leqslant\frac{2}{3}n} p \times \prod_{n<p\leqslant 2n} p$$

(les produits sont définis avec de nombre $p \in \mathcal{P}$, i.e. des nombres premiers)

5. *Dans ces questions 5., en travaillant sur l'inégalité fondamentale, on démontre la conjecture de* Bertrand *à l'aide d'un raisonnement par l'absurde.*

On considère $\varphi : x \to x^{1/x+1/\sqrt{x}}$ et $\psi : x \mapsto \dfrac{1+x}{2+x} - \ln x$.

<u>Supposons qu'il n'y a aucun nombre premier p entre les entiers $n+1$ et $2n$.</u>

(a) En déduire que $4^{\frac{1}{3}n} \leqslant (2n)^{1+\sqrt{2n}}$ puis

$$2^{2n} \leqslant (2n)^{3(1+\sqrt{2n})} \qquad (1)$$

(b) Calculer un équivalent de $x \mapsto 2^x - x^{3(1+\sqrt{x})}$ au voisinage de $+\infty$.
Que pensez-vous de l'inégalité (1)

(c) i. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\varphi'(x)$ est du signe de $\psi(\sqrt{x})$.

ii. Etudier les variations de ψ, et montrer qu'il existe un unique réel, noté α tel que $\psi(\alpha) = 0$.
Montrer que $\alpha \in]2, e[$.

iii. En déduire les variations de φ et l'existence de $\beta > \alpha^2$ tel que $\varphi(\beta) = \sqrt[3]{2}$.

(d) Montrer que pour (1) soit vérifiée, il faut que $n < 500$.
On donne : $\varphi(1000) \approx 1,2527 < 1,2599 \approx 2^{1/3}$

6. Démontrer la conjecture de Bertrand en exploitant l'astuce de Landau.

III. Stratégie historique de Tchebychev

Dans ce qui suit, les relations de domination (O) sont toujours définies au voisinage de $+\infty$ (parfois $n \to +\infty$, parfois $x \to +\infty$).
On considère comme précédent pour $n \in \mathbb{N}$,
$r(n)$ (noté r si il n'y a pas de doute) le nombre tel que $p_{r(n)} \leqslant n < p_{r(n)+1}$ i.e. $p_{r(n)} = \lfloor n \rfloor_{\mathcal{P}}$.

1. *On commence par quelques résultats de comparaison entre les applications* $\ln_{|\mathbb{N}}$ *et factorielle.*
Soit $n \in \mathbb{N}$.

(a) On considère $\Phi : t \mapsto t\ln t - t$.
Montrer que Φ admet un prolongement par continuité en 0.
Puis, en appliquant l'inégalité des accroissements finis à Φ, montrer que

$$\ln n! = \sum_{m=1}^{n} \ln m = n\ln n - n + O(\ln n)$$

(b) Montrer que, pour tout entier $m \in \mathbb{N}$ et $m \leqslant n$,

$$\ln m = \sum_{k=1}^{r(n)} \big(\ln(p_k) \times v_{p_k}(m)\big)$$

(c) (**) En déduire que

$$\ln n! = \sum_{k=1}^{r(n)} \left(\ln(p_k) \times \sum_{h\geqslant 1} \left\lfloor \frac{n}{(p_k)^h} \right\rfloor\right)$$

2. *Fonction de Mangoldt.*
On considère $\Lambda : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R},\ d \longmapsto \begin{cases} \ln p & \text{si} \quad \exists\, k \in \mathbb{N}^* \mid d = p^k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

(a) Calculer $\Lambda(k)$ pour tout k de 1 à 16.

(b) En déduire que $\displaystyle\sum_{d\leqslant 16}\Lambda(d)\left\lfloor\frac{16}{d}\right\rfloor = \ln(2^{15}\times 3^6\times 5^3\times 7^2\times 11\times 13)$.

Par ailleurs, exprimer 16! en produit de nombres premiers.

(c) (*) Montrer alors plus généralement en exploitant les questions 1. que

$$\sum_{d\leqslant n}\Lambda(d)\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor = n\ln n - n + O(\ln n)$$

3. *En exploitant quatre nouvelles fonctions, on cherche à majorer et minorer le nombres $\psi(x)$.*

Notons

- $B :]0,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R},\ x\longmapsto \displaystyle\sum_{d\leqslant\lfloor x\rfloor}\Lambda(d)\left\lfloor\frac{x}{d}\right\rfloor$

- $B_2 :]0,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R},\ x\longmapsto B(x)-2B(\frac{x}{2})$

- $\psi :]0,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R},\ x\longmapsto \displaystyle\sum_{d\leqslant\lfloor x\rfloor}\Lambda(d)$

- $\chi : \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ x\mapsto\lfloor x\rfloor - 2\lfloor\frac{x}{2}\rfloor$

(a) Montrer que χ est 2-périodique. Préciser $\chi([0,2[)$, puis $\chi(u)$ pour $u\in\mathbb{R}_+$.

(b) (*) Montrer que pour tout $x>0$:

$$B_2(x)=\sum_{d\leqslant x}\Lambda(d)\chi\left(\frac{x}{d}\right)\qquad\text{et}\qquad B_2(x)=x\ln 2+O(\ln x)$$

(c) En exploitant l'image de χ et la première égalité, encadrer $B_2(x)$ entre $\psi(x)-\psi(\frac{x}{2})$ et $\psi(x)$.

(d) En déduire que pour $x\geqslant 2$, $\psi(x)\geqslant x\ln 2+O(\ln x)$

(e) Et montrer également que pour tout $k\in\mathbb{N}$,

$$\psi(x)\leqslant\sum_{j=0}^{k}B_2\left(\frac{x}{2^j}\right)+\psi\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)$$

(f) En déduire que

$$\psi(x)\leqslant 2x\ln 2+O\big((\ln x)^2\big)$$

On pourra prendre $k=\left\lfloor\frac{\ln x}{\ln 2}\right\rfloor$ dans l'inégalité précédente

4. *La fonction ψ et la fonction π sont assez proches. On essaye ici de préciser la proximité entre ces deux fonctions, on en tire une majoration et minoration de $\pi(x)$.*

On note $\pi(x)=\operatorname{card}\{p\in\mathcal{P}\mid p\leqslant x\}$.

(a) Montrer que pour tout $x>0$, on peut écrire $\psi(x)$ autrement :

$$\psi(x)=\sum_{k=1}^{r}\left\lfloor\frac{\ln x}{\ln p_k}\right\rfloor\ln p_k$$

(avec $r=\lfloor x\rfloor_{\mathcal{P}}$)

(b) Montrer que pour $u\geqslant 1$, $\lfloor u\rfloor\leqslant u\leqslant 2\lfloor u\rfloor$.

En déduire que pour tout $x\geqslant 1$:

$$\psi(x)\leqslant\pi(x)\ln x\leqslant 2\psi(x)$$

(c) En déduire que

$$\pi(x)=\frac{\psi(x)}{\ln x}+O\left(\frac{x}{\ln x}\right)$$

(d) Conclure que

$$(\ln 2+O(1))\frac{x}{\ln x}\leqslant\pi(x)\leqslant(\ln 4+O(1))\frac{x}{\ln x}$$

5. Dans sa démonstration historique, Tchebychev a montré l'existence de deux nombres c_1 et c_2 tels que

$$c_1<1<c_2<2c_1\qquad\text{et}\qquad (c_1+o(1))\frac{x}{\ln x}\leqslant\pi(x)\leqslant(c_2+o(1))\frac{x}{\ln x}$$

Il s'agit bien ici de « petit »o.

Démontrer alors la conjecture de Bertrand, à partir d'un certain rang.