Devoir surveillé n°5
CORRECTION

Problème - Autour de la conjecture de Bertrand

I. Quelques résultats préliminaires

1. Les premiers nombres premiers sont /1

$$\boxed{p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, p_5 = 11, p_6 = 13, p_7 = 17, p_8 = 19, p_9 = 23, p_{10} = 29}$$

2. Notons que $(K+1)!$ est divisible par tous les nombres entiers de 2 à $K+1$.
   Considérons $n = (K+1)! + 2$.
   Alors $2|n = 2(1 + \frac{(K+1)!}{2})$, $3|n+1 = (K+1)! + 3\ldots$
   et pour $h \in [\![2, K+1]\!]$: $h|n + (h-2) = (K+1)! + h$ car $h|(K+1)!$.
   Ainsi pour tout $h \in [\![2, K+1]\!]$, $n + (h-2)$ n'est pas un nombre premier. /1,5

   $\boxed{\text{Le nombre } n = (K+1)! + 2 \text{ tel qu'il n'existe aucun nombre premier entre } n \text{ et } n + K - 1}$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $P = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} p_k + 1$.
   (a) Soit p un nombre premier qui divise p (si P est premier, $P = p$).
   Soit $k \in [\![1, n]\!]$, si $p_k|P$, alors comme $p_k| \displaystyle\prod_{k=1}^{n} p_k$, $p_k|P - \displaystyle\prod_{k=1}^{n} p_k = 1$.
   Ceci est absurde, donc p_k ne divise par P.
   Ainsi $p \notin \{p_1, p_2, \ldots p_n\}$. Donc $p \geqslant p_{n+1}$.
   On a donc /1,5
   $$\boxed{p_{n+1} \leqslant p \leqslant P}$$
   (b) Montrons ce résultat par une récurrence forte.
   On note pour $k \in \mathbb{N}^*$: $\mathcal{H}_k$: « $p_k \leqslant 2^{2^{k-1}}$ ».
   — $p_1 = 2 \leqslant 2^{2^0} = 2$. Donc $\mathcal{H}_1$ est vraie.
   — Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et supposons que $\forall\ h \leqslant k$, $\mathcal{H}_h$ est vérifiée.
   D'après la question précédente :
   $$p_{k+1} \leqslant \prod_{h=1}^{k} p_h + 1 \leqslant \prod_{h=1}^{k} 2^{2^{h-1}} + 1 = 2^{\sum_{h=1}^{k} 2^{h-1}} + 1$$
   On reconnait une somme d'une suite géométrique : $\displaystyle\sum_{h=1}^{k} 2^{h-1} = 1 \times \frac{2^k - 1}{2 - 1} = 2^k - 1$.
   Donc
   $$p_{k+1} \leqslant 2^{2^k - 1} + 1$$
   Or $2^{2^k-1} + 1 \leqslant 2^{2^k} \Longleftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{2^k}} \leqslant 1 \Longleftrightarrow \frac{1}{2^{2^k}} \leqslant \frac{1}{2}$.
   Et donc chacune des ces équivalences est vraie dès que $k \geqslant 0$.
   Donc $\mathcal{H}_{k+1}$ est vérifiée. /2
   $$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ p_n \leqslant 2^{2^{n-1}}}$$

Piste de recherche...
Autre méthode : on commence par montrer que $p_{n+1} \leqslant p_n^2 \ldots$

Remarques !
En fait cet estimation est totalement mauvaise. Ce n'est pas du tout le bon ordre de grandeur. L'enjeu du devoir est de justement trouvé un ordre de grandeur plus adéquate...

4. Soit p un nombre premier.

Remarques !

C'est un exercice pas facile (...) mais corrigé et commenté en cours.
Que ceux qui n'ont pas pris la correction, n'ont pas révisé l'exercice et n'ont même pas cherché à comprendre soient ...

Soit $k = \lfloor \frac{n}{p} \rfloor$ c'est-à-dire que $kp \leqslant n$ et $(k+1)p > n$.
Ainsi, dans le produit qui définit $n!$, on a : p, $2p$, $\dots kp$ et d'autres nombres h premiers avec p.
Notons H le nombre entiers égal à $\frac{n!}{p\times 2p \times \cdots \times kp}$. On a $H \wedge p = 1$.
Autrement écrit : $n = p^k \times k! \times H$ avec $H \wedge p = 1$.
Ainsi, $v_p(n!) = k + v_p(k!) = \lfloor \frac{n}{p} \rfloor + v_p(k!)$ (les seuls autres multiples de p se trouve dans $k!$). /1,5
Enfin, si on applique la même formule à k, on va trouver :
$v_p(k!) = \lfloor \frac{k}{p} \rfloor + v_p(k'!)$ avec $k' = \lfloor \frac{k}{p} \rfloor$.
Or

$$k' = \left\lfloor \frac{k}{p} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor}{p} \right\rfloor$$

Cela signifie que $k' \leqslant \dfrac{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor}{p} < k'+1$ et donc $k'p \leqslant \lfloor \frac{n}{p} \rfloor < k'p + p$.
Ainsi $k'p \leqslant \lfloor \frac{n}{p} \rfloor \leqslant \frac{n}{p}$ et donc $k' \leqslant \frac{n}{p^2}$.
Alors que $\frac{n}{p} < \lfloor \frac{n}{p} \rfloor + 1$ et $\lfloor \frac{n}{p} \rfloor + 1 < k'p + p + 1$, comme ils sont entiers : $\lfloor \frac{n}{p} \rfloor + 1 \leqslant k'p + p$.
ainsi $\frac{n}{p} < k'p + p$ et donc $\frac{n}{p^2} < k' + 1$
Donc nécessairement : $k' = \left\lfloor \dfrac{n}{p^2} \right\rfloor$ puis $v_p(k!) = \lfloor \frac{n}{p^2} \rfloor + v_p(k'!)$.
Et par conséquent : $v_p(n!) = \lfloor \frac{n}{p} \rfloor + \lfloor \frac{n}{p^2} \rfloor + v_p\left(\lfloor \frac{n}{p^2} \rfloor !\right)$ On montre ainsi de la même façon :

$$\forall\ k \in \mathbb{N}, \quad v_p\left(\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor !\right) = \left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}} \right\rfloor + v_p\left(\left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}} \right\rfloor !\right) \Longrightarrow v_p\left(\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor !\right) - v_p\left(\left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}} \right\rfloor !\right) = \left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}} \right\rfloor$$

On a alors en sommant ces égalités, on a un télescopage :

$$v_p(n!) - v_p\left(\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor !\right) = \sum_{h=1}^{k} v_p\left(\left\lfloor \frac{n}{p^{h-1}} \right\rfloor !\right) - v_p\left(\left\lfloor \frac{n}{p^h} \right\rfloor !\right) = \sum_{h=1}^{k} \left\lfloor \frac{n}{p^h} \right\rfloor$$

Et comme à partir d'un certain rang, $v_p\left(\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor !\right) = 0$, on peut affirmer : /2,5

$$\boxed{v_p(n!) = \sum_{k\geqslant 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \qquad \text{(formule de Legendre)-}\textit{(la somme est nécessairement finie)}}$$

Piste de recherche...

Une stratégie différente marche également :
- *pour tout $a, b \in \mathbb{N}$, $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$*
- *$v_p(n!) = v_p(\prod_{k=1}^{n} k) = \sum_{k=1}^{n} v_p(k)$*
- *puis $v_p(k) = 0$ si $p \not| k$ car p est un nombre premier.*
- *il reste seulement les multiple de p : $v_p(n!) = \sum_{p\mid d, d\leqslant n} v_p(d)$*
- *$\lfloor \frac{n}{p} \rfloor$ dénombre le nombre d'entiers plus petit que n et multiple de p.*
  mais parmi ceux-ci certain sont aussi divisible par p^2, il faudrait les compter une deuxième fois, c'est pourquoi il faut aussi ajouter $\lfloor \frac{n}{p^2} \rfloor$, qui dénombre ceux-ci.
  Et il faut également ajouter ceux qui sont divisible par p^3...

Bilan : $v_p(n!) = \sum_{k\geqslant 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$

II. Stratégie d'Erdös

1. On admet que 2, 3, 5, 7, 13, 23, 43, 83, 163, 317 et 631sont tous des nombres premiers.
   La liste, notée L, donnée vérifie :

$$\forall\ h \in L \setminus \{631\}, \exists\ k \in L \mid h \leqslant k \leqslant 2h$$

c'est-à-dire : chaque terme est plus petit que le double du précédent.
Soit $n \leqslant 500$, $(n \neq 1)$ il existe donc h et k dans L tel que $h \leqslant n \leqslant k \leqslant 2h \leqslant 2n$.
Donc entre n et $2n$ se trouve au moins un nombre premier k. */1*

$$\boxed{\text{La conjecture de Bertrand est vrai pour tous les entiers } n \leqslant 500 \text{ (astuce de Landau)}}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $p_r = \lfloor x \rfloor_{\mathcal{P}} = \max\{p \in \mathcal{P}, p \leqslant x\}$.
   En fait, p_r est le plus grand nombre premier inférieur à x On cherche ici à montrer

$$\prod_{p \leqslant x} p = \prod_{i=1}^{r} p_i \leqslant 4^{x-1}$$

(a) Si p_r, cela signifie que $x = 2$. On a alors $\displaystyle\prod_{i=1}^{r} p_i = 2$ et $4^{x-1} = 4^1 = 4$. */1*

$$\boxed{\text{Donc, le résultat est vraie pour tout } x \text{ tel que } p_r = 2}$$

(b) Supposons que $p_r = 2m+1$.

i. Le nombre $\binom{2m+1}{m} = \frac{(2m+1)!}{m!(m+1)!}$ est un nombre entier.
Soit $p \in \mathcal{P}$ et $p \in]m+1, 2m+1]$, alors p se trouve dans le produit $(2m+1)!$
(car p est plus petit que $2m+1$).
Donc $p | (2m+1)! = \binom{2m+1}{m} \times m!(m+1)!$
Or p est premier et supérieur à tout nombre, facteur de $m!$ donc $p \wedge m! = 1$
De même, p premier est supérieur à tout facteur de $(m+1)!$ donc $p \wedge (m+1)! = 1$.
Donc d'après le lemme de Gauss p divise $\binom{2m+1}{m}$.
Puis, tous les nombres p, premiers de $]m+1, 2m+1]$ sont premiers entre eux,
donc leur produit divise également $\binom{2m+1}{m}$.
Finalement */2*

$$\boxed{\prod_{m+1<p\leqslant 2m+1} p \text{ divise } \binom{2m+1}{m}}$$

ii. Pour tout $k \leqslant 2m+1$, on a une symétrie concernant les coefficients binomiaux :

$$\boxed{\binom{2m+1}{k} = \binom{2m+1}{2m+1-k}}$$

Et donc

$$2^{2m+1} = \sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} = \sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1}{k} + \sum_{k=m+1}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} = \sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1}{k} + \sum_{k=m+1}^{2m+1} \binom{2m+1}{2m+1-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1}{k} + \underbrace{\sum_{h=0}^{m} \binom{2m+1}{h}}_{h=2m+1-k} = 2\sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1}{k}$$

Donc en divisant par 2 :

$$2^{2m} = \sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1}{k} = \underbrace{\sum_{k=0}^{m-1} \binom{2m+1}{k}}_{\geqslant 0} + \binom{2m+1}{m} \geqslant \binom{2m+1}{m}$$

/2,5

$$\boxed{\binom{2m+1}{m} \leqslant 2^{2m}}$$

(c) Notons pour tout entier $k \geqslant 2$, $\mathcal{H}'_k$: « $\displaystyle\prod_{p \leqslant k} p \leqslant 4^{k-1}$. »

— On a vu que $\mathcal{H}'_2$ est vraie.
— Soit $k \geqslant 2$. Supposons que pour tout $h \leqslant k$, $\mathcal{H}'_h$ est vraie (récurrence forte).
Soit $k+1 \in \mathbb{N}$. Comme $k+1 \geqslant 3$, on peut supposer que $\lfloor k+1 \rfloor_{\mathcal{P}} \geqslant 3$.
On note $\lfloor k+1 \rfloor_{\mathcal{P}} = p_r = 2m+1$.
D'après la question précédente, on a alors $\displaystyle\prod_{m+1<p\leqslant 2m+1} p \leqslant \binom{2m+1}{m} \leqslant 2^{2m}$.
Ainsi, en exploitant $\mathcal{H}'_{m+1}$ qui est vraie ($k+1 \geqslant 2m+1 > m+1$) :

$$\prod_{p\leqslant k+1} p = \prod_{p\leqslant m+1} p \times \prod_{m+1<p\leqslant 2m+1} p \leqslant 4^m \times 2^{2m} = 4^m \times 4^m = 4^{2m} = 4^{p_r-1} \leqslant 4^k$$

Ainsi $\mathcal{H}'_{k+1}$ est vraie. /1,5

$$\boxed{\forall\, k \in \mathbb{N}, k \geqslant 2, \prod_{p\leqslant k} p \leqslant 4^{k-1}}$$

Puis, en prenant x, un réel quelconque et $k = \lfloor x \rfloor$, comme $4^{k-1} \leqslant 4^{x-1}$: /0,5

$$\boxed{\forall\, x \geqslant 2, \prod_{p\leqslant x} p = \prod_{i=1}^{r} p_i \leqslant 4^{x-1}}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathcal{P}$.
   (a) On sait que $\binom{2n}{n} = \dfrac{(2n)!}{n!n!}$.
   Nous avons vu en cours que si $a|b$, alors $v_p(a) \leqslant v_p(b)$ et mieux : $v_p(\frac{b}{a}) = v_p(b) - v_p(a)$.
   On peut affirmer, avec la formule de Legendre : /2

$$\boxed{v_p\left(\binom{2n}{n}\right) = v_p(2n!) - 2v_p(n!) = \sum_{k\geqslant 1} \left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor}$$

   (b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, comme $\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor \leqslant \frac{2n}{p^k}$ et $\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor > \frac{n}{p^k} - 1$, on a

$$\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor < \frac{2n}{p^k} - 2\left(\frac{n}{p^k} - 1\right) < 2$$

   Comme il s'agit d'une soustraction de nombres entiers, /1

$$\boxed{\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \leqslant 1}$$

Remarques !
Avec la notation de la partie suivante, il s'agit de $\chi(\frac{2n}{p^k}) \geqslant 0$

   Donc, avec : $R = \max\{r \mid p^r \leqslant 2n\}$, $v_p\left(\binom{2n}{n}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{R} 1 = R$ (les termes suivants sont nuls) /1,5

$$\boxed{v_p\left(\binom{2n}{n}\right) \leqslant R = \max\{r \mid p^r \leqslant 2n\}}$$

   On en déduit que si $p > \sqrt{2n}$ alors $p^2 > 2n$ et donc /1

$$\boxed{\text{pour } p > \sqrt{2n},\ v_p(\tbinom{2n}{n}) \leqslant 1}$$

   (c) Soit $p \in D_1 \cap D_2$, c'est nécessairement un nombre premier, comme tous les éléments de D_1.
   On a donc $2n < 3p \leqslant 3n$, et aussi $2p \leqslant 2n$ car $p \in D_1$.
   On sait, par ailleurs que $p \in D_2$, donc p divise $\binom{2n}{n}$ et donc p et $2p$ sont les seuls facteurs multiples de p dans qui apparaissent dans $(2n)!$, alors que p apparait également deux fois au dénominateur : une fois dans chaque $n!$. Il y a donc une simplification. Ainsi $v_p(\binom{2n}{n}) = 0$.
   Autrement écrit, avec $D_1 = \{p \in \mathcal{P} \mid \frac{2}{3}n < p \leqslant n\}$ et $D_2 = \left\{k \in \mathbb{N} \mid k|\binom{2n}{n}\right\}$, /1,5

$$\boxed{D_1 \cap D_2 = \emptyset}$$

4. (a) Tout d'abord notons que

$$4^n = 2^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = 2\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{k} \leqslant 2\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{n} = 2n\binom{2n}{n}$$

On exploite ici la symétrie : $\binom{2n}{k} = \binom{2n}{2n-k}$ mais aussi pour tout $k \leqslant n$, $\binom{2n}{k} \leqslant \binom{2n}{n}$ On a donc /2

$$\boxed{\binom{2n}{n} \geqslant \frac{4^n}{2n}}$$

(b) Tous les produits qui suivent sont définies sur les nombres premiers.
Comme pour tout nombre : $a = \prod\limits_{p \leqslant a} p^{v_p(a)}$, on peut affirmer

$$\binom{2n}{n} = \prod_{p \leqslant 2n} p^{v_p(\binom{2n}{n})}$$

ici le produit s'arrête à $2n$, car par définition du coefficient binomial, les facteurs sont tous inférieurs à $2n$.

$$\binom{2n}{n} = \prod_{p \leqslant \sqrt{2n}} p^{v_p(\binom{2n}{n})} \prod_{\sqrt{2n} < p \leqslant \frac{2}{3}n} p^{v_p(\binom{2n}{n})} \prod_{\frac{2}{3}n < p \leqslant n} p^{v_p(\binom{2n}{n})} \prod_{n < p \leqslant 2n} p^{v_p(\binom{2n}{n})}$$

Comme on a vu en 3.(c), $p^{v_p(\binom{2n}{n})} = p^R \leqslant 2n$, donc $\prod\limits_{p \leqslant \sqrt{2n}} p^{v_p(\binom{2n}{n})} \leqslant \prod\limits_{p \leqslant \sqrt{2n}} 2n$.
Comme on a vu en 3.(b) que pour $p \in D_1$, $p \notin D_2$, donc $\prod\limits_{\frac{2}{3}n < p \leqslant n} p^{v_p(\binom{2n}{n})} = 1$ (produit vide).
Comme on a vu en 3.(b) que pour $p > \sqrt{2n}$, $v_p(\binom{2n}{n}) \leqslant 1$, on peut affirmer : /4

$$\boxed{\binom{2n}{n} \leqslant \prod_{p \leqslant \sqrt{2n}} 2n \prod_{\sqrt{2n} < p \leqslant \frac{2}{3}n} p \prod_{n < p \leqslant 2n} p}$$

(c) On a donc

$$\frac{4^n}{2n} \leqslant \prod_{p \leqslant \sqrt{2n}} 2n \prod_{\sqrt{2n} < p \leqslant \frac{2}{3}n} p \prod_{n < p \leqslant 2n} p$$

Or il y a au plus $\lfloor \sqrt{2n} \rfloor$ nombres entiers premiers inférieurs à $\sqrt{2n}$, donc $\prod\limits_{p \leqslant \sqrt{2n}} 2n \leqslant (2n)^{\sqrt{2n}}$. /1,5

$$\boxed{4^n \leqslant (2n)^{1+\sqrt{2n}} \times \prod_{\sqrt{2n} < p \leqslant \frac{2}{3}n} p \times \prod_{n < p \leqslant 2n} p}$$

5. <u>Supposons qu'il n'y a aucun nombre premier p entre les entiers $n+1$ et $2n$.</u>

(a) On a donc $\prod\limits_{n < p \leqslant 2n} p = 1$ (aucun nombre premier. Attention, cela ne donne pas 0 !).
Et par conséquent avec la formule de la question précédente :

$$4^n \leqslant (2n)^{1+\sqrt{2n}} \times \prod_{\sqrt{2n} < p \leqslant \frac{2}{3}n} p \leqslant (2n)^{1+\sqrt{2n}} \times \prod_{p \leqslant \frac{2}{3}n} p \leqslant (2n)^{1+\sqrt{2n}} \times 4^{2/3n}$$

d'après le résultat trouvé en question 2.
Et donc /1,5

$$\boxed{4^{n-2/3n} = 4^{n/3} \leqslant (2n)^{1+\sqrt{2n}} \Longleftrightarrow 4^n = 2^{2n} \leqslant (2n)^{3+3\sqrt{2n}}}$$

(b) On note $g : x \mapsto 2^x - x^{3(1+\sqrt{x})}$.
On a alors

$$\frac{g(x)}{2^x} = 1 - \frac{x^{3(1+\sqrt{x})}}{2^x} = 1 - \exp\left(3(1+\sqrt{x})\ln x - x\ln 2\right)$$

Ici on a une forme indéterminée $\infty - \infty$:
$\lim_{x\to\infty} x\ln 2 = +\infty$ et $\lim_{x\to\infty} 3(1+\sqrt{x})\ln x = +\infty$.
Or

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3(1+\sqrt{x})\ln x}{x\ln 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{\ln 2}\frac{\ln x}{x} + \lim_{x\to\infty} \frac{3}{\ln 2}\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$$

d'après les formules de référence du cours.
Donc par composition des limites :

$$\lim_{x\to\infty} \exp\big(3(1+\sqrt{x})\ln x - x\ln 2\big) = 0 \Longrightarrow \frac{g(x)}{2^x} \to 1$$

Ainsi /3

$$\boxed{\begin{array}{c} g(x) \sim_{x\to\infty} 2^x \text{ et par conséquent } \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = +\infty \\ \text{Ainsi, à partir d'un certain rang } x\text{, l'inégalité (1) n'est plus vérifiée} \end{array}}$$

(c) i. φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition $\mathbb{R}_+^*$, comme composition (dont la fonction exponentielle).
Pour tout $x > 0$, $\varphi(x) = \exp\Big((\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})\ln x\Big)$,

$$\varphi'(x) = \left[\left(\frac{-1}{x^2} - \frac{1}{2x\sqrt{x}}\right)\ln(x) + \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x\sqrt{x}}\right)\right]\times\varphi(x) = \left[\frac{1+\sqrt{x}}{x^2} - \frac{2+\sqrt{x}}{2x^2}\ln x\right]\varphi(x)$$

$$= \frac{2+\sqrt{x}}{x^2}\left[\frac{1+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\ln x\right]\varphi(x) = \frac{2+\sqrt{x}}{x^2}\times\psi(\sqrt{x})\times\varphi(x)$$

Or pour tout $x > 0$, $\varphi(x) > 0$ (c'est une exponentielle) et $\frac{2+\sqrt{x}}{x^2} > 0$. /3

$$\boxed{\text{Donc pour tout } x > 0,\ \varphi'(x) \text{ est du signe de } \psi(\sqrt{x})}$$

ii. Pour étudier le signe de ψ, on va étudier sa dérivée.
ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$

$$\psi'(x) = \frac{(2+x)-(1+x)}{(2+x)^2} - \frac{1}{x} = -\frac{x^2+3x+4}{x(2+x)^2}$$

Or le discriminant du numérateur est $\Delta = 9 - 16 = -7 < 0$, donc ψ' est toujours du même signe : négatif.
Par conséquent la fonction ψ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
ψ établit donc une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $]\lim_{+\infty}\psi, \lim_0 \psi[=]-\infty, +\infty[$.
Donc il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\psi(\alpha) = 0$.
Par ailleurs $\psi(2) = \dfrac{3}{4} - \ln 2 = 0,75 - 0,69 > 0$ et $\psi(e) = \dfrac{1+e}{2+e} - 1 = \dfrac{-1}{2+e} < 0$.
Donc /2

$$\boxed{\text{il existe un unique } \alpha \in \mathbb{R}_+^* \text{ tel que } \psi(\alpha) = 0 \text{ et } \alpha \in]2, e[}$$

iii. On en déduit que

$$\boxed{\varphi \text{ est croissante sur }]0, \alpha^2[\text{ et décroissante strictement sur }]\alpha^2, +\infty[.}$$

Par ailleurs, on a l'équivalence

$$(1) \Longleftrightarrow 2^{1/3} \leqslant (2n)^{\frac{1}{2n}+\frac{1}{\sqrt{2n}}} = \varphi(2n)$$

Pour $2n \geqslant \alpha^2$ - *condition vérifiée dès que* $2n \geqslant 10 > 3^2 > e^2$*, donc* $n \geqslant 5$,
on peut exploiter la décroissance stricte de φ sur $]\alpha^2, +\infty[$,
comme $\lim\limits_{+\infty} \varphi = e^0 = 1$ et $\varphi(3^2) = \exp(\frac{8}{9}\ln 3) = 3^{8/9} > 2$ car $3^8 > 2^9$. /2

$$\boxed{\text{on peut affirmer qu'il existe un unique } \beta > \alpha^2 \text{ tel que } \varphi(\beta) = 2^{1/3}}$$

(d) Comme φ est strictement décroissante sur $]\alpha^2, +\infty[$ on a les équivalences :

$$\boxed{(1) \Longleftrightarrow \varphi(2n) \geqslant \varphi(\beta) \Longleftrightarrow 2n \leqslant \beta}$$

Enfin, comme d'après les donnés numérique, $\varphi(1000) < \varphi(\beta)$, on peut affirmer que /2

$$\boxed{\text{pour que (1) soit réalisée, il faut que } 2n < 1000 \text{ ie. } n < 500}$$

6. A la question précédente, on a montré que pour que la conjecture de Bertrand ne soit par vérifié, il faut se concentrer sur des nombres $n < 500$.
Or on a vu, avec l'astuce de Landau que la conjecture de Bertrand n'est pas vérifié pour $n \leqslant 500$. /1,5

$$\boxed{\text{La conjecture de Bertrand est donc démontrée}}$$

III. Stratégie historique de Tchebychev

Dans ce qui suit, les relations de domination (O) sont toujours définies au voisinage de $+\infty$ (parfois $n \to +\infty$, parfois $x \to +\infty$).

1. On commence par quelques résultats. Soit $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Comme $\lim_{t\to 0^+} t\ln t = 0$, *(/1)*

$$\boxed{\text{on prolonge par continuité } \Phi \text{ en } 0 \text{ en posant } \Phi(0) = 0}$$

La fonction Φ ainsi définie est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\Phi'(t) = \ln t$.
Φ' est croissante et positive sur $[1, +\infty[$ (fonction de référence),
on applique l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle $[k, k+1]$:

$$\forall\ k \in \mathbb{N}^*, \Phi'(k)((k+1)-k) = \ln(k) \leqslant \Phi(k+1) - \Phi(k) \leqslant \Phi'(k+1)((k+1)-k) = \ln(k+1)$$

On a donc

$$\sum_{k=1}^{n} \ln k \leqslant \sum_{k=1}^{n} (\Phi(k+1) - \Phi(k)) = \Phi(n+1) - \Phi(1) = (n+1)\ln(n+1) - (n+1) - (0-1)$$

et de même

$$\sum_{k=1}^{n} \ln k = \sum_{k=0}^{n-1} \ln(k+1) \geqslant \sum_{k=0}^{n-1} (\Phi(k+1) - \Phi(k)) = \Phi(n) - \Phi(0) = n\ln n - n$$

On a donc le double encadrement :

$$n\ln n - n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \ln k = \ln(n!) \leqslant (n+1)\ln(n+1) - n$$

car, par ailleurs, : $\ln n! = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} k\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln k$. Donc

$$0 \leqslant \ln(n!) - (n\ln n - n) \leqslant n(\ln(n+1) - \ln n) + \ln(n+1)$$

Or $n(\ln(n+1) - \ln n) = n\ln(1 + \frac{1}{n}) \sim 1$ et donc comme 0 et $\ln(n+1)$ sont dominés par $\ln(n)$ *(/3)*

$$\boxed{\ln n! = \sum_{k=1}^{n} \ln k = n\ln n - n + O(\ln n)}$$

Remarques !

La formule de Stirling donne directement la réponse à la question...mais pas tous les points, car on demande également de présenter le théorème de l'inégalité des accroissements finis.
Par ailleurs la formule de Stirling donne aussi une précision sur $O(\ln n) = \frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + o(1)\ldots$

   (b) Soit $m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$.

L'écriture de m en produit de nombres premiers donne : $m = \prod_{p|m} p^{v_p(m)}$.

Si on compose par le logarithme :

$$\ln m = \ln\left(\prod_{p|m} p^{v_p(m)}\right) = \sum_{p|m} \ln(p^{v_p(m)}) = \sum_{p|m} v_p(m)\ln(p)$$

Au lieu de sommer sur les nombres premiers qui divisent m, on peut sommer sur tous les nombres premiers plus petit que n.
En effet, si ceux-ci ne divise pas m, alors $v_p(m) = 0$, ce qui ne change pas la valeur de la somme : *(/2)*

$$\boxed{\forall\ m \in \mathbb{N}, m \leqslant n, \ln m = \sum_{k=1}^{r(n)} \big(\ln(p_k) \times v_{p_k}(m)\big)}$$

(c) D'après la question précédente, comme on peut intervertir ces sommes finies :

$$\ln n! = \sum_{m=1}^{n} \ln m = \sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{r} \left(\ln(p_k) \times v_{p_k}(m)\right) = \sum_{k=1}^{r}\left(\ln(p_k) \times \sum_{m=1}^{n} v_{p_k}(m)\right)$$

On a vu en cours que $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$, donc $\displaystyle\sum_{m=1}^{n} v_{p_k}(m) = v_{p_k}\left(\prod_{m=1}^{n} m\right) = v_{p_k}(n!)$.

Donc

$$\ln n! = \sum_{k=1}^{r}\left(\ln(p_k) \times v_{p_k}(n!)\right) = \sum_{k=1}^{r}\left(\ln(p_k) \times \sum_{h\geqslant 1}\left\lfloor \frac{n}{(p_k)^h}\right\rfloor\right)$$

d'après la formule de LEGENDRE, vue en préliminaire *[/4]*

$$\boxed{\ln n! = \sum_{k=1}^{r}\left(\ln(p_k) \times \sum_{h\geqslant 1}\left\lfloor \frac{n}{(p_k)^h}\right\rfloor\right)}$$

2. Fonction de Mangoldt.

   On considère $\Lambda : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, $d \longmapsto \begin{cases} \ln p & \text{si} \quad \exists\, k \in \mathbb{N}^* \mid d = p^k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

   (a) $\Lambda(k) = 0$ si k la puissance non nul d'un nombre premier. *[/1,5]*

   $$\boxed{\begin{array}{c}\ln 2 = \Lambda(2) = \Lambda(4) = \Lambda(8) = \Lambda(16),\ \ln 3 = \Lambda(3) = \Lambda(9),\ \ln 5 = \Lambda(5),\ \ln 7 = \Lambda(7),\ \ln 11 = \Lambda(11),\\ \ln 13 = \Lambda(13) \text{ et } 0 = \Lambda(6) = \Lambda(10) = \Lambda(12) = \Lambda(14) = \Lambda(15)\end{array}}$$

   (b) En rangeant les nombres d selon la valeur de $\Lambda(d)$:

   $$\begin{aligned}\sum_{d\leqslant 16}\Lambda(d)\left\lfloor\frac{16}{d}\right\rfloor &= \ln(2)\left(\left\lfloor\frac{16}{2}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{16}{4}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{16}{8}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{16}{16}\right\rfloor\right) + \ln(3)\left(\left\lfloor\frac{16}{3}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{16}{9}\right\rfloor\right) + \ln(5)\left\lfloor\frac{16}{5}\right\rfloor \\ &\quad + \ln(7)\left\lfloor\frac{16}{7}\right\rfloor + \ln(11)\left\lfloor\frac{16}{11}\right\rfloor + \ln(13)\left\lfloor\frac{16}{13}\right\rfloor \\ &= 15\ln 2 + 6\ln 3 + 3\ln 5 + 2\ln 7 + \ln 11 + \ln 13\end{aligned}$$

   $$\boxed{\sum_{d\leqslant 16}\Lambda(d)\left\lfloor\frac{16}{d}\right\rfloor = \ln(2^{15} \times 3^6 \times 5^3 \times 7^2 \times 11 \times 13)}$$

   Et

   $$\begin{aligned}16 &= 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12 \times 13 \times 14 \times 15 \times 16 \\ &= 2 \times 3 \times 2^2 \times 5 \times 2 \cdot 3 \times 7 \times 2^3 \times 3^2 \times 2 \cdot 5 \times 11 \times 2^2 \cdot 3 \times 13 \times 2 \cdot 7 \times 3 \cdot 5 \times 2^4\end{aligned}$$

   On retrouve les mêmes facteurs (ce n'est pas un hasard) : *[/1,5]*

   $$\boxed{16! = 2^{15} \times 3^6 \times 5^3 \times 7^2 \times 11 \times 13}$$

   (c) Comme $\Lambda(d) \neq 0$ ssi $d = p^k$, on a donc (en notant $r = r(n)$),
   dans la somme $\sum_{d\leqslant n}\Lambda(d)\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor$, il ne reste que des nombres

   $$d \in \{(p_k)^h \mid k \leqslant r(n), (p_k)^h \leqslant n\}$$

   Ainsi

   $$\sum_{d\leqslant n}\Lambda(d)\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor = \sum_{k=1}^{r}\ln(p_k)\sum_{h \text{ tq } p_k^h\leqslant n}\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor = \sum_{k=1}^{r}\ln(p_k)\sum_{h=1}^{+\infty}\left\lfloor\frac{n}{(p_k)^h}\right\rfloor$$

   en effet pour $h > \frac{\ln n}{\ln p_k}$, $(p_k)^h > n$ et donc $\frac{n}{(p_k)^h} < 1$ i.e. $\left\lfloor\frac{n}{(p_k)^h}\right\rfloor = 0$.

   On reconnait alors le calcul de $\ln(n!)$ et en exploitant sont développement asymptotique, vue plus haut : *[/4]*

   $$\boxed{\sum_{d\leqslant n}\Lambda(d)\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor = \ln(n!) = n\ln n - n + O(\ln n)}$$

3. Quelques autres fonctions. . . . Notons

— $B :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sum_{d \leqslant \lfloor x \rfloor} \Lambda(d) \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor$

— $B_2 :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto B(x) - 2B(\frac{x}{2})$

— $\psi :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sum_{d \leqslant \lfloor x \rfloor} \Lambda(d)$

— $\chi : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \lfloor x \rfloor - 2\lfloor \frac{x}{2} \rfloor$

(a) χ est définie sur $\mathbb{R}$.
Puis pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\chi(x+2) = \lfloor x+2 \rfloor - 2\left\lfloor \frac{x+2}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor + 2 - 2\left\lfloor \frac{x}{2} + 1 \right\rfloor = \lfloor x \rfloor + 2 - 2\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor - 2 = \chi(x)$$

Pour tout $x \in [0,1[$, $\chi(x) = 0 - 0$, puis pour $x \in [1,2[$, $\chi(x) = 1 - 0 = 1$. /1

$$\boxed{\chi \text{ est 2-périodique, puis } \chi([0,2[) = \{0,1\} \text{ et par périodicité, pour } u \in \mathbb{R}_+ : \chi(u) = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & \text{si} & \lfloor x \rfloor \text{ pair} \\ 1 & \text{si} & \lfloor x \rfloor \text{ impair} \end{array} \right. .}$$

(b) Soit $x > 0$:

$$B_2(x) = B(x) - 2B\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{d \leqslant \lfloor x \rfloor} \Lambda(d) \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor - 2 \sum_{d \leqslant \lfloor \frac{x}{2} \rfloor} \Lambda(d) \left\lfloor \frac{x}{2d} \right\rfloor$$

Puis pour $d > \lfloor \frac{x}{2} \rfloor$, $\frac{x}{2d} < 1$ et donc $\lfloor \frac{x}{2d} \rfloor = 0$. Ainsi : $\sum_{d \leqslant \lfloor x \rfloor} \Lambda(d) \left\lfloor \frac{x}{2d} \right\rfloor = \sum_{d \leqslant \lfloor \frac{x}{2} \rfloor} \Lambda(d) \left\lfloor \frac{x}{2d} \right\rfloor$.

$$B_2(x) = \sum_{d \leqslant \lfloor x \rfloor} \Lambda(d) \left(\left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{x}{2d} \right\rfloor \right) = \sum_{d \leqslant x} \Lambda(x) \chi\left(\frac{x}{d}\right)$$

Par ailleurs, en notant $n = \lfloor x \rfloor$:

$$B_2(x) = B(x) - 2B\left(\frac{x}{2}\right) = B(n) - 2B\left(\frac{n}{2}\right) = n \ln n - n - 2\left(\frac{n}{2} \ln \frac{n}{2} - \frac{n}{2}\right) + O(\ln n)$$
$$= n(\ln n - \ln \frac{n}{2}) + O(\ln n) = n \ln 2 + O(\ln n) = x \ln 2 - \theta(x) \ln 2 + O(\ln n)$$

où $\theta(x)$ est la partie décimale de x, bornée par 1, donc $\theta(x) \ln 2 = O(\ln n)$.
Et finalement comme $\ln n \leqslant \ln x < \ln(n+1)$, $\ln x = \ln(n) + o(\ln n)$: /4

$$\boxed{\forall\ x > 0, \quad B_2(x) = \sum_{d \leqslant x} \Lambda(x) \chi\left(\frac{x}{d}\right) \quad \text{et} \quad B_2(x) = x \ln 2 + O(\ln x)}$$

(c) Comme $\chi(x) \in \{0,1\}$, on a donc

$$B_2(x) = \sum_{d \leqslant x} \Lambda(x) \chi\left(\frac{x}{d}\right) \leqslant \sum_{d \leqslant x} \Lambda(x) \times 1 = \psi(x)$$

Puis

$$B_2(x) - \left(\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \sum_{d \leqslant x} \Lambda(d) \left(\left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor - 1 \right) - \sum_{d \leqslant \frac{x}{2}} \Lambda(d) \left(2\left\lfloor \frac{x}{2d} \right\rfloor - 1 \right)$$
$$= \sum_{\frac{x}{2} < d \leqslant x} \Lambda(d) \left(\left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor - 1 \right) + \sum_{d \leqslant \frac{x}{2}} \Lambda(d) \left(\left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{x}{2d} \right\rfloor \right)$$

Puis, comme pour $d \leqslant x$, $\lfloor \frac{x}{d} \rfloor \geqslant 1$, on a $\sum_{d > \frac{x}{2}} \Lambda(d) \left(\left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor - 1 \right) \geqslant 0$

et par ailleurs, $\chi(\frac{n}{d}) \geqslant 0$, donc $\lfloor \frac{x}{d} \rfloor \geqslant 2\lfloor \frac{x}{2d} \rfloor$, donc $\sum_{d \leqslant \frac{x}{2}} \Lambda(d) \left(\left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{x}{2d} \right\rfloor \right) \geqslant 0$.

Donc $B_2(x) - \left(\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right)\right) \geqslant 0$ /2,5

$$\boxed{\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) \leqslant B_2(x) \leqslant \psi(x)}$$

(d) Compte de la majoration précédente, et du développement asymptotique de B_2 : /1

$$\boxed{\forall\ x \geqslant 2, \quad \psi(x) \geqslant x \ln 2 + O(\ln x)}$$

(e) On a également $\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) \leqslant B_2(x)$, pour tout réel $x > 0$.
En appliquant cette relation en $\frac{x}{2^j}$ et en sommant (télescopage) :

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) = \sum_{j=0}^{k} \psi(\frac{x}{2^j}) - \psi\left(\frac{x}{2^{j+1}}\right) \leqslant \sum_{j=0}^{k} B_2(\frac{x}{2^j})$$

/1,5

$$\boxed{\text{Donc pour tout } k \in \mathbb{N},\ \psi(x) \leqslant \sum_{j=0}^{k} B_2(\frac{x}{2^j}) + \psi(\frac{x}{2^{k+1}})}$$

(f) Notons donc $h : x \mapsto B_2(x) - x\ln 2$.
On sait que $h = O(\ln x)$. Donc il existe $M > 0$ tel que $\forall\ x \in \mathbb{R}_+^*$, $h(x) \leqslant M \times \ln x$.

$$\sum_{j=0}^{k} B_2(\frac{x}{2^j}) = \sum_{j=0}^{k} \ln 2 \times \frac{x}{2^j} + h(\frac{x}{2^j}) = x\ln 2\frac{1-\frac{1}{2^{k+1}}}{1-\frac{1}{2}} + \sum_{j=0}^{k} h(\frac{x}{2^j})$$

$$\sum_{j=0}^{k} B_2(\frac{x}{2^j}) \leqslant 2x\ln 2 + M\sum_{j=0}^{k} \ln\left(\frac{x}{2^j}\right) = 2x\ln 2 + M\ln\left(\prod_{j=0}^{k}\frac{x}{2^j}\right)$$

$$\sum_{j=0}^{k} B_2(\frac{x}{2^j}) \leqslant 2x\ln 2 + M\ln\left(\frac{x^{k+1}}{2^{k(k+1)/2}}\right) = 2x\ln 2 + M(k+1)\ln\left(\frac{x}{2^{k/2}}\right)$$

$$\sum_{j=0}^{k} B_2(\frac{x}{2^j}) \leqslant 2x\ln 2 + M(k+1)[\ln x - \frac{k}{2}\ln 2]$$

Ainsi

$$\psi(x) \leqslant 2x\ln 2 + M(k+1)[\ln x - \frac{k}{2}\ln 2] + \psi\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)$$

Le résultat précédent est vraie pour tout entier k.
Prenons $k = \left\lfloor\frac{\ln x}{\ln 2}\right\rfloor$, donc $x < 2^{k+1}$ et $k\ln 2 \leqslant \ln x < k\ln 2 + \ln 2$.
Ainsi $\psi\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)$ (ψ est nul sur $]0,1[$) et $\frac{1}{2}\ln x - \frac{\ln 2}{2} < \ln x - \frac{k}{2}\ln 2 \leqslant \frac{1}{2}\ln x$.

$$\psi(x) \leqslant 2x\ln 2 + M(\frac{\ln x}{\ln 2} + 2)\frac{\ln x}{2} = 2x\ln 2 + \frac{M}{\ln 2}(\ln x)^2 + M\ln x$$

Or $\frac{M}{\ln 2}(\ln x)^2 + M\ln x = O\big((\ln x)^2\big)$, donc /3

$$\boxed{\psi(x) \leqslant 2x\ln 2 + O\big((\ln x)^2\big)}$$

4. Vers le théorème des nombres premiers. On note $\pi(x) = \text{card}\{p \in \mathcal{P} \mid p \leqslant x\}$.

(a) Soit $x > 0$. Comme en question 2.(c), on va ranger les nombres selon la valeur $\Lambda(d)$

$$\psi(x) = \sum_{d\leqslant x}\Lambda(d) = \sum_{d=p^h, d\leqslant x}\ln(p)$$

Or entre 1 et x, il y a exactement les nombres p, p^2,...p^r qui ne sont divisibles que par p.
il y a dans ce cas r nombres de la sorte, avec la condition : $p^r \leqslant x$ et $p^{r+1} > x$.
Ainsi r est exactement égal à $\left\lfloor\frac{\ln x}{\ln p}\right\rfloor$.

$$\psi(x) = \sum_{p\leqslant x}\left\lfloor\frac{\ln x}{\ln p}\right\rfloor \ln(p)$$

/2

$$\boxed{\psi(x) = \sum_{k=1}^{r}\left\lfloor\frac{\ln x}{\ln p_k}\right\rfloor \ln p_k}$$

(b) On sait que, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\lfloor u\rfloor \leqslant u$.
Et par ailleurs, pour $u \geqslant 1$, $u < \lfloor u\rfloor + 1 < \lfloor u\rfloor + \lfloor u\rfloor = 2\lfloor u\rfloor$ /1

$$\boxed{\forall\ u \geqslant 1, \quad \lfloor u\rfloor \leqslant u \leqslant 2\lfloor u\rfloor}$$

Donc pour $p_k \leqslant x$, i.e. $\frac{\ln x}{\ln p_k} \geqslant 1$ $\left\lfloor \frac{\ln x}{\ln p_k} \right\rfloor \leqslant \frac{\ln x}{\ln p_k} \leqslant 2\lfloor \frac{\ln x}{\ln p_k} \rfloor$.

$$\sum_{k=1}^{r} \left\lfloor \frac{\ln x}{\ln p_k} \right\rfloor \ln p_k \leqslant \sum_{k=1}^{r} \frac{\ln x}{\ln p_k} \ln p_k \leqslant 2 \sum_{k=1}^{r} \left\lfloor \frac{\ln x}{\ln p_k} \right\rfloor \ln p_k$$

$$\psi(x) \leqslant \sum_{k=1}^{r} \ln x \leqslant 2\psi(x)$$

donc comme $\ln x$ ne dépend pas de k : $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} \ln x = \ln(x) \times \sum_{k=1}^{r} = \ln x \times r = \ln x \pi(x)$. /2

$$\boxed{\psi(x) \leqslant \pi(x) \ln x \leqslant 2\psi(x)}$$

(c) Ainsi $\dfrac{\psi(x)}{\ln x} \leqslant \pi(x) \leqslant 2\dfrac{\psi(x)}{\ln x}$ et donc

$$1 \leqslant \pi(x) - \frac{\psi(x)}{\ln x} \leqslant \frac{\psi(x)}{\ln x}$$

Or en questions précédente (d) et (f), on a vu :

$$x \ln 2 + O(\ln x) \leqslant \psi(x) \leqslant x \ln 4 + O\big((\ln x)^2\big)$$

Donc

$$\frac{x}{\ln x} \ln 2 + O(1) \leqslant \frac{\psi(x)}{\ln x} \leqslant \frac{x}{\ln x} \ln 4 + O\big((\ln x)\big)$$

Ainsi : $\dfrac{\psi(x)}{\ln x} = O(\frac{x}{\ln x})$ et donc /2

$$\boxed{\pi(x) = \frac{\psi(x)}{\ln x} + O\left(\frac{x}{\ln x}\right)}$$

(d) Il suffit de minorer $\psi(x)$ par $x\ln(2) + O(\ln x)$ et majorer par $2x \ln 2 + O((\ln x)^2) = x\ln(4) + O((\ln x)^2)$,
puis de diviser par $\ln x > 0$:

$$\ln 2 \frac{x}{\ln x} + O(1) + O\left(\frac{x}{\ln x}\right) \leqslant \pi(x) \leqslant \ln 4 \frac{x}{\ln x} + O(\ln x) + O\left(\frac{x}{\ln x}\right)$$

Donc comme $\ln x = o(\frac{x}{\ln x})$: /2

$$\boxed{(\ln 2 + O(1))\frac{x}{\ln x} \leqslant \pi(x) \leqslant (\ln 4 + O(1))\frac{x}{\ln x}}$$

Remarques !

En réalité Tchebychev a fait sa démonstration avec une autre fonction χ :

$$\chi_1 : u \mapsto \lfloor u \rfloor - \lfloor u/2 \rfloor - \lfloor u/3 \rfloor - \lfloor u/5 \rfloor + \lfloor u/30 \rfloor$$

qui est 30-périodique et qui donne $\chi_1(u) = 1$ pour $u \in [1, 6[$.
Il a obtenu un meilleur encadrement que celui proposé ici :

$$(c_1 + o(1))\frac{x}{\ln x} \leqslant \pi(x) \leqslant (c_2 + o(1))\frac{x}{\ln x}$$

avec $c_1 = \ln(2^{1/2}3^{1/3}5^{1/5}30^{-1/30}) \approx 0,92129$ et $c_2 = \frac{6}{5}c_1 \approx 1,10555$.
On aimerait ensuite continuer à améliorer le choix de χ pour faire tendre les constantes c_1 et c_2 vers 1 afin de démontrer le théorème des nombres premiers. Mais l'histoire a montré que cette méthode ne donnait pas mieux qu'une limite inférieure et supérieure respectivement égales à 1...

5. Dans sa démonstration historique, TCHEBYCHEV a montré l'existence de deux nombres c_1 et c_2 tels que

$$c_1 < 1 < c_2 < 2c_1 \qquad \text{et} \qquad (c_1 + o(1))\frac{x}{\ln x} \leqslant \pi(x) \leqslant (c_2 + o(1))\frac{x}{\ln x}$$

On exploite les inégalités précédentes :

$$\pi(2n) - \pi(n) > (c_1 + o(1))\frac{2n}{\ln(2n)} - (c_2 + o(1))\frac{n}{\ln n} = n\left(\frac{2c_1}{\ln n + \ln 2} - \frac{c_2}{\ln n}\right) + o\left(\frac{n}{\ln n}\right)$$

$$\pi(2n) - \pi(n) > n\frac{(2c_1 - c_2)\ln n - c_2 \ln 2}{\ln n \times \ln 2n} + o\left(\frac{n}{\ln n}\right)$$

Comme $2c_1 - c_2 > 0$,

$$\pi(2n) - \pi(n) > \frac{2c_1 - c_2}{\ln 2n} n + o\left(\frac{n}{\ln n}\right) \to \infty$$

/3

$\boxed{\text{Et donc, à partir d'un certain rang, la conjecture de BERTRAND est vérifiée.}}$

Remarques !

Dans la démonstration historique, TCHEBYCHEV *a explicité les majorations, cela lui a permis d'éviter l'artifice du ≪ à partir d'un certain rang ≫*