Devoir à la maison n°6
CORRECTION

Problème 1. Théorème de Morley

I. Préliminaires

1. Soient M_1, M_2 et M_3 trois points distincts du plan et d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3 tels que $z_1 + jz_2 + j^2z_3 = 0$.
   On a alors $z_3 = j^3z_3 = j(-z_1 - jz_2) = -jz_1 - j^2z_2$,
   donc $z_3 - z_2 = -jz_1 + (-1 - j^2)z_2 = -jz_1 + jz_2$ car $1 + j + j^2 = 0$
   et donc, comme $j \times j^2 = 1$:
   $$\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} = \frac{z_1 - z_2}{-j(z_1 - z_2)} = \frac{1}{-j} = -j^2$$
   De même pour chacun des calculs (symétries des indices)
   $$\boxed{\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} = \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = -j^2}$$
   Ainsi :
   $$\frac{M_2M_1}{M_2M_3} = \left|\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}\right| = |-j^2| = 1$$
   Donc le triangle $M_1M_2M_3$ est isocèle en M_2.
   Et
   $$(\overrightarrow{M_2M_3}, \overrightarrow{M_2M_1}) \equiv \arg\left(\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}\right) \equiv \arg(-j^2) \equiv \arg(e^{i\frac{\pi}{3}}) \equiv \frac{\pi}{3}[\pi]$$
   $$\boxed{\text{Donc le triangle } M_1M_2M_3 \text{ est équilatéral.}}$$

2. $uv = \exp(2i(\alpha + \beta))$.
   $$uv \neq 1 \iff \alpha + \beta \not\equiv 0[\pi]$$
   Or α et $\beta \in]0, \frac{\pi}{3}[$, donc $\alpha + \beta \in]0, \frac{2\pi}{3}[$ et nécessairement : $uv \neq 1$.
   De même pour vw et wu.
   Enfin,
   $$\begin{aligned} uvw &= \exp(2i(\alpha + \beta + \gamma)) = \exp\left(\tfrac{2}{3}i[(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}]\right) \\ &= \exp\left(\tfrac{2}{3}i[(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}]\right) \\ &= \exp\left(\tfrac{2}{3}i(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AC})\right) = \exp\left(\tfrac{2}{3}i\right) = j \end{aligned}$$
   d'après la relation de Chasles.
   $$\boxed{uv, vw \text{ et } wu \text{ sont différents de 1 et } uvw = j.}$$

3. On « fait » les calculs :
   $$\frac{u(1 - v)}{1 - uv} = \frac{e^{2i\alpha}(1 - e^{2i\beta})}{1 - e^{2i(\alpha+\beta)}} = \frac{e^{i(2\alpha+\beta)}(-2i\sin\beta)}{e^{i(\alpha+\beta)}(-2i\sin(\alpha + \beta))} = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}e^{i\alpha}$$
   (C'est bien sous forme trigonométrique : le module vaut $|\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}|$ et l'argument α ou $\alpha + \pi\ldots$)
   De même
   $$\frac{1 - u}{1 - uv} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}e^{-i\beta}$$
   $$\boxed{\frac{u(1 - v)}{1 - uv} = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}e^{i\alpha} \text{ et } \frac{1 - u}{1 - uv} = \frac{1 - u}{1 - uv} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}e^{-i\beta}}$$

4. $E=(1-uv)(1-vw)(1-wu)(p+jq+j^2r)$, donc

$$\begin{aligned}E &= (1-uv)(1-vw)(1-wu)\left[(j\frac{w(1-u)}{1-wu}+j^2\frac{1-u}{1-uv})a+(\frac{1-v}{1-vw}+j^2\frac{u(1-v)}{1-uv})b+(\frac{v(1-w)}{1-vw}+j\frac{1-w}{1-wu})c\right]\\ &= \Big[(jw(1-u)(1-uv)(1-vw)+j^2(1-u)(1-wu)(1-vw))a\\ &\quad +((1-v)(1-uv)(1-wu)+j^2(u(1-v)(1-wu)(1-vw)))b\\ &\quad +(v(1-w)(1-uv)(1-wu)+j(1-w)(1-uv)(1-vw))c\Big]\end{aligned}$$

On va calculer le coefficient devant a, noté A est :

$$A=(jw(1-u)(1-uv)(1-vw)+j^2(1-u)(1-wu)(1-vw))=j(1-u)(1-vw)[w(1-uv)+j(1-wu)]$$

$$A=j(1-u)(1-vw)[w-uvw+j-jwu]=j(1-u)(1-vw)w(1-ju)$$

en exploitant le fait que $uvw=j$.
Puis : $1-vw=1-\frac{j}{u}=\frac{1}{u}(u-j)=\frac{j}{u}(j^2u-1)$ car $j^3=1$. Donc

$$A=\frac{j^2}{u}w(1-u)(j^2u-1)(1-ju)=\frac{j^2}{u}w(u-1)(ju-1)(j^2u-1)=\frac{j^2}{u}w(u^3-1)$$

De même devant b et c, on trouve respectivement :

$$B=\frac{u}{v}(v^3-1)\qquad C=\frac{v}{w}j(w^3-1)$$

Donc

$$\boxed{E=\frac{w}{u}j^2(u^3-1)a+\frac{u}{v}(v^3-1)b+\frac{v}{w}j(w^3-1)c}$$

II. Point fixe de $R_a\circ R_b$

1. Il s'agit d'une application directe du cours :

$\boxed{R_a \text{ (resp. } R_b \text{ et } R_c) \text{ est une rotation de centre } A \text{ (resp. } B \text{ et } C) \text{ et d'angle } 2\alpha \text{ (resp. } 2\beta, 2\gamma)}$

2. Soit r point fixe de $R_a\circ R_b$, alors

$$r=u[(v(r-b)+b)-a]+a=uvr-u(v-1)b-(u-1)a$$

Comme $uv\neq 1$, r est unique et $r=\dfrac{u(1-v)b+(1-u)a}{1-uv}$.

$\boxed{R_a\circ R_b \text{ a un unique point fixe } r, \text{ représentant le point } R \text{ et vérifiant } (1-u)a+u(1-v)b=r(1-uv).}$

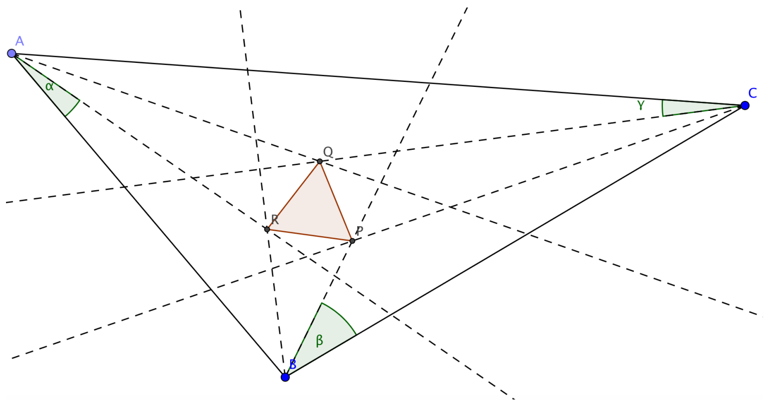
3. $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AR})\equiv \arg\dfrac{r-a}{b-a}[2\pi]$.
Or $(1-uv)(r-a)=(1-u)a+u(1-v)b-(1-uv)a=u(v-1)a+u(1-v)b=u(1-v)(b-a)$.
Donc, comme $1-uv\neq 0$, d'après le calcul vu en $I.3.$:

$$\boxed{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AR})\equiv \arg\frac{u(1-v)}{1-uv}\equiv\alpha[2\pi]}$$

4. De même : $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BR})\equiv\arg\dfrac{r-b}{a-b}[2\pi]$.
Or $(1-uv)(r-b)=(1-u)a+u(1-v)b-(1-uv)b=(1-u)a-(1-u)b=(1-u)(a-b)$.
Donc, comme $1-uv\neq 0$, d'après le calcul vu en $I.3$.

$$\boxed{(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AR})\equiv\arg\frac{1-u}{1-uv}\equiv-\beta[2\pi]}$$

5. D'après la question précédente, R est le point d'intersection des deux droites :
— (AR) qui fait un angle α avec la droite (AB) en A.
— (BR) qui fait un angle $-\beta$ avec la droite (BA) en B.
R est ainsi défini uniquement. Il en est de même pour P et Q.
Ce qui donne la représentation graphique suivante :



III. Configuration principale de Morley

1. Par composition de rotation, R_c^3 est la rotation de centre C et d'angle $3\times 2\gamma = 6\gamma = 2\times(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$
   On note A', le point dont l'affixe est $R_c^3(a)$.
   Alors $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CA'}) = 2\times(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ donc $[CB)$ est la bissectrice (intérieure) de l'angle $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CA'})$.
   Puis $|AC| = |A'C|$ et donc ACA' est isocèle en C,
   la bissectrice issue de C est confondue avec la médiatrice de $[AA']$ (ainsi que la médiane et la hauteur issues de C).
   Donc (BC) médiatrice de $[AA']$.

   $$\boxed{\text{Le représentant de } R_c^3(a) \text{ est le symétrique de } A \text{ par rapport à la droite } (BC).}$$

2. On a donc $R_a^3 \circ R_b^3 \circ R_c^3(A) = R_a^3 \circ R_b^3(A')$.
   Or pour les mêmes raisons qu'en question précédente, le représentant de $R_b^3(a')$ est le symétrique de A' par rapport à la droite (BC).
   Il s'agit donc du point A initial et donc $R_b^3(A') = A$, puis $R_a^3 \circ R_b^3 \circ R_c^3(A) = R_a^3(A) = A$
   De même, $R_b^3(C)$ est le symétrique C' de C par rapport à la droite (AB) $(\ldots)$,
   $R_a^3 \circ R_b^3 \circ R_c^3(C) = R_a^3 \circ R_b^3(C) = R_a^3(C') = C$
   Enfin, par composition, $R_a^3 \circ R_b^3 \circ R_c^3$ est une similitude,
   elle possède au moins deux points fixes (A, C). C'est donc nécessairement l'identité.

   $$\boxed{R_a^3 \circ R_b^3 \circ R_c^3 \text{ est l'identité de } \mathbb{C}.}$$

3. On applique la formule par composition de rotations :
   $R_c^3(z) = w^3(z-c)+c$, $R_b^3(z) = v^3(z-b)+b$, $R_a^3(z) = u^3(z-a)+a$.
   Donc, pout tout $z \in \mathbb{C}$,

   $$R_a^3 \circ R_b^3 \circ R_c^3(z) = u^3([v^3([w^3(z-c)+c]-b)+b]-a)+a$$
   $$= (uvw)^3 z + [a(1-u^3) + bu^3(1-v^3) + cu^3v^3(1-w^3)]$$

   Or ceci vaut z, pour tout z, donc (on sait déjà) $(uvw)^3 = 1$ et surtout

   $$\boxed{(1-u^3)a + u^3(1-v^3)b + u^3v^3(1-w^3)c = 0}$$

4. On a vu que

   $$\begin{aligned} E &= \frac{w}{u} j^2(u^3-1)a + \frac{u}{v}(v^3-1)b + \frac{v}{w} j(w^3-1)c \\ &= \frac{w}{u} j^2[(u^3-1)a + \frac{u^2}{vw} j(v^3-1)b + \frac{uv}{w^2} j^2(w^3-1)c] \end{aligned}$$

   car $j^3 = 1$. Et comme $j = uvw$, on a donc

   $$E = \frac{w}{u} j^2[(u^3-1)a + u^3(v^3-1)b + (uv)^3(w^3-1)c]$$

   Or d'après la question précédente, le terme entre crochet est nul, donc $E = 0$.
   Or $E = (1-uv)(1-vw)(1-wu)(p+jq+j^2r)$ et l'on sait que $uv \neq 1$, $vw \neq 1$ et $wu \neq 1$, donc nécessairement :

   $$p + jq + j^2 r = 0$$

   Et d'après la première question du devoir, cela implique que :

   $$\boxed{\text{le triangle } PQR \text{ est équilatéral.}}$$

Problème 2. Système de congruence

I. Lemme chinois

1. Soient a, b deux entiers positifs premiers entre eux, et soient r_1, $r_2 \in \mathbb{N}$.
   On considère le système de congruences :

$$(S)\left\{\begin{array}{ll} n \equiv r_1 & [a] \\ n \equiv r_2 & [b] \end{array}\right.$$

   (a) Comme a et b sont premiers entre, eux, le théorème de Bézout énonce

$$\boxed{\text{Il existe } a,\ b \in \mathbb{Z} \text{ tels que } au + bv = 1.}$$

   (b) Modulo a :

$$r_0 \equiv aur_2 + bvr_1 \equiv aur_2 + bvr_1 + aur_1 \equiv r_1(bv + au) \equiv r_1[a]$$

   De même, modulo b

$$r_0 \equiv aur_2 + bvr_1 \equiv aur_2 + bvr_1 + bvr_2 \equiv r_2(au + bv) \equiv r_2[b]$$

$$\boxed{\text{Donc si } r_0 = aur_2 + bvr_1, \text{ alors } r_0 \text{ est une solution de } (S).}$$

   (c) Soit n une solution de (S), alors

$$n - r_0 \equiv r_1 - r_1 = 0[a]$$

   Donc $a|n - r_0$. De même $b|n - r_0$.
   Enfin, $a \wedge b = 1$,
   donc d'après la décomposition en facteurs relativement premiers : $ab|(n - r_0)$.
   Autre façon d'écrire : $n \equiv r_0[ab]$.
   Réciproquement, si $n \equiv r_0[ab]$, alors $ab|n - r_0$, donc $a|n - r_0$ et $n \equiv r_0 \equiv r_1[a]$.
   de même $b|n - r_0$ et $n \equiv r_0 \equiv r_2[b]$.
   Bilan :

$$\boxed{\text{les solutions de } (S) \text{ sont exactement tous les entiers } n \text{ tels que } n \equiv r_0\ [ab].}$$

2. Une bande de 17 pirates dispose d'un butin composé de n pièces d'or d'égale valeur. Ils décident de se le partager également et de donner le reste au cuisinier (non pirate). Celui ci reçoit 3 pièces. La première information :≪ *Une bande de 17 pirates dispose . . .le reste au cuisinier (non pirate). Celui ci reçoit 3 pièces* ≫, se traduit par l'équation : $17|n - 3$, ou encore $n \equiv 3[17]$.
   La seconde information signifie de même que $n \equiv 4[11]$
   Enfin, la dernière information précise que $n \equiv 5[6]$.
   Finalement ce que l'on cherche c'est n.
   On va exploiter les résultats trouvés précédemment (lemme chinois) en résolvant le système en deux temps.
   Comme $17 \wedge 11 = 1$ et que $1 = 2 \times 17 - 3 \times 11$:

$$\left\{\begin{array}{ll} n \equiv 3 & [17] \\ n \equiv 4 & [11] \end{array}\right. \Longleftrightarrow n \equiv 2 \times 17 \times 4 - 3 \times 11 \times 3 \equiv 136 - 99 \equiv 37[187]$$

   Puis comme $187 \wedge 6 = 1$ et que $1 = 187 - 31 \times 6$

$$\left\{\begin{array}{ll} n \equiv 3 & [17] \\ n \equiv 4 & [11] \\ n \equiv 5 & [6] \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} n \equiv 37 & [187] \\ n \equiv 5 & [6] \end{array}\right. \Longleftrightarrow n \equiv 1 \times 187 \times 5 - 31 \times 6 \times 37 \equiv -5947 \equiv 785[1122]$$

   On trouve finalement que $n = 785 + 1122k$, avec $k \in \mathbb{N}$.

$$\boxed{\text{La fortune minimale que peut espérer le cuisinier est donc égale à 785 pièces d'or}}$$

II. Dénumérants

Dans toute cette partie, pour x réel, on désigne par $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x.

1. Dans cette question on cherche à résoudre l'équation (E) : $2x + 5y = 2018$ avec $(x, y) \in \mathbb{N}^2$.
   (a) $2018 - 2 \times 9 = 2000 = 5 \times 400$.

$$\boxed{\text{Un couple de solutions est par exemple } (9, 400) \in \mathbb{N}^2.}$$

(b) $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ est solution de (E)

$$\iff 2x+5y = 2018 = 2x_0 + 5y_0$$
$$\iff 2(x-x_0) = 5(y_0-y)$$

Cela implique que $2|5(y_0-y)$, donc $2|y_0-y$ (lemme de Gauss car $2 \wedge 5 = 1$),
donc $\exists\, k \in \mathbb{Z}$ tel que $y = y_0 + 2k$.
Mais Z'alors, $2(x - x0) = -2 \times 5 \times k$, donc (par intégrité de $\mathbb{Z}$) : $5k = x_0 - x$.
et donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = x_0 - 5k$ et $y = y_0 + 2k$.
Réciproquement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = x_0 + 5k$ et $y = y_0 - 2k$,
alors $2(x-x_0) - 5(y_0-y) = 10k - 10k = 0$. On a vu que c'était équivalent à (x,y) solution de (E).
Bilan

$$\boxed{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \text{ vérifie } (E) \text{ ssi } \exists\, k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = x_0 + 5k \text{ et } y = y_0 - 2k}$$

(c) En reprenant $x_0 = 9$ et $y_0 = 400$, pour obtenir une solution sur E,
on a les conditions suivantes à respecter :

$$x = 9 + 5k \geqslant 0 \text{ et } y = 400 - 2k \geqslant 0 \text{ et } k \in \mathbb{Z} \iff k \geqslant \left[\frac{-9}{5}; 200\right] \cap \mathbb{Z}$$

Ainsi, le nombre de solutions distinctes de (E) dans $\mathbb{N}^2$ est égal à

$$\operatorname{card}\left(\left[\!\left[\frac{-9}{5}; 200\right]\!\right]\right) = 200 - (-1) + 1 = 202$$

$$\boxed{\text{Il y a 202 solutions entière de } (E) \text{ dans } \mathbb{N}^2}$$

Dorénavant, a et b désignent deux entiers naturels non nuls.
On note pour $n \in \mathbb{N}$, D_n le nombre de couples $(x,y) \in \mathbb{N}^2$ tels que $ax + by = n$.

2. Une presque-formule.

(a) Comme $a, b > 0$, alors il faut prendre $x = y = 0$, sinon $au + bv > 0$.

$$\boxed{D_0 = 1}$$

(b) Soit (x,y) une solution de $ax + by = n$.
Soit a' et $b' \in \mathbb{Z}$ tel que $a = a' \times (a \wedge b)$ et $b = b' \times (a \wedge b)$.
Alors $(a \wedge b) \times \big(a'x + b'y\big) = n$ et donc nécessairement $a \wedge b | n$.
Par contraposée si $a \wedge b$ ne divise pas n, il n'y a aucune solution au problème.

$$\boxed{\text{Lorsque } a \wedge b \text{ ne divise pas } n, \text{ alors } D_n = 0}$$

(c) On suppose maintenant que $a \wedge b = 1$.

i. D'après l'identité de Bézout, il existe $(x_1, y_1) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $ax_1 + by_1 = 1$.
Faisons la division euclidienne de x_1 par b : $x_1 = bq_1 + x_2$, avec $x_2 \in [\![0, b-1]\!]$.
on a alors $1 = a(bq_1 + x_2) + by_1 = ax_2 + b(y_1 + aq_1)$.
Notons $y_2 = -y_1 - aq_1$. Alors $1 = ax_2 - by_2$.
Comme $ax_2 > 1$ (produit de nombre positif), alors $by_2 > 0$ et donc $y_2 \in \mathbb{N}$.

$$\boxed{\text{On a trouvé } (X,Y) \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } aX - bY = 1.}$$

ii. On a alors $anX - bnY = n$.
Tout autre nombre $(x,y) \in \mathbb{Z}$ vérifiant $ax + by = n$ est de la forme
$x = nX - kb$ avec $y = -nY + ka$ avec $k \in \mathbb{Z}$ (même raisonnement qu'en II.1.(b).).
On a alors $x \geqslant 0$ ssi $k \leqslant \frac{nX}{b}$.
On a également $y \geqslant 0$ ssi $k \geqslant \frac{nY}{a}$.
Ainsi

$$\boxed{D_n \text{ est le nombre d'entiers } \ell \in \mathbb{Z} \text{ tels que } \tfrac{nY}{a} \leqslant \ell \leqslant \tfrac{nX}{b}.}$$

iii. Soient x et y deux réels, $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant x + y$.
Donc $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ est un entier, plus petit que $x + y$.
Comme $\lfloor x+y \rfloor$ est le plus grand des entiers plus petits que $x+y$: $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x+y \rfloor$.
De même, avec $x + y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$ et le même genre de raisonnement :
$\lfloor x+y \rfloor + 1 \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$, donc $\lfloor x+y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.
Par conséquent :

$$0 \leqslant \lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \leqslant 1$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \text{ et } y \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor = \lfloor x+y \rfloor + \epsilon \text{ avec } \epsilon \in \{0, -1\}}$$

iv. Donc, d'après la question i., puis ii., en notant $x = \frac{nX}{b}$ et $y = \frac{-nY}{a}$:

$$D_n = \mathrm{Card}\left(\left[\frac{nY}{a}, \frac{nX}{b}\right] \cap \mathbb{N}\right) = \mathrm{Card}\left([-y, x] \cap \mathbb{N}\right) = \mathrm{Card}\left(\llbracket -\lfloor y \rfloor, \lfloor x \rfloor \rrbracket\right)$$

Ainsi

$$D_n = \lfloor x \rfloor - (-\lfloor y \rfloor) + 1 = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1 = \lfloor x + y \rfloor + \epsilon + 1$$

$$D_n = \left\lfloor \frac{nX}{b} - \frac{nY}{a} \right\rfloor + \epsilon + 1 = \left\lfloor \frac{n(aX - bY)}{ab} \right\rfloor + \epsilon + 1 = \left\lfloor \frac{n}{ab} \right\rfloor + \epsilon + 1$$

$$\boxed{\text{Par conséquent : } D_n \in \{\lfloor \tfrac{n}{ab} \rfloor ; \lfloor \tfrac{n}{ab} \rfloor + 1\}.}$$

Pour 1.(c), on avait, $n = 2018$, $a = 2$, $b = 5$, et donc $\lfloor \frac{n}{ab} \rfloor = \lfloor \frac{2018}{10} \rfloor = 201$.

$$\boxed{\text{Et donc on vérifie bien que } D_{2018} = 202 \in \{201, 202\}}$$

Désormais, on suppose que $a > b \geqslant 2$ désignent deux entiers premiers entre eux.

3. La formule de POPOVICIU.

(a) Cela devient classique (comme en 2.(c).i) :
Considérons $\alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{Z}$ tels que $\alpha_0 a + \beta_0 b = 1$ (Bézout à a et b, premiers entre eux).
Alors $\alpha_0 a \equiv 1[b]$ et $\beta_0 b \equiv 1[a]$.
Procédons par analyse : si $\alpha a \equiv 1[b]$, alors $\alpha a \equiv \alpha_0 a[b]$, donc $b|(\alpha - \alpha_0)a$.
et comme $b \wedge a = 1$, alors il existe $h \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha_0 = hb + \alpha$.
Et la condition $\alpha \in [0, b[$, fait qu'on reconnait la division euclidienne de α_0 par b.
Le reste est défini par cette division de manière unique.
Notre analyse nous assure l'unicité de α_0.
De même toujours par analyse, on constate que
β est nécessairement, le reste de la division euclidienne de β_0 par a.
Faisons alors la synthèse. En prenant $\alpha = \alpha_0 \% b$ et $\beta = \beta_0 \% a$ (notation Python).
Alors $\alpha a - \beta b = \alpha_0 a + hba - \beta_0 b - h'ab = \alpha_0 a - \beta_0 b + (h - h')ab = 1 + Hab$.
Or on sait, par définition/construction que $(\alpha, \beta) \in [0, b[\times [0, a[$, donc $\alpha a - \beta b \in]-ab, ab[$.
Il faut donc, nécessairement, que $H = 0$ et donc $\alpha a - \beta b = 1$.
Par analyse-synthèse :

$$\boxed{\text{il existe un unique couple d'entiers } (\alpha, \beta) \in [1, b[\times [1, a[\text{ tel que } \left\{ \begin{array}{ll} \alpha a \equiv 1 & [b] \\ \beta b \equiv 1 & [a] \end{array} \right.}$$

On ne peut avoir α (ou β) nul, sinon le système donnerait $1 \equiv 0[b]$ (ou $[a]$ respectivement)

(b) $\alpha \in [1, b[$, alors $\alpha a > 1$ et donc nécessairement $\gamma < 0$.
Comme γ est entier $\gamma \leqslant -1$.
Par ailleurs, $\alpha < b$, donc $-\gamma b = \alpha a - 1 < ab - 1$, donc $\gamma b > -ab + 1$, i.e $\gamma > \frac{1}{b} - a$.
Comme γ est entier $\gamma \geqslant 1 - a$.

$$\boxed{\text{Donc } \gamma \in [1 - a; -1].}$$

(c) On a alors $\alpha a + \gamma b = 1$.
Et en notant $\beta' = \gamma + a$ (i.e $-\gamma = a - \beta'$), on a $\beta' \in [1, a - 1]$.
Ce β' est donc LE β cherché en 3.(a)..
Donc $\beta = \gamma + a$ i.e. $\gamma = -(a - \beta)$ et ainsi

$$\boxed{\alpha a - (a - \beta) b = 1}$$

(d) On se souvient que $D_n = \mathrm{Card}\left\{\ell \in \mathbb{N} \mid \dfrac{nY}{a} \leqslant \ell \leqslant \dfrac{nX}{b}\right\}$.
Or, en faisant correspondre les notations, on a $X = \alpha$ et $Y = a - \beta$.
On a alors $\frac{nX}{b} = \lfloor \frac{n\alpha}{b} \rfloor + \theta\left(\frac{n\alpha}{b}\right)$ et $\frac{nY}{a} = \frac{n(a-\beta)}{a} = n - \frac{n\beta}{a} = n - \left\lfloor \frac{n\beta}{a} \right\rfloor - \theta\left(\frac{n\beta}{a}\right)$.
Et donc l'équivalence :

$$\frac{nY}{a} \leqslant \ell \leqslant \frac{nX}{b} \iff n - \left\lfloor \frac{n\beta}{a} \right\rfloor \leqslant \ell \leqslant \left\lfloor \frac{n\alpha}{b} \right\rfloor$$

car les nombres $\theta\left(\frac{n\alpha}{b}\right) \in [0, 1[$ et $-\theta\left(\frac{n\beta}{a}\right) \in]-1, 0]$.
Donc

$$D_n = \left\lfloor \frac{n\alpha}{b} \right\rfloor - \left(n - \left\lfloor \frac{n\beta}{a} \right\rfloor\right) + 1$$

On remplace les parties entières :

$$D_n = \frac{n\alpha}{b} - \theta\left(\frac{n\alpha}{b}\right) - n + \frac{n\beta}{a} - \theta\left(\frac{n\beta}{a}\right) + 1$$

$$D_n = \frac{n\alpha a + n\beta b - nab}{ab} - \theta\left(\frac{n\alpha}{b}\right) - \theta\left(\frac{n\beta}{a}\right) + 1$$

Et comme $n\alpha a + n\beta b - nab = n(\alpha a - (a-\beta)b) = n \times 1 = n$, on en déduit :

$$\boxed{D_n = \frac{n}{ab} + 1 - \theta\left(\frac{\alpha n}{b}\right) - \theta\left(\frac{\beta n}{a}\right) \qquad \text{formule de POPOVICIU}}$$

(e) i. Faisons la division euclidienne de αa par b :

$$\alpha a = kb + r \Longrightarrow \frac{\alpha a}{b} = k + \frac{r}{b}$$

Or $k \in \mathbb{Z}$ et $\frac{r}{b} \in \left[0, \frac{b}{b}\right[= [0,1[$, alors $\left\lfloor \frac{\alpha a}{b} \right\rfloor = k$, puis

$$\boxed{\theta\left(\frac{\alpha n}{b}\right) = \frac{r}{b}}$$

$$\boxed{\text{De même } \theta\left(\frac{\beta n}{a}\right) = \frac{r'}{a}, \text{ où } r' \text{ est le reste de la division de } \beta n \text{ par } a}$$

ii. On a ici $n = 1777$, $a = 2$, $b = 5$.
Comme $3 \times 2 + (-1) \times 5 = 6 - 5 = 1$, on doit prendre $\alpha = 3$ et $\beta \equiv -1[2]$ donc $\beta = 1$.

On vérifie bien $\begin{cases} \alpha a = 6 \equiv 1 & [5] \\ \beta b = 5 \equiv 1 & [2] \end{cases}$.

On cherche donc à décomposer 1777 (année de naissance du grand GAUSS) :

$$D_{1777} = \frac{1777}{10} + 1 - \theta\left(\frac{3 \times 1777}{5}\right) - \theta\left(\frac{1 \times 1777}{2}\right) = \frac{1777}{10} + 1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{2} = \frac{1777 + 10 - 2 - 5}{10} = 178$$

car $1777 \equiv 1[2]$ (nombre impair) et $3 \times 1777 = ????1 \equiv 1[5]$.

$$\boxed{\text{Il y a 178 façons peut obtenir la somme de 1777 euros avec des pièces de 2 et des billets de 5 ?}}$$

On commencera par déterminer α et β. Pourquoi 1777 ?

iii. Le calcul simple suivant donne : $X^{2k} \times X^{5p} = X^{2k+5p}$.
Si on note λ_n, le coefficient de X^n dans le polynôme $\left(\sum_{k=0}^{n} X^{2k}\right) \times \left(\sum_{p=0}^{n} X^{5p}\right)$, alors λ_n est le nombre de fois, où l'on a $2k + 5p = n$.

$$\lambda_n = \sum_{\substack{2k+5p=n, \\ k,p \in \mathbb{N}}} 1 = D_n$$

$$\boxed{\text{le coefficient de } X^n \text{ dans le polynôme } \left(\sum_{k=0}^{n} X^{2k}\right) \times \left(\sum_{p=0}^{n} X^{5p}\right) \text{ est } D_n}$$