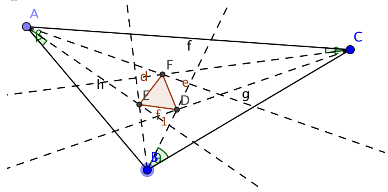
Devoir à la maison n°6

La notation tiendra particuliérement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

Problème 1. Théorème de Morley

Les trisectrices sont les droites qui découpent un angle en trois angles égaux.
L'objet de ce problème est de démontrer le théorème de Morley relatif aux trisectrices d'un angle.
Pour tout points A, B, C du plan, les points D, E, F obtenus par trisection (comme sur la figure) forme un triangle équilatéral.



Dans tout le problème, le plan est muni d'un repère orthonormé direct qui permet de définir l'affixe complexe d'un point et le représentant d'un nombre complexe. Les nombres complexes a, b et c sont les affixes des trois points A, B et C respectivement.
Les nombres α, β, γ sont dans $\left]0, \frac{\pi}{3}\right[$ et tels que : $3\alpha = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ $\quad 3\beta = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ $\quad 3\gamma = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$
(les angles sont orientés : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$)
On note $u = e^{2i\alpha}$, $v = e^{2i\beta}$ et $w = e^{2i\gamma}$. Enfin, on définit les transformations complexes :

$$R_a : z \mapsto u(z-a)+a \qquad R_b : z \mapsto v(z-b)+b \qquad R_c : z \mapsto w(z-c)+c$$

I. Préliminaires

1. Soient M_1, M_2 et M_3 trois points distincts du plan et d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3 tels que $z_1 + jz_2 + j^2z_3 = 0$.
   Mettre sous forme trigonométrique les trois nombres complexes : $\dfrac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}$, $\dfrac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}$ et $\dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$
   En déduire que le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral.
2. Montrer que uv, vw et wu sont différents de 1 et que $uvw = j$.
3. Mettre sous forme trigonométrique les deux nombres complexes : $\dfrac{u(1-v)}{1-uv}$ et $\dfrac{1-u}{1-uv}$.
4. On considère trois nombres complexes p, q et r vérifiant les relations suivantes :
   $$(1-v)b+v(1-w)c = p(1-vw) \qquad (1-w)c+w(1-u)a = q(1-wu) \qquad (1-u)a+u(1-v)b = r(1-uv)$$
   Puis on pose $E = (1-uv)(1-vw)(1-wu)(p+jq+j^2r)$. Montrer que
   $$E = \frac{w}{u}j^2(u^3-1)a + \frac{u}{v}(v^3-1)b + \frac{v}{w}j(w^3-1)c$$

II. Point fixe de $R_a \circ R_b$

1. Préciser les transformations géométriques liées aux transformations complexes R_a, R_b et R_c.
2. Montrer que $R_a \circ R_b$ a un unique point fixe r, représentant le point R et vérifiant $(1-u)a + u(1-v)b = r(1-uv)$.
3. En soustrayant $(1-uv)a$ de chaque côté de la relation précédente, préciser l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AR})$.
4. Préciser de même l'angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BR})$.
5. On définit de même p et P ; q et Q à partir de $R_b \circ R_c(p) = p$ et $R_c \circ R_a(q) = q$.
   Placer P, Q et R sur une figure.

III. Configuration principale de Morley

1. Montrer que le représentant de $R_c^3(a)$ est le symétrique de A par rapport à la droite (BC).
2. Montrer que $R_a^3 \circ R_b^3 \circ R_c^3$ est l'identité de $\mathbb{C}$.
3. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, calculer $R_a^3 \circ R_b^3 \circ R_c^3(z)$. En déduire
   $$(1-u^3)a + u^3(A-v^3)b + u^3v^3(1-w^3)c = 0$$
4. Montrer que le triangle PQR est équilatéral.

Problème 2. Système de congruence

I. Lemme chinois

1. Soient a, b deux entiers positifs premiers entre eux, et soient r_1, $r_2 \in \mathbb{N}$.
   On considère le système de congruences :
   $$(S)\left\{\begin{array}{ll} n \equiv r_1 & [a] \\ n \equiv r_2 & [b] \end{array}\right.$$
   (a) Justifier l'existence de deux entiers u et v tels que $au + bv = 1$.
   (b) Soit $r_0 = aur_2 + bvr_1$. Montrer que r_0 est une solution de (S).
   (c) En déduire que les solutions de (S) sont les entiers n tels que $n \equiv r_0$ $[ab]$.
2. Application. Une bande de 17 pirates dispose d'un butin composé de n pièces d'or d'égale valeur. Ils décident de se le partager également et de donner le reste au cuisinier (non pirate). Celui ci reçoit 3 pièces. Mais une rixe éclate et 6 pirates sont tués. Tout le butin est reconstitué et partagé entre les survivants comme précédemment ; le cuisinier reçoit alors 4 pièces. Dans un naufrage ultérieur, seuls le butin, 6 pirates et le cuisinier sont sauvés. Le butin est à nouveau partagé de la même manière et le cuisinier reçoit 5 pièces. Quelle est alors la fortune minimale que peut espérer le cuisinier lorsqu'il décide d'empoisonner le reste des pirates ?

II. Dénumérants

Dans toute cette partie, pour x réel, on désigne par $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x.

1. Dans cette question on cherche à résoudre l'équation (E) : $2x + 5y = 2018$ avec $(x, y) \in \mathbb{N}^2$.
   (a) Trouver un couple de solutions $(x_0, y_0) \in \mathbb{N}^2$.
   (b) Montrer qu'un couple $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ vérifie (E)
   si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = x_0 + 5k$ et $y = y_0 - 2k$
   (c) En déduire le nombre de solutions de (E) dans $\mathbb{N}^2$.

Dorénavant, a et b désignent deux entiers naturels non nuls.
On note pour $n \in \mathbb{N}$, D_n le nombre de couples $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ tels que $ax + by = n$.

2. Une presque-formule.
   (a) Calculer D_0.
   (b) Déterminer D_n lorsque $a \wedge b$ ne divise pas n.
   (c) On suppose maintenant que $a \wedge b = 1$.
      i. Montrer qu'il existe $(X, Y) \in \mathbb{N}^2$ tel que $aX - bY = 1$.
      ii. Montrer que D_n est le nombre d'entiers $\ell \in \mathbb{Z}$ tels que $\frac{nY}{a} \leqslant \ell \leqslant \frac{nX}{b}$.
      iii. Soient x et y des réels, montrer que $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor = \lfloor x + y \rfloor + \epsilon$ avec $\epsilon \in \{0, -1\}$
      iv. En déduire que $D_n \in \{\lfloor \frac{n}{ab} \rfloor ; \lfloor \frac{n}{ab} \rfloor + 1\}$.Vérifier votre réponse à la question 1.(c).

Désormais, on suppose que $a > b \geqslant 2$ désignent deux entiers premiers entre eux.

3. La formule de Popoviciu.
   (a) A l'aide du théorème de Bézout, montrer qu'il existe deux entiers $\alpha \in [1; b-1]$ et $\beta \in [1; a-1]$ tels que :
   $$\left\{\begin{array}{ll} \alpha a \equiv 1 & [b] \\ \beta b \equiv 1 & [a] \end{array}\right.$$
   Démontrer que α et β sont uniques.
   (b) On note γ l'entier tel que $\alpha a = 1 - \gamma b$.
   Montrer que $\gamma \in [1 - a; -1]$.
   (c) En déduire que $\alpha a - (a - \beta)b = 1$.
   (d) Conclure que :
   $$D_n = \frac{n}{ab} + 1 - \theta\left(\frac{\alpha n}{b}\right) - \theta\left(\frac{\beta n}{a}\right) \qquad \text{formule de Popoviciu}$$
   où $\theta(u) = u - \lfloor u \rfloor$ désigne la partie décimale d'un réel u.
   (e) i. Montrer que $\theta\left(\frac{\alpha n}{b}\right) = \frac{r}{b}$ où r est le reste de la division de αn par b.
      Que dire de $\theta\left(\frac{\beta n}{a}\right)$?
      ii. Application numérique : de combien de façons peut obtenir la somme de 1777 euros avec des pièces de 2 et des billets de 5 ?
      On commencera par déterminer α et β. Pourquoi 1777 ?
      iii. Quel est le coefficient de X^n dans le polynôme $\left(\sum_{k=0}^{n} X^{2k}\right) \times \left(\sum_{p=0}^{n} X^{5p}\right)$?