

Devoir surveillé n°4

Durée de l'épreuve : 4 heures
La calculatrice est interdite

Le devoir est composé d'un exercice et de deux problèmes.

Lorsqu'une question est jugée, a priori, plus difficile, elle est précédée du symbole (*) voire (**).

La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction**, la précision des **raisonnements** et **l'énoncé des formules utilisées**.

BON COURAGE

Exercice - Ensemble p -adique

On considère p un nombre premier.

On note pour tout entier $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $v_p(a) = \max\{v \in \mathbb{N} \mid p^v \mid a\}$.

puis $v_p(0) = -\infty$ et enfin pour tout $r = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^*$, $v_p(r) = v_p(a) - v_p(b)$ (indépendant de a et b choisis - on ne le démontre pas).

1. Calculer $v_3(9)$, $v_5(125)$ et $v_7\left(\frac{3}{49}\right)$
2. Montrer que $v_p(x \times y) = v_p(x) + v_p(y)$, pour x et $y \in \mathbb{Q}$.
3. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{Q}$,

$$v_p(x + y) \geq \min(v_p(x), v_p(y))$$

On note pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $|x|_p = p^{-v_p(x)}$.

Et pour tout $x, y \in \mathbb{Q}$, $d(x, y) = |x - y|_p$.

4. En déduire que $|x + y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p)$
5. Montrer que d est une distance sur $\mathbb{Q}$, c'est-à-dire qu'elle vérifie :
 - $\forall x, y \in \mathbb{Q}$, $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie).
 - $\forall x, y \in \mathbb{Q}$, $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$ (séparation).
 - $\forall x, y, z \in \mathbb{Q}$, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (inégalité triangulaire).On dit que $(\mathbb{Q}, d)$ est un espace métrique.

On dit que (u_n) est une suite :

- p -convergente vers 0 si

$$\forall M \in \mathbb{N}, \quad \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N, \quad |u_n|_p < p^{-M}$$

- de p -Cauchy si

$$\forall M \in \mathbb{N}, \quad \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n > m \geq N, \quad |u_n - u_m|_p < p^{-M}$$

6. Montrer que la somme de deux suites de p -Cauchy donne une suite de p -Cauchy.

On **admet** :

- qu'on peut compléter $\mathbb{Q}$, en donnant à toute suite de p -Cauchy, une limite.
On obtient $\mathbb{Q}_p$, l'ensemble des « nombres », limite de suites de p -Cauchy. $\mathbb{Q}_p$ contient $\mathbb{Q}$.
- Puis, on dit que, dans $\mathbb{Q}_p$, $\ell_1 = \ell_2$, si et seulement si :
si $\forall (u_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell_1$ et $\forall (v_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell_2$ (dans $\mathbb{Q}_p$), $(u_n - v_n)$ est p -convergente vers 0.

7. Soit $(u_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - u_n$.
Montrer l'équivalence :

$$(u_n) \text{ est une suite de } p\text{-Cauchy} \iff (v_n) \text{ } p\text{-converge vers } 0$$

8. En déduire pour $(v_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, puis $S_n = \sum_{k=0}^n v_k$, l'implication :

$$\text{si } (v_n) \text{ est } p\text{-convergente vers } 0 \text{ alors } (S_n) \text{ converge dans } \mathbb{Q}_p$$

9. Application : Montrer la convergence dans $\mathbb{Q}_5$ de $\left(\sum_{k=0}^n 2 \times 5^k\right)_n$.

Calculer sa limite.

Problème 1 - Moyenne arithmético-géométrique

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $0 < a \leq b$.

On considère les suites de réels positifs (u_n) et (v_n) définies par

$$u_0 = a, \quad v_0 = b, \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, \quad v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n)$$

1. (a) Montrer que, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$,

$$\sqrt{xy} \leq \frac{1}{2}(x + y)$$

- (b) Montrer que pour tout $n \geq 1$, u_n existe bien et u_n et v_n sont strictement positifs.

- (c) Etudier la monotonie des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

- (d) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$$

- (e) En déduire que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite.

- (f) Que se passerait-il, si initialement $b < a$? (*Quelle différence avec le cas précédent?*)

La limite commune de (u_n) et (v_n) est appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b et est notée $M(a, b)$.

2. Dans les questions suivantes, on étudie quelques propriétés de M .

Pour répondre aux questions, on pourra écrire $u_n(\alpha, \beta)$ et $v_n(\alpha, \beta)$ les termes de rang n de (u_n) et (v_n) définies précédemment et dont les premiers termes sont $u_0 = \alpha$ et $b_0 = \beta$

- (a) Calculer $M(b, b)$ pour $b \in \mathbb{R}_+^*$.

- (b) Exprimer $M(\lambda a, \lambda b)$ en fonction de $M(a, b)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

En déduire que $M(a, b) = bM(x, 1)$ avec un $x \leq 1$ bien choisi (à donner).

- (c) Montrer également que $M(\sqrt{1-x^2}, 1) = M(1-x, 1+x)$, pour tout $x \in [0, 1]$.

3. On essaye d'exprimer M sous forme d'une formule fermée. Pour cela on considère

$$K(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}}$$

pour $a, b \in \mathbb{R}_+$

- (a) Calculer $K(b, b)$.

- (b) Montrer que pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t > 0$.

- (c) Montrer que $K(a, b) = K(b, a)$.

- (d) (**) On va montrer que $K(a, b) = K(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab})$.

i. Montrer que $t \mapsto t + \arctan(\frac{b}{a} \tan t)$ est bijective de $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur I à préciser.

ii. Montrer alors que $K(a, b) = \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{a_1^2 \cos^2 \theta + b_1^2 \sin^2 \theta}}$ avec $2a_1 = a + b$ et $b_1 = \sqrt{ab}$.

On notera, après calculs, que si $\varphi = \arctan(\frac{b}{a} \tan t)$, alors $\cos(t+\varphi) = \frac{a \cos^2 t - b \sin^2 t}{\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}} (\dots)$

iii. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $K(u_n, v_n) = K(a, b)$.

- (e) En admettant que la fonction K est continue, montrer que

$$M(a, b) = \frac{\pi}{2K(a, b)}$$

Problème 2 - Inversion et points rationnels sur un cercle

Le plan $\mathbb{R}^2$ est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, et identifié à $\mathbb{C}$. On appellera plan épointé le plan $\mathbb{R}^2$ privé de son origine $O = (0, 0)$. Soit M un point du plan, différent de O . On appelle **inverse de M** le point $I(M)$ défini par

$$\overrightarrow{OI(M)} = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM^2}$$

Cela définit une application I du plan épointé dans lui-même, appelée ici inversion.

A. Généralités sur l'inversion

1. En termes complexes, I correspond à une application f de $\mathbb{C}^*$ dans lui-même.

Montrer, pour tout nombre complexe non nul z , la formule : $f(z) = \frac{1}{\bar{z}}$

2. Montrer que l'inversion est une involution du plan épointé (i.e. $f \circ f = \text{Id}_{\mathbb{C}^*}$).

On en déduit notamment (*inutile de le prouver*) que

— l'inversion est une bijection

— si A est une partie de $\mathbb{C}^*$ et $z \in \mathbb{C}^*$,

alors les assertions $z \in A$ et $f(z) \in f(A)$ sont équivalentes (grâce à l'injectivité de f - démontré en exercice 1, DS 3).

3. Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul, $a, b \in \mathbb{R}$.

Donner la forme algébrique de $f(z)$.

4. Soit $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une application et E la partie du plan complexe, définie par :

$$E = \{z \in \mathbb{C}^*, h(z) = 0\}$$

Montrer : $f(E) = \{z \in \mathbb{C}^*, h(f(z)) = 0\}$.

B. Image d'un cercle, d'une droite

1. Image d'un cercle

- (a) On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω (d'affixe ω), de rayon $r > 0$, vu comme partie du plan complexe.

Justifier que l'on puisse écrire : $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C}^*, (z - \omega)(\bar{z} - \bar{\omega}) - r^2 = 0\}$.

- (b) Montrer que z appartient à l'image $f(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$ par l'inversion

si et seulement si $(r^2 - |\omega|^2)|z|^2 + \bar{z}\omega + z\bar{\omega} = 1$

- (c) En déduire que si $O \notin \mathcal{C}$, $f(\mathcal{C})$ est un cercle de centre d'affixe $-\frac{\omega}{r^2 - |\omega|^2}$ et de rayon $\frac{r}{|r^2 - |\omega|^2|}$

- (d) Montrer que l'image par f d'une droite ne passant pas par l'origine est un cercle privé de O .

En déduire que si $O \in \mathcal{C}$, $f(\mathcal{C} \setminus \{O\})$ est une droite.

2. Déterminer les cercles $\mathcal{C}$ (de rayon $r > 0$) qui sont laissés globalement invariants par l'inversion, c'est-à-dire tels que $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.

C. Points rationnels sur une droite, sur un cercle

On dit qu'un point du plan est rationnel si son abscisse et son ordonnée sont des nombres rationnels. Par exemple, $(1, 3)$ est rationnel, mais pas $(\sqrt{2}, 3)$ (car son abscisse n'est pas rationnelle).

On admet sans démonstration que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

On pourra exploiter les résultats des questions précédentes.

1. (a) Donner un exemple de droite admettant une infinité de points rationnels, d'une droite admettant un unique point rationnel et enfin d'une droite n'ayant aucun point rationnel.
(b) Montrer que si une droite comporte au moins deux points rationnels, elle en admet une infinité.
2. Montrer qu'un point M du plan est à coordonnées rationnelles si et seulement si $I(M)$ est à coordonnées rationnelles.
3. (a) Montrer que le cercle de centre O de rayon $\sqrt[4]{2}$ n'admet pas de point rationnel.
(b) Montrer l'existence d'un cercle dont l'unique point rationnel est l'origine.
Montrer l'existence d'un cercle admettant exactement deux points rationnels, dont l'origine.
(c) On suppose que $\mathcal{C}$ est un cercle passant par l'origine, et admettant au moins deux autres points rationnels que l'origine. Montrer que $\mathcal{C}$ admet une infinité de points rationnels.
(d) En déduire qu'un cercle ayant au moins trois points rationnels en a une infinité.