MPSI 3 - Fermat Le 02.12.17
2017-2018

Devoir surveillé n°4
CORRECTION

Exercice - Ensemble p-adique

On considère p un nombre premier.
On note pour tout entier $a \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $v_p(a) = \max\{v \in \mathbb{N} \mid p^v | a\}$.
puis $v_p(0) = -\infty$ et enfin pour tout $r = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^*$, $v_p(r) = v_p(a) - v_p(b)$.

1. $9 = 3^2$, $125 = 5^3$ et $\frac{3}{49} = \frac{3^1 7^0}{7^2}$ /2

$$\boxed{\text{donc } v_3(9) = 2,\ v_5(125) = 3 \text{ et } v_7\left(\frac{3}{49}\right) = -2}$$

2. On commence par le cas $x, y \in \mathbb{N}^*$.
On suppose que $x = p^{v_p(x)} q$ et $y = p^{v_p(y)} r$ avec $p \wedge q = 1$ et $p \wedge r = 1$.
Donc $v_p(x \times y) = v_p(p^{v_p(x)+v_p(y)} qr) = v_p(x) + v_p(y)$ car $qr \wedge p = 1$.
Puis pour $x = \frac{a_1}{a_2}, y = \frac{b_1}{b_2} \in \mathbb{Q}^*$, on a

$$\begin{aligned} v_p(x \times y) &= v_p(\tfrac{a_1 b_1}{a_2 b_2}) = v_p(a_1 b_1) - v_p(a_2 b_2) && \text{par définition} \\ &= v_p(a_1) + v_p(b_1) - v_p(a_2) - v_p(b_2) && \text{d'après le cas } a, b \in \mathbb{N} \\ &= v_p(a_1) - v_p(a_2) + v_p(b_1) - v_p(b_2) = v_p(x) + v_p(y) \end{aligned}$$

Enfin, si x (ou y) est nul, $v_p(xy) = -\infty = v_p(x) + v_p(y)$, quel que soit y. /2

$$\boxed{\forall\, x, y \in \mathbb{Q}, \quad v_p(x \times y) = v_p(x) + v_p(y)}$$

3. Soient $x, y \in \mathbb{Q}$ on a $x = p^{v_p(x)} \times r$ avec $r = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ et $a \wedge p = 1$, $b \wedge p = 1$.
de même $y = p^{v_p(y)} \times r'$ avec $r' = \frac{a'}{b'} \in \mathbb{Q}$ et $a' \wedge p = 1$, $b' \wedge p = 1$.
Donc, en supposant sans perte de généralité que $v_p(x) \leqslant v_p(y)$

$$x + y = p^{v_p(x)} \left(r + p^{v_p(y) - v_p(x)} r'\right) = p^{v_p(x)} \frac{ab' + p^{v_p(y)-v_p(x)} a'b}{bb'}$$

on remarquera que $p^{v_p(y)-v_p(x)} \in \mathbb{N}$ car $v_p(y) \geqslant v_p(x)$.
Comme $p \wedge b = 1 = p \wedge b'$ donc $p \wedge bb' = 1$,
Ainsi $v_p\left(\dfrac{ab' + p^{v_p(y)-v_p(x)} a'b}{bb'}\right) \geqslant 0$.
Donc $v_p(x + y) \geqslant v_p(x) = \min(v_p(x), v_p(y))$. /2

$$\boxed{\forall\, x, y \in \mathbb{Q}, \quad v_p(x + y) \geqslant \min\left(v_p(x), v_p(y)\right)}$$

4. On a pour tout $x, y \in \mathbb{Q}$,

$$-v_p(x + y) \leqslant -\min(v_p(x), v_p(y)) = \max(-v_p(x), -v_p(y))$$

Par croissance de $n \mapsto p^n$:

$$|x + y|_p = p^{-v_p(x+y)} \leqslant p^{\max(-v_p(x), -v_p(y))} = \max(p^{-v_p(x)}, p^{-v_p(y)}) = \max(|x|_p, |y|_p)$$

/2

$$\boxed{\forall\, x, y \in \mathbb{Q}, \quad |x + y|_p \leqslant \max(|x|_p, |y|_p)}$$

5. On va procéder point par point
— Commençons par remarquer que $v_p(a) = v_p(-a)$, car on multiplie par (-1) la décomposition.
Donc $|-a|_p = p^{-v_p(-a)} = p^{-v_p(a)} = |a|_p$.
Ainsi, $\forall\, x, y \in \mathbb{Q}$, $d(x, y) = |x - y|_p = |y - x|_p = d(y, x)$ /0,5
— Si $x = y$, $d(x, y) = |x - x|_p = p^{-v_p(0)} = p^{-\infty} = 0$
Réciproquement, supposons que $d(x, y) = 0$.
alors $v_p(x - y) = -\infty$, donc $x - y = 0$, donc $x = y$ /0,5
— Soient $x, y, z \in \mathbb{Q}$,

$$d(x, y) = |(x - z) + (z - y)|_p \leqslant \max(|x - z|_p, |z - y|_p) \leqslant |x - z|_p + |z - y|_p = d(x, z) + d(z, y)$$

/0,5

$$\boxed{\text{Ainsi } d \text{ est une distance sur } \mathbb{Q}}$$

On dit que (Q, d) est un espace métrique.

Remarques !

En fait, dans le cas présent, on a mieux que l'inégalité triangulaire :

on a $d(x,y) = |(x-z)+(z-y)|_p \leqslant \max(d(x,z), d(y,z))$.

On parle ici d'une distance ultramétrique

6. Soient (u_n) et (v_n) deux suites de p-Cauchy.

$$\forall\ n,m \in \mathbb{N}, |(u_n+v_n)-(u_m+v_m)|_p = |(u_n-u_m)+(v_n-v_m)|_p \leqslant \max(|u_n-u_m|_p, |v_n-v_m|_p)$$

(on aurait également pu exploiter l'inégalité triangulaire).
Donc pour $M \in \mathbb{N}$, comme

$$\exists\ N \mid \forall\ n > m \geqslant N, |u_n-u_m|_p < p^{-M} \qquad \text{et} \qquad \exists\ N' \mid \forall\ n > m \geqslant N', |u_n-u_m|_p < p^{-M}$$

Donc $\forall\ n,m \geqslant \max(N,N')$, $|u_n-u_m|_p < p^{-M}$ et $|v_n-v_m|_p < p^{-M}$,
donc $\forall\ n,m \geqslant \max(N,N')$, $|(u_n+v_n)-(u_m+v_m)|_p = \max(|u_n-u_m|_p, |v_n-v_m|_p) < p^{-M}$. /3

$\boxed{\text{la somme de deux suites de } p\text{-Cauchy est une suite de } p\text{-Cauchy}}$

7. Soit (u_n) une suite de $\mathbb{Q}$ et $v_n = u_{n+1}-u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Par télescopage, puis par propriété ultramétrique :

$$\forall\ n > m, |u_m-u_n|_p = |\sum_{k=n}^{m-1}(u_{k+1}-u_k)| \leqslant \max_{k\in[\![n,m-1]\!]} |u_{k+1}-u_k| = \max_{k\in[\![n,m-1]\!]} |v_k|$$

On a ainsi les équivalences puis implication :
(v_n) p-converge vers 0

$$\begin{aligned}&\Longleftrightarrow \forall\ M \in \mathbb{N}, \exists\ N \mid \forall\ n \geqslant N, |v_n|_p < 2^{-M}\\ &\Longleftrightarrow \forall\ M \in \mathbb{N}, \exists\ N \mid \forall\ m > n \geqslant N, \max(|v_n|_p, |v_{n+1}|_p, \dots |v_{m-1}|_p) < 2^{-M}\\ &\Longrightarrow \forall\ M \in \mathbb{N}, \exists\ N \mid \forall\ m > n \geqslant N, |u_m-u_n|_p < 2^{-M}\end{aligned}$$

Donc (u_n) est une suite de p-Cauchy. /3

Réciproquement, si (u_n) est de Cauchy, alors on a admis que (u_n) converge dans $\mathbb{Q}_p$ vers ℓ,
donc par addition, (v_n) converge vers $\ell - \ell = 0$. /1

$\boxed{(v_n) = (u_{n+1}-u_n) \text{ est } p\text{-convergente vers 0 (dans } \mathbb{Q}_p) \text{ ssi } (u_n) \text{ est } p\text{-Cauchy}}$

8. On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_n$, alors $S_{n+1}-S_n = v_n$.
Donc si v_n est p-convergente vers 0 dans $\mathbb{Q}_p$, d'après la question précédente : (S_n) est de p-Cauchy. /1

$\boxed{\text{Donc si } v_n \text{ est } p\text{-convergente vers 0 alors } (S_n) \text{ est convergente dans } \mathbb{Q}_p \text{ (comme toute suite de } p\text{-Cauchy)}}$

9. Application : on considère $v_n = 2 \times 5^n$.
Alors $|v_n|_5 = 5^{-v_5(2\times 5^n)} = 5^{-n} = \frac{1}{5^n}$.
Ainsi $(v_n) \to 0$ et donc /2

$$\boxed{(S_n) = (\sum_{k=0}^{n} 2\times 5^k)_n \text{ converge dans } \mathbb{Q}_5.}$$

Pour calculer la limite, on fait comme avec les sommes de termes de suite géométrique (série géométrique) :

$$4S_n = 5S_n - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} 2\times 5^k - \sum_{k=0}^{n} 2\times 5^k = 2\times 5^{n+1} - 2$$

$$\left|S_n - \frac{-1}{2}\right|_5 = \left|\frac{5^{n+1}}{2}\right|_5 = 5^{-(n+1)}$$

Et donc $(S_n - \frac{-1}{2})$ converge vers 0 pour $|\cdot|_5$ /3

$$\boxed{\text{Ainsi } \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} 2\times 5^k = \frac{-1}{2} \text{ dans } \mathbb{Q}_5}$$

Problème 1 - Moyenne arithmético-géométrique

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $0 \leqslant a \leqslant b$.
On considère les suites de réels positifs (u_n) et (v_n) définies par

$$u_0 = a, \qquad v_0 = b, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, \quad v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n)$$

1. (a) Soient $x, y \geqslant 0$.

$$0 \leqslant (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \quad \Longrightarrow \quad 0 \leqslant x - 2\sqrt{xy} + y \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{xy} \leqslant \frac{1}{2}(x+y)$$

/1

$$\boxed{\forall\, (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2, \qquad \sqrt{xy} \leqslant \frac{1}{2}(x+y)}$$

(b) On démontre le résultat par récurrence (rapide, mais complète!!).
$v_1 = \frac{1}{2}(a+b) \geqslant 0$ et $u_1 = \sqrt{ab} \geqslant 0$, par hypothèse.
De plus si $u_n \geqslant 0$, $v_n \geqslant 0$, alors $u_n v_n \geqslant 0$, donc u_{n+1} existe bien et $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant v_{n+1}$ d'après la première question.
Ainsi, on a montré par récurrence /1

$$\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 1,\ u_n \text{ existe bien et } u_n \text{ et } v_n \text{ sont positifs.}}$$

(c) On commence par une observation. Soit $n \in \mathbb{N}$.
D'après la question 1, comme u_n et $v_n > 0$, on a

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \leqslant \frac{1}{2}(u_n + v_n) = v_{n+1}$$

Donc pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n \leqslant v_n$
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{2}(u_n + v_n - 2v_n) = \dfrac{1}{2}(u_n - v_n) \leqslant 0$ d'après « l'observation ».
Donc (v_n) est décroissante.
$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n}\left(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}\right) \geqslant 0$ d'après « l'observation »précédente.
Donc (u_n) est croissante. /1,5

$$\boxed{\text{Ainsi pour les suites (extraites) : } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante et } (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante.}}$$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + v_n - 2\sqrt{u_n v_n}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}\right)^2$$

Puis par positivité, comme $\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n} \leqslant \sqrt{v_n} + \sqrt{u_n}$, et $0 \leqslant \sqrt{v_n} + \sqrt{u_n}$, on a

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}\left(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}\right)\left(\sqrt{v_n} + \sqrt{u_n}\right) = \frac{1}{2}(v_n - u_n)$$

/1,5

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(v_n - u_n)}$$

(e) Ainsi, par récurrence (immédiate et non traitée) : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$.
Et comme par ailleurs, $v_n - u_n \geqslant 0$,
avec le théorème de convergence par encadrement; $(v_n - u_n)$ converge vers 0. /1
Enfin comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante,
les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. Elles ont même limite.
C'est également le cas des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. /1

$$\boxed{\text{Les suites } (u_n) \text{ et } (v_n) \text{ convergent vers une même limite.}}$$

(f) Si initialement, $b < a$,
alors on aurait a priori des nouvelles suites qui commenceraient à des valeurs différentes (u_0 et v_0 échangés),
mais ensuite, comme $\frac{a+b}{2} = \frac{b+a}{2}$ et $\sqrt{ab} = \sqrt{ba}$, les valeurs suivantes seraient les mêmes. /2

$$\boxed{\text{Et donc les suites } (u_n) \text{ et } (v_n) \text{ convergent vers la même limite que le cas précédent}}$$

Cette limite commune est appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b et est notée $M(a,b)$.

2. (a) Si $u_n = v_n = b$, alors $v_{n+1} = \dfrac{1}{2}(b+b) = b$ et $u_{n+1} = \sqrt{bb} = b$.
Et ainsi par récurrence, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n = b$. La limite est évidente : */1*

$$\boxed{\text{Pour tout } b \geqslant 0,\ M(b,b) = b}$$

(b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$. On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n(\lambda a, \lambda b) = \lambda u_n(a,b) \text{ et } v_n(\lambda a, \lambda b) = \lambda v_n(a,b)$$

En effet $\mathcal{P}_0$ est vraie initialement (pour $n = 0$: $u_(\lambda a, \lambda b) = \lambda a = \lambda u_(a,b)\ldots$).
Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que le résultat est vraie pour u_n et v_n.
Alors */2*

$$u_{n+1}(\lambda a, \lambda b) = \sqrt{u_n(\lambda a, \lambda b) v_n(\lambda a, \lambda b)} = \sqrt{\lambda^2 u_n(a,b) v_n(a,b)} = \lambda u_{n+1}(a,b)$$

$$v_{n+1}(\lambda a, \lambda b) = \frac{u_n(\lambda a, \lambda b) + v_n(\lambda a, \lambda b)}{2} = \frac{\lambda u_n(a,b) + \lambda v_n(a,b)}{2} = \lambda v_{n+1}(a,b)$$

En passant ensuite à la limite */1*

$$\boxed{\forall\ \lambda \in \mathbb{R}_+, \qquad M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a,b)}$$

Remarques !
A noter qu'on aurait pu se contenter de l'étude d'une seule des deux suites...

En prenant, $\lambda = b$, on a donc $bM(x,1) = M(bx, b)$ */0,5*

$$\boxed{\text{Donc avec } x = \tfrac{a}{b} \leqslant 1,\ M(a,b) = bM(x,1)}$$

(c) Il ne faut pas chercher un λ ici....
Si $u_0 = 1-x$ et $v_0 = 1+x$,
alors $u_1 = \sqrt{(1-x)(1+x)} = \sqrt{1-x^2}$ et $v_1 = \dfrac{(1-x)+(1+x)}{2} = 1$.
On a alors, par récurrence :

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1}(1-x, 1+x) = u_n(\sqrt{1-x^2}, 1),\ \text{ et } v_{n+1}(1-x,1+x) = v_n(\sqrt{1-x^2}, 1)$$

Or comme les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ont les mêmes limites,
nécessairement les deux familles de suites ont même limite */2,5*

$$\boxed{\forall\ x \in [0,1], \qquad M(\sqrt{1-x^2}, 1) = M(1-x, 1+x)}$$

3. On considère $K(a,b) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}}$, pour $a, b \in \mathbb{R}+$

(a) Soit $b \geqslant 0$, */1,5*

$$K(b,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{b^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{b\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}} = \frac{1}{b}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta$$

$$\boxed{K(b,b) = \frac{\pi}{2b}}$$

(b) On peut supposer sans perte de généralité que $0 < a \leqslant b$.
Pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t = a^2 + (b^2 - a^2)\sin^2 t \leqslant a^2 > 0$. */2*

$$\boxed{\text{ainsi, pour tout } t \in [0, \tfrac{\pi}{2}],\ a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t > 0.}$$

(c) En faisant le changement de variable $s = \frac{\pi}{2} - t$, bijectif et de classe $\mathcal{C}^1$, on trouve */1,5*

$$\boxed{K(a,b) = K(b,a)}$$

Cela donne donc

$$\boxed{M(a,b) = M(b,a).\ \text{C'est ce qu'on a vu en question 1.f}}$$

(d) On va montrer que $K(a,b)=K(\frac{a+b}{2},\sqrt{ab})$.

i. On note $f(t)=t+\arctan(\frac{b}{a}\tan t)$, alors f est définie et est continue sur $[0,\frac{\pi}{2}[$.
Comme les fonctions tan, arctan et id sont strictement croissantes, par addition et composition, f est également strictement croissante.
Ainsi f établit une bijection de $[0,\frac{\pi}{2}[$ sur $[f(0),\lim_{t\to\frac{\pi}{2}} f(t)[=[0,\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}[$. /1,5
Mais, on peut prolonger f par continuité, elle gardera son caractère bijectif (strictement croissante). /0,5

$$\boxed{f : t\mapsto t+\arctan(\tfrac{b}{a}\tan t) \text{ est bijective de } [0,\tfrac{\pi}{2}] \text{ sur } I=[0,\pi]}$$

ii. On pratique donc le changement de variable $u=f(t)$, f est de classe $\mathcal{C}^1$.
On a alors $u=t+\arctan(\frac{b}{a}\tan t)$, donc $\tan(u-t)=\frac{b}{a}\tan t$.

$$\mathrm{d}u=\mathrm{d}t\left(1+\frac{\frac{b}{a}(1+\tan^2 t)}{1+\frac{b^2}{a^2}\tan^2 t}\right)=\mathrm{d}t\left(1+\frac{ab(1+\tan^2 t)}{a^2+b^2\tan^2 t}\right)$$

$$\mathrm{d}u=\mathrm{d}t\left(1+\frac{ab(\cos^2 t+\sin^2 t)}{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}\right)=\mathrm{d}t\frac{(a+b)(a\cos^2 t+b\sin^2 t)}{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}$$ /2,5

Selon l'indication, on note $\varphi=\arctan(\frac{b}{a}\tan t)$, donc $\tan\varphi=\frac{b}{a}\tan t$.
On remarque que $\varphi\geqslant 0$,car $\frac{b}{a}\tan t\geqslant 0$ et $\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ (comme une arctan)
Notons que $\cos^2\varphi=\dfrac{1}{1+\tan^2\varphi}=\dfrac{1}{1+\frac{b^2}{a^2}\tan^2 t}=\dfrac{a^2\cos^2 t}{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}$
et de même $\sin^2\varphi=\tan^2\varphi\times\cos^2\varphi=\dfrac{\frac{b^2}{a^2}\tan^2 t\times a^2\cos^2 t}{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}=\dfrac{b^2\sin^2 t}{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}$ /2,5
(on peut vérifier facilement que $\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$)
On a également, $\cos u=\cos(t+\varphi)=\cos t\cos\varphi-\sin t\sin\varphi$

$$\cos u=\frac{\cos t a\cos t-\sin t b\sin t}{\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}}=\frac{a\cos^2 t-b\sin^2 t}{\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}} \text{ car } \varphi\in[0,\tfrac{\pi}{2}].$$

Et enfin, $\sin u=\sin(t+\varphi)=\sin t\cos\varphi+\cos t\sin\varphi=\dfrac{(a+b)\cos t\sin t}{\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}}$.

Donc

$$\begin{aligned} a_1^2\cos^2 u+b_1^2\sin^2 u &= \frac{(a+b)^2}{4}\frac{(a\cos^2 t-b\sin^2 t)^2+4ab\cos^2 t\sin^2 t}{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t} \\ &= \frac{(a+b)^2}{4}\frac{(a\cos^2 t+b\sin^2 t)^2}{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}\end{aligned}$$ /3

Ainsi :

$$\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a_1^2\cos^2 u+b_1^2\sin^2 u}}=\frac{\mathrm{d}t(a+b)(a\cos^2 t+b\sin^2 t)}{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}\times\frac{2\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}}{(a+b)(a\cos^2 t+b\sin^2 t)}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a_1^2\cos^2 u+b_1^2\sin^2 u}}=\frac{2\mathrm{d}t}{\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}}$$

On a donc (puisque les bornes ont évoluées, cf question précédente) : /1

$$\boxed{K(a,b)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a_1^2\cos^2 u+b_1^2\sin^2 u}} \text{ avec } 2a_1=a+b \text{ et } b_1=\sqrt{ab}}$$

iii. La suite $K_n=K(u_n,v_n)=K(v_n,u_n)$ est donc une suite constante.
En effet, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} 2K(v_n,u_n) &= \int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{v_{n+1}^2\cos^2 u+u_{n+1}^2\sin^2 u}} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{v_{n+1}^2\cos^2 u+u_{n+1}^2\sin^2 u}}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{v_{n+1}^2\cos^2 u+u_{n+1}^2\sin^2 u}} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{v_{n+1}^2\cos^2 u+u_{n+1}^2\sin^2 u}}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{-\mathrm{d}v}{\sqrt{v_{n+1}^2\cos^2 v+u_{n+1}^2\sin^2 v}} \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{v_{n+1}^2\cos^2 u+u_{n+1}^2\sin^2 u}}=2K(v_{n+1},u_{n+1})\end{aligned}$$

d'après la relation de Chasles, puis le changement de variable $v = \pi - u$ ($\mathcal{C}^1$-difféomorphisme).
Elle vaut donc $K_n = K_0 = K(u_0, v_0) = K(a,b)$ /3

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ K(u_n, v_n) = K(a,b).}$$

(e) En passant à la limite (par continuité de K) :

$$\lim_{n\to\infty} K(u_n, v_n) = K(\lim u_n, \lim v_n) = K(M(a,b), M(a,b))$$

Mais ce terme est constant égal à $K(a,b)$ et enfin, on a calculer $K(b,b) = \frac{\pi}{2b}$, on a donc /2

$$\frac{\pi}{2M(a,b)} = K(a,b)$$

$$\boxed{M(a,b) = \frac{\pi}{2K(a,b)}}$$

Remarques !

Selon la formule vue au DS2, le quart de périmètre de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est donné par la formule

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^t}\, dt$$

De telles intégrales, comme $K(a,b)$ sont appelés des intégrales elliptiques.
L'étude des intégrales elliptiques par Gauss, Abel et Jacobi a jouée un rôle central dans le développement des mathématiques du XIX siècle

Problème 2 - Inversion et points rationnels sur un cercle

A. Généralités sur l'inversion

1. Notons $z(\neq 0)$ l'affixe de M et $f(z)$ celle de $I(M)$.
On a alors l'affixe de $\overrightarrow{OM}$ égale également à z et celle de $OI(M)$ à $f(z)$. /1,5

$$f(z) = \frac{z}{|z|^2} = \frac{z}{z\overline{z}}$$

$$\boxed{I \text{ correspond à l'application } f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, z \mapsto \frac{1}{\overline{z}}}$$

2. On a alors, pour tout $z \neq 0$:

$$f \circ f(z) = \frac{1}{\overline{f(z)}} = \frac{1}{\overline{\frac{1}{\overline{z}}}} = z$$ /1

$$\boxed{\text{Donc l'inversion } f \text{ est une involution du plan épointé (i.e. } f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^*}\text{).}}$$

3. Soit $z = a + ib$. /1

$$\boxed{f(z) = \frac{z}{|z|^2} = \frac{1}{a^2+b^2}(a+ib)}$$

4. Soit $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application et E la partie du plan complexe, définie par :

$$E = \{z \in \mathbb{C}^*, h(z) = 0\}$$

Soit $z \in f(E)$, alors il existe $Z \in E$ tel que $z = f(Z)$.
Par conséquent $h(f(z)) = h(f(f(Z)) = h(Z) = 0$, car $f^2 = \text{id}$.
Donc $f(E) \subset \{z \in \mathbb{C}^*, h(f(z)) = 0\}$.
Réciproquement, soit $z \in \mathbb{C}^*$ tel que $h(f(z)) = 0$.
alors $f(z) \in E$ et $f(f(z)) \in f(E)$.
Or $f(f(z)) = z$, ainsi $z \in f(E)$ et donc $\{z \in \mathbb{C}^*, h(f(z)) = 0\} \subset f(E)$.
Par double inclusion : /2,5

$$\boxed{f(E) = \{z \in \mathbb{C}^*, h(f(z)) = 0\}}$$

Remarques !

On peut essayer de raisonner directement par équivalence.

$$z \in f(E) \Longleftrightarrow \exists\ Z \in E \text{ tel que } z = f(Z) \Longleftrightarrow \exists\ Z \in C^* \text{ tel que } h(Z) = 0 \text{ et } z = \frac{Z}{|Z|^2}$$

$$\Longleftrightarrow Z = f(z) \text{ et } h(Z) = 0 (\text{ car } f \text{ est un involution})$$

$$\Longleftrightarrow h(f(z)) = 0 \Longleftrightarrow z \in \{z \in \mathbb{C}^* \mid h(f(z)) = 0\}$$

B. Image d'un cercle, d'une droite

1. Image d'un cercle

(a) On a les équivalences

$$z \in \mathcal{C} \Longleftrightarrow |z-\omega| = r \Longleftrightarrow |z-\omega|^2 = r^2 \Longleftrightarrow (z-\omega)\overline{(z-\omega)} = r^2$$ /1

$$\boxed{\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C}^*, (z-\omega)(\overline{z}-\overline{\omega}) - r^2 = 0\}}$$

(b) On note $h : z \mapsto (z-\omega)(\overline{z}-\overline{\omega}) - r^2$ On continue de raisonner par équivalences. D'après la partie précédente :

$$\begin{aligned} z \in f(\mathcal{C}) &\Longleftrightarrow h(f(z)) = 0 \\ &\Longleftrightarrow (f(z)-\omega)(\overline{f(z)}-\overline{\omega}) - r^2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow (\tfrac{z}{|z|^2}-\omega)(\tfrac{\overline{z}}{|z|^2}-\overline{\omega}) - r^2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \tfrac{z\overline{z}}{|z|^4} - \overline{\omega}\tfrac{z}{|z|^2} - \omega\tfrac{\overline{z}}{|z|^2} + |\omega|^2 - r^2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \tfrac{1}{|z|^2} - \overline{\omega}\tfrac{z}{|z|^2} - \omega\tfrac{\overline{z}}{|z|^2} + |\omega|^2 - r^2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow 1 - \overline{\omega}z - \omega\overline{z} + (|\omega|^2 - r^2)|z|^2 = 0 \end{aligned}$$

/1,5

$$\boxed{\text{Donc } z \in f(\mathcal{C}) \text{ ssi } (r^2 - |\omega|^2)|z|^2 + \overline{z}\omega + z\overline{\omega} = 1}$$

(c) Supposons que $O \notin \mathcal{C}$.
Donc l'affixe ($z = 0$) de O ne vérifie pas l'équation de $\mathcal{C}$ ie $|\omega|^2 - r^2 \neq 0$.
On peut donc diviser l'équation de $f(\mathcal{C})$ par $r^2 - |\omega|^2$.

$$z \in f(E) \Longleftrightarrow |z|^2 + \frac{\overline{\omega}}{r^2-|\omega|^2}z + \frac{\omega}{r^2-|\omega|^2}\overline{z} - 1 = 0$$

On fait apparaître la forme canonique :

$$z \in f(E) \Longleftrightarrow (z + \frac{\omega}{r^2-|\omega|^2})(\overline{z} + \frac{\overline{\omega}}{r^2-|\omega|^2}) - \frac{\omega\overline{\omega}}{(r^2-|\omega|^2)^2} - 1 = 0$$

$$z \in f(E) \Longleftrightarrow (z + \frac{\omega}{r^2-|\omega|^2})\overline{(z + \frac{\omega}{r^2-|\omega|^2})} - \left(\frac{r}{r^2-|\omega|^2}\right)^2 = 0$$

$$z \in f(E) \Longleftrightarrow \left|z + \frac{\omega}{r^2-|\omega|^2}\right| = \frac{r}{|r^2-|\omega|^2|}$$

/2,5

$$\boxed{\text{si } O \notin \mathcal{C},\ f(\mathcal{C}) \text{ est un cercle de centre d'affixe } -\tfrac{\omega}{r^2-|\omega|^2} \text{ et de rayon } \tfrac{r}{|r^2-|\omega|^2|}}$$

(d) Soit $\mathcal{D} = (AB)$, une droite de $\mathbb{C}$ qui ne contient pas O. On note a et b les affixes des points A et B ($a \neq b$).

$$z \in \mathcal{D} \setminus \{A\} \Longleftrightarrow \arg\frac{z-b}{z-a} \equiv 0[\pi] \Longleftrightarrow \frac{z-b}{z-a} \in \mathbb{R}$$

$$\Longleftrightarrow \exists\ t \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \text{ tel que } z - b = t(z-a) \Longleftrightarrow \exists\ t \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \text{ tel que } (1-t)z = b - ta$$

On va démontrer que l'angle $(\overrightarrow{f(M)f(A)}, \overrightarrow{f(M)f(B)})$ est constant.
On prendra $M \neq A$, comme $z = \frac{1}{1-t}(b - at)$, on a donc $f(z) = \dfrac{1}{\overline{z}} = \dfrac{1-t}{\overline{b} - t\overline{a}}$.

$$f(z) - f(b) = \frac{1-t}{\overline{b}-t\overline{a}} - \frac{1}{\overline{b}} = \frac{\overline{b} - t\overline{b} - \overline{b} + t\overline{a}}{\overline{b}(\overline{b}-t\overline{a})} = \frac{t(\overline{a}-\overline{b})}{\overline{b}(\overline{b}-t\overline{a})}$$

$$f(z) - f(a) = \frac{1-t}{\overline{b}-t\overline{a}} - \frac{1}{\overline{a}} = \frac{\overline{a} - t\overline{a} - \overline{b} + t\overline{a}}{\overline{a}(\overline{b}-t\overline{a})} = \frac{\overline{a}-\overline{b}}{\overline{a}(\overline{b}-t\overline{a})}$$

Et donc
$$z \in \mathcal{D} \setminus \{A\} \Longleftrightarrow \frac{f(z)-f(b)}{f(z)-f(a)} = t\frac{\overline{a}}{\overline{b}}$$
Donc
$$z \in \mathcal{D}\setminus\{A\} \Longleftrightarrow (\overrightarrow{f(M)f(A)}, \overrightarrow{f(M)f(B)}) \equiv \arg(\frac{f(z)-f(b)}{f(z)-f(a)}) \equiv \arg(\overline{a}) - \arg(\overline{b}) \equiv \arg(b) - \arg(a)[2\pi]$$
Ainsi, /2

$f(M)$ est **inclus** dans le cercle passant par $f(A)$ et $f(B)$ et d'angle au sommet égal à $\arg(b) - \arg(a)$

- C'est bien un cercle à condition que $\arg(b) - \arg(a) \not\equiv 0[\pi]$, c'est-à-dire $\arg(b) \not\equiv \arg(a)[\pi]$, ou encore à condition que O, A et B ne sont pas alignés. /1
- Mais on a mieux (plus concret) : $\dfrac{0-f(b)}{0-f(a)} = \dfrac{\overline{a}}{\overline{b}}$, donc on a
$$z \in \mathcal{D} \setminus \{A\} \Longleftrightarrow (\overrightarrow{f(M)f(A)}, \overrightarrow{f(M)f(B)}) \equiv (\overrightarrow{Of(A)}, \overrightarrow{Of(B)})[\pi]$$
$f(M)$ est sur le cercle qui passe par O, $f(A)$ et $f(B)$, mais privé du point O. /1
- Et enfin, ce n'est pas suffisant, il faut l'inclusion réciproque (assez rapide).
Si M' est sur le cercle qui passe par O, $f(A)$ et $f(B)$, mais privé du point O,
alors d'après calculs (équivalences) et en notant $M = f(M')$, on a $f(M) = M'$ ($f^2 = \text{id}$).
et $M' = f(M)$ sur ce cercle donc $M \in \mathcal{D}$.La réciproque est démontrée. /1,5

Bilan :

$$\boxed{f(M) \text{ est le cercle qui passe par } O,\ f(A) \text{ et } f(B), \text{ mais privé du point } O}$$

Remarques !
On notera que si A, B et O sont alignés, alors l'image de la droite (AB) est une droite : c'est la droite $(f(A)f(B))$

Supposons que $O \in \mathcal{C}$. Soient A' et B' deux autres points de O.
On considère alors $A = f(A')$ et $B = f(B')$. Alors $A' = f(A)$ et $B' = f(B)$ (involution).
Donc d'après la question précédente, $f\big((AB)\big) = \mathcal{C} \setminus \{O\}$.
Enfin, par composition par f, bijective (donc pas uniquement une inclusion mais bien une égalité) : /2
$$\boxed{(AB) = f^2\big((AB)\big) = f(\mathcal{C} \setminus \{O\})}$$

2. Nécessairement $O \notin \mathcal{C}$, sinon $f(\mathcal{C})$ serait une droite.
Considérons que $\mathcal{C}$ est de centre d'affixe ω et de rayon r.
D'après la question 1.c., $f(\mathcal{C})$ est un cercle de centre d'affixe $-\frac{\omega}{r^2-|\omega|^2}$ et de rayon $\frac{r}{|r^2-|\omega|^2|}$
Par conséquent, $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C} \Longleftrightarrow -\frac{\omega}{r^2-|\omega|^2} = \omega$ et $\frac{r}{|r^2-|\omega|^2|} = r$
Ainsi $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C} \Longleftrightarrow r^2 - \omega^2 = -1$ ou $[\omega = 0$ et $\frac{1}{r} = r] \Longleftrightarrow \omega^2 = 1 + r^2$ ou $(\omega, r) = (0, 1)$
Donc, dans le premier cas, ω est la racine carrée (complexe a priori) d'un nombre réel positif.
Il est nécessaire et suffisant que $\omega \in \mathbb{R}$, puis que $\omega^2 \geqslant 1$. /3

les cercles $\mathcal{C}$ (de rayon $r > 0$) qui sont laissés globalement invariants par l'inversion sont les cercles centrés en Ω d'affixe $\omega \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ et de rayon $r = \sqrt{\omega^2 - 1}$ et le cercle de centre O et de rayon 1.

Remarques !
On n'ira pas plus loin, mais on peut exploiter $\omega^2 = 1 + r^2$, comme caractéristique de triangle rectangle (d'hypoténuse de longueur ω...)

Remarques !
En réalité, une inversion est définie à partir d'un cercle.
Si ce cercle a pour centre $\Omega(\omega)$ et rayon r, alors
$$I : M(z) \mapsto M'(z') \qquad \textit{tel que} \qquad z' - \omega = \frac{r^2}{z - \omega}$$
Dans le cas présent, il s'agit de l'inversion par rapport au cercle de centre O et rayon 1.
Les résultats obtenus ici sur la transformation d'un cercle/droite en cercle/droite restent vrais (cela dépend si la droite passe par Ω ou non.

Enfin, on se positionne ici sur le plan épointé $\mathbb{C}\setminus\{O\}$, mais il est plus efficace de se placer sur $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$, en prenant $f(\Omega)=\infty$ et réciproquement...

C. Points rationnels sur une droite, sur un cercle

/0,5

1. (a)

$\boxed{\text{La droite d'équation } y=2x \text{ admet une infinité de points rationnels (et même entier).}}$

$\boxed{\text{La droite d'équation } y=\sqrt{2}x \text{ admet un unique point rationnel : } (0,0).}$

En effet, si $x\neq 0$, alors $\sqrt{2}=\frac{y}{x}$, il est impossible alors que y et $x\in\mathbb{Q}$, sinon $\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$. /1

$\boxed{\text{La droite d'équation } y=\sqrt{2} \text{ n'a aucun point rationnel.}}$

En effet, tous les points de cette droite ont une ordonnée égale à $\sqrt{2}$ /2

(b) Supposons que la droite Δ possède deux points rationnels (r_1,r_2) et (r_3,r_4)
alors Δ a pour équation $(r_4-r_2)x-(r_3-r_1)y=r_4r_1-r_3r_2$.
On ne peut avoir $r_4-r_2=0$ et $r_3-r_1=0$ (sinon les deux points sont confondus).
On peut supposer, sans perte de généralité, que $r_3\neq r_1$.
Et donc pour tout point $M(x,y)\in\Delta$ avec x rationnel, alors $y=\frac{(r_4-r_2)x-r_4r_1-r_3r_2}{r_3-r_1}\in\mathbb{Q}$.
ce qui donne une infinité de points à condition que $r_4\neq r_2$.
si en outre $r_4=r_2$, alors tous les points (r,r_2) (avec $r\in\mathbb{Q}$) sont dans Δ
(Δ a infinité de points. En fait c'est la droite d'équation $y=r_2$). /2,5

$\boxed{\text{Donc si une droite comporte au moins deux points rationnels, elle en admet une infinité.}}$

2. Si M a pour affixe z alors $I(M)$ a pour affixe $\overline{z}|z|^2$
Et donc si M est à coordonnées rationnelles, $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$ sont rationnels.
donc $\mathrm{Re}(\overline{z})$ $\mathrm{Im}(\overline{z})$ et $|z|^2$ sont rationnels (mais pas $|z|$!).
Et ainsi $I(M)$ est à coordonnées rationnelles. /1,5
On a donc une implication. Et comme $M=I(I(M))$, l'implication réciproque s'en déduit. /0,5

$\boxed{M \text{ du plan est à coordonnées rationnelles ssi } I(M) \text{ est à coordonnées rationnelles.}}$

3. (a) On note $\mathcal{C}'$ ce cercle.
$M(x,y)\in\mathcal{C}'\iff x^2+y^2=(\sqrt[4]{2})^2=\sqrt{2}$ Supposons que M, point de $\mathcal{C}'$ soit rationnel, on aurait donc (en notant $x=\frac{p}{q}$ et $y=\frac{p'}{q'}$, irréductibles) :

$$\frac{{q'}^2p^2+{p'}^2q^2}{q^2{q'}^2}=\sqrt{2}$$

Et donc $\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$, ce qui est faux. /2

$\boxed{\text{Le cercle de centre } O \text{ de rayon } \sqrt[4]{2} \text{ n'admet pas de point rationnel.}}$

(b) En exploitant la remarque 2, $\mathcal{C}$ a « autant »de points rationnels que $I(\mathcal{C})$. /1

$\boxed{I(\mathcal{D}_1)\cup\{O\} = \text{avec } \mathcal{D}_1 \text{ d'équation } y=\sqrt{2} \text{ est un cercle admettant un unique point rationnel.}}$

Pour le second cas, il faut prendre une droite qui ne passe pas O et qui ne contient qu'un nombre rationnel.
L'exemple donné précédemment d'équation $y=\sqrt{2}x$ ne convient pas.
Qu'à cela ne tienne, on prend la droite d'équation $y=\sqrt{2}(x-1)$,
elle n'a qu'un point rationnel : $(1,0)$, les autres ne sont pas rationnels, sinon $\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$. /2

$\boxed{I(\mathcal{D}_2)\cup\{O\} \text{ avec } \mathcal{D}_2 \text{ d'équation } y=\sqrt{2}(x-1) \text{ est un cercle admettant exactement deux points rationnels.}}$

(c) On note A et B les deux points de $\mathcal{C}$ rationnels.
Comme $\mathcal{C}$ passe par O, alors $I(\mathcal{C})=(I(A)I(B))$ d'après la partie B.
Or $I(A)$ et $I(B)$ sont rationnels d'après 2., donc $I(\mathcal{C})$ est une droite avec au moins deux points rationnels.
Ainsi $I(\mathcal{C})$ possède une infinité de points rationnels d'après 1.(b). /2

$\boxed{\text{Et donc } \mathcal{C}=I(I(\mathcal{C})) \text{ possède une infinité de points rationnels}}$

(d) On note $A(a)$ un point de $\mathcal{C}$ rationnel et on considère la translation de définition complexe :

$$t_a : z \mapsto z - a \qquad t_a^{-1} : z \mapsto z + a = t_{-a}(z)$$

Notons que t_a et t_{-a} transforment les points rationnels en points rationnels car $\mathrm{Re}(a) \in \mathbb{Q}$ et $\mathrm{Im}(a) \in \mathbb{Q}$.
Alors A a pour image O, et le cercle considéré est translaté en un cercle qui passe par O.
Il admet deux autres points rationnels (les images par t_a est des points initialement rationnels de $\mathcal{C}$).
Donc d'après la question précédente, $t_a(\mathcal{C})$ admet alors une infinité de points rationnels.
Et enfin, $\mathcal{C} = t_{-a}(t_a(\mathcal{C}))$ admet donc lui aussi une infinité de points rationnels /2

$$\boxed{\text{Tout cercle ayant au moins trois points rationnels en a une infinité.}}$$