

Devoir surveillé n°3

Durée de l'épreuve : 3 heures
La calculatrice est interdite

Le devoir est composé de deux exercices et d'un problème.

Lorsqu'une question est jugée, a priori, plus difficile, elle est précédée du symbole (*) voire (**).

La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées.**

BON COURAGE

Exercice 1

Soient E un ensemble non vide et $f : E \rightarrow E$, une application.

On « rappelle » que $f^0 = \text{id}_E$ et pour n entier naturel non nul, $f^n = f \circ f^{n-1} = f^{n-1} \circ f$.

Pour tout entier naturel n , on note $F_n = \text{Im}(f^n)$.

- (a) Quel est l'ensemble F_0 ?
(b) Montrer que la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion, i.e. : $\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+1} \subset F_n$.
- On suppose dans cette question qu'il existe un entier p telle que $F_{p+1} = F_p$.
(a) Montrer que $\forall k \geq p, F_k = F_p$.
(b) Justifier que $\{k \in \mathbb{N} \mid F_{k+1} = F_k\}$ admet un plus petit élément.
- On suppose dans cette question que f est injective.
(a) Montrer que si A et B sont deux parties de E telles que $f(A) = f(B)$, alors $A = B$.
(b) En déduire que, s'il existe un entier p tel que $F_{p+1} = F_p$, alors f est bijective.
- Donner un exemple où l'application f est injective et où la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante pour l'inclusion.

Problème

Pour l'ensemble du problème, on fera bien attention aux variables considérées!! De manière générale, nos objets sont définis avec trois variables : $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $t \in \mathbb{R}_+$. Enfin, **dans l'ensemble du problème (et sauf précision contraire), toutes les fonctions sont continues sur $\mathbb{R}_+$.**

A toute fonction f , et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on associe la fonction :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n(f) : \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_0^n f(t)e^{-xt} dt \end{aligned}$$

Puis, lorsque $(\mathcal{L}_n(f)(x))_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite on note :

$$\mathcal{L}(f) : x \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}_n(f)(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n f(t)e^{-xt} dt$$

$\mathcal{L}^n(f)$ est appelée la transformée de Laplace de la fonction f .

On dit qu'une fonction f est bornée sur $\mathbb{R}_+$ si l'ensemble image $f(\mathbb{R}_+)$ est borné.

On note $\mathcal{B}$, l'ensemble des fonctions bornées sur $\mathbb{R}_+$.

A. Quelques exemples

- Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et $\varphi_\alpha : t \mapsto e^{-\alpha t}$.
(a) Calculer, pour tout entier n , $\mathcal{L}_n(\varphi_\alpha)$
(b) Est-ce que $\mathcal{L}(\varphi)$ existe? Si oui, donner son expression.
- Soit $\omega \in \mathbb{R}_+$. On note $C : t \mapsto \cos(\omega t)$ et $S : t \mapsto \sin(\omega t)$.
(a) Calculer, pour tout entier n , $\mathcal{L}_n(C)$ et $\mathcal{L}_n(S)$
(b) Est-ce que $\mathcal{L}(C)$ et $\mathcal{L}(S)$ existent? Si oui, donner leur expression.
- Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ une application telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{L}_n(f)$ existe.
Soient $a \in \mathbb{N}^*$ et $h : x \mapsto f(x+a)$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{L}_n(h)$ existe bien puis que,
pour tout $x > 0$, $\mathcal{L}(h)(x) = e^{xa} (\mathcal{L}(f)(x) - \mathcal{L}_a(f)(x))$.

B. Propriétés asymptotiques et linéaires

1. Soit $f \in \mathcal{B}$. On souhaite montrer dans cette question que $\mathcal{L}(f)$ existe. On considère $x > 0$.

(a) On note $f^+ : t \mapsto (f(t))^+ = \begin{cases} f(t) & \text{si } f(t) \geq 0 \\ 0 & \text{si } f(t) \leq 0 \end{cases}$ et $f^- : t \mapsto (f(t))^- = \begin{cases} -f(t) & \text{si } f(t) \leq 0 \\ 0 & \text{si } f(t) \geq 0 \end{cases}$.

Exprimer f en fonction de f^+ et f^- .

(b) Montrer que f^+ et f^- sont également bornées.

(c) Montrer que la suite $\mathcal{L}_n(f^+)(x)$ est une suite croissante et majorée.

De même montrer que $\mathcal{L}_n(f^-)(x)$ est une suite croissante et majorée.

(d) En déduire que $\mathcal{L}(f)$ existe bien.

(e) Que vaut $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(f)(x)$?

2. Soient $f, g \in \mathcal{B}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lambda f + \mu g \in \mathcal{B}$ et que

$$\mathcal{L}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathcal{L}(f) + \mu \mathcal{L}(g)$$

3. On admet que la seule fonction f bornée qui vérifie : $\forall x > 0, \mathcal{L}(f)(x) = 0$, est la fonction nulle.

Montrer alors que $\mathcal{L}$ est une application injective sur $\mathcal{B}$.

C. Transformée de fonctions dérivées et de produit de convolution

1. Soit f , bornée, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et telle que f' est également bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Montrer que pour tout $x > 0$,

$$\mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0)$$

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Plus généralement, on suppose que f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}_+$ et que pour tout $h \in \mathbb{N}, h \leq k, f^{(h)}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Montrer que pour tout $x > 0$,

$$\mathcal{L}(f^{(k)})(x) = x^k \mathcal{L}(f)(x) - \sum_{h=0}^{k-1} x^h f^{(k-1-h)}(0)$$

(Pour M. Bencheikroun : l'intégration par parties généralisée n'est pas au programme...)

3. (**) Soient $f, g \in \mathcal{B}$. On considère $h : t \mapsto \int_0^t f(t-x)g(x)dx$.

Montrer que $\mathcal{L}(h)$ existe et que $\mathcal{L}(h) = \mathcal{L}(f) \times \mathcal{L}(g)$

D. Application à la résolution d'équations différentielles

On considère les deux problèmes de Cauchy définis sur $\mathbb{R}_+$:

$$(PC_1) : y'' + 3y' + 2y = 2e^{-\frac{3}{2}t} \quad y(0) = 1, y'(0) = 2$$

$$(PC_2) : y'' + 4y' + 3y = \sin t, \quad y(0) = 1, y'(0) = -3$$

1. (a) Résoudre (PC_1) .

(b) Résoudre (PC_2) .

2. On cherche à résoudre le problème de Cauchy (PC_1) en exploitant la transformée de Laplace.

(a) On considère donc f_1 la solution de (PC_1) .

Calculer de deux façons $\mathcal{L}(f_1'' + 3f_1' + 2f_1)$.

(b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\mathcal{L}(f_1)(x) = \frac{x^2 + \frac{13}{2}x + \frac{19}{2}}{(x+1)(x+2)(x+\frac{3}{2})}$$

(c) On admet qu'il existe $A, B, C \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -2, -\frac{3}{2}\}$,

$$\frac{x^2 + \frac{13}{2}x + \frac{19}{2}}{(x+1)(x+2)(x+\frac{3}{2})} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+\frac{3}{2}}$$

En multipliant cette relation par $(x+1)$, puis en prenant (par continuité) la valeur en $x = -1$, montrer que $A = 8$.

De même montrer que $B = 1$ et $C = -8$.

(d) Résoudre alors (PC_1) en exploitant les résultats de la partie A.

3. (*) De même, résoudre (PC_2) en exploitant la transformée de Laplace.

On admet qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{C}$ tels que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, -2, \}$,

$$\frac{z^3 + z^2 + z + 2}{(z+1)(z+3)(z^2+1)} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z+3} + \frac{C}{z+i} + \frac{\overline{C}}{z-i}$$