MPSI 3 - Fermat Le 15.11.17
2017-2018

Devoir surveillé n°3
CORRECTION

Exercice 1

1. (a) $F_0 = \text{Im }(f^0) = \text{Im }(\text{id}_E)$.
Nécessairement, Im $f^0 \subset E$ car $f^0 : E \to E$.
Et réciproquement : $\forall\, x \in E$, $x = f^0(x)$, donc $x \in \text{Im } f^0$. Ainsi $E \subset \text{Im } f^0$. /1

$\boxed{\text{Donc par double inclusion : } F_0 = E}$

(b) Soit $x \in F_{n+1} = \text{Im }(f^{n+1})$.
Donc il existe $a \in E$ tel que $x = f^{n+1}(a) = f^n(f(a))$.
Ainsi $x \in \text{Im }(f^n)$ (en prenant $A = f(a)$, $x = f^n(A)$), donc $x \in F_n$. /1

$\boxed{\text{Par conséquent : } \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+1} \subset F_n.}$

2. On suppose dans cette question qu'il existe un entier p telle que $F_{p+1} = F_p$.
(a) On va démontrer le résultat par récurrence.
Posons, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_k$: « $F_{p+k} = F_p$ ».
— $F_p = F_p$, donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
— Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_k$ est vraie.
On sait déjà que $F_{p+k+1} \subset F_{p+k}$ (1.(b)), on va montrer l'inclusion réciproque.
Soit $x \in F_{p+k}$. Donc il existe $a \in E$ tel que $x = f^{p+k}(a) = f^k(f^p(a))$. /2
Or $f^p(a) \in F_p = F_{p+1}$. Donc il existe $b \in E$ tel que $f^p(a) = f^{p+1}(b)$.
Par conséquent : $x = f^k(f^{p+1}(b)) = f^{k+p+1}(b)$ et donc $x \in F_{p+k+1}$.
Donc $F_{p+k+1} = F_{p+k}$ et $F_{p+k} = F_p$, d'après $\mathcal{P}_k$.
Et donc $F_{p+k+1} = F_p$ et la proposition $\mathcal{P}_{k+1}$ est donc vérifiée.

$\boxed{\text{Ainsi, } \forall\, k \geqslant p,\ F_k = F_p.}$

(b) L'ensemble $\{k \in \mathbb{N} \mid F_{k+1} = F_k\}$ n'est pas vide, car $p \in \{k \in \mathbb{N} \mid F_{k+1} = F_k\}$.
Par ailleurs, c'est un ensemble d'entiers naturels. /1

$\boxed{\text{Donc } \{k \in \mathbb{N} \mid F_{k+1} = F_k\} \text{ admet un plus petit élément.}}$

3. On suppose dans cette question que f est injective.
(a) Soient A, B deux parties de E telles que $f(A) = f(B)$.
Soit $x \in A$. Alors $f(x) \in f(A) = f(B)$. Donc il existe $x' \in B$ tel que $f(x) = f(x')$.
Or f est injective, donc $x = x'$ et donc $x \in B$. Ainsi $A \subset B$
Par symétrie, on montre de même que $B \subset A$. /2

$\boxed{\text{si } A \text{ et } B \text{ sont deux parties de } E \text{ telles que } f(A) = f(B), \text{ alors } A = B.}$

(b) Supposons qu'il existe p tel que $F_p = F_{p+1}$.
Nous avons déjà que f est injective. Il suffit de montrer que f est surjective.
On a vu, en question 2.(b) que $\{k \in \mathbb{N} \mid F_{k+1} = F_k\}$ admet un plus petit élément, noté h.
Donc $F_{h+1} = F_h$ et, si $h \geqslant 1$, $F_h \neq F_{h-1}$. Supposons donc que $h \geqslant 1$, et soit $x \in F_{h-1}$.

$$\exists\, a \in E \text{ tel que } x = f^{h-1}(a) \Longrightarrow f(x) = f^h(a) \Longrightarrow f(x) \in F_h = F_{h+1} \Longrightarrow \exists\, b \in E \text{ tel que } f(x) = f^{h+1}(b)$$

et par injectivité de f : $x = f^h(b)$, donc $x \in F_h$.
Donc $F_{h-1} \subset F_h$. L'inclusion réciproque $F_h \subset F_{h-1}$ est démontrée en 1.(b). /2
On a donc $F_{h-1} = F_h$, et une contradiction avec l'hypothèse, donc $h = 0$.
Par conséquent $E = F_0 = F_1 = \text{Im } f$, donc f est surjective.

$\boxed{\text{s'il existe un entier } p \text{ tel que } F_{p+1} = F_p, \text{ alors } f \text{ est bijective.}}$

4. Si l'ensemble E n'est pas infini, on risque d'avoir quelques soucis...
Prenons par exemple $E = \mathbb{R}+$ et $f : x \mapsto x + 1$.
f est clairement injective ($f(x) = f(x') \Longrightarrow x + 1 = x' + 1 \Longrightarrow x = x'$).
On montre par récurrence (à faire, pour avoir vraiment tous les points mais sinon, on n'a déjà beaucoup de points...) que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = f^n(E) = [n, +\infty[$. /2

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Par exemple, avec } f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, x \mapsto x + 1, \\ \text{la suite } (F_n) = ([n, +\infty[) \text{ est strictement croissante pour l'inclusion}\end{array}}$$

Problème

A toute fonction f, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on associe la fonction :

$$\mathcal{L}_n(f) : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \int_0^n f(t)e^{-xt}\mathrm{d}t$$

Puis, lorsque $(\mathcal{L}_n(f)(x))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite on note :

$$\mathcal{L}(f) : x \mapsto \lim_{n\to\infty} \mathcal{L}_n(f) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n f(t)e^{-xt}\mathrm{d}t$$

On dit qu'une fonction f est bornée sur $\mathbb{R}_+$ si l'ensemble image $f(\mathbb{R}_+)$ est borné.
On note $\mathcal{B}$, l'ensemble des fonctions bornées sur $\mathbb{R}_+$.

A. Quelques exemples

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et $\varphi_\alpha : t \mapsto e^{-\alpha t}$.

 (a) On procède simplement au calcul (sans réfléchir particulièrement...) :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}, x > 0, \qquad \mathcal{L}_n(\varphi_\alpha)(x) = \int_0^n e^{-\alpha t}e^{-xt}\mathrm{d}t = \int_0^n e^{-(\alpha+x)t}\mathrm{d}t = \left[\frac{-1}{\alpha+x}e^{-(\alpha+nx)t}\right]_0^n$$

 car $\alpha + x > 0$, car $\alpha \geqslant 0$ et $x > 0$. /1,5

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ x > 0, \quad \mathcal{L}_n(\varphi_\alpha)(x) = \frac{1}{\alpha+x}\left(1 - e^{-(\alpha+x)n}\right)}$$

 (b) Comme $\alpha + x > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-(\alpha+x)n} = 0$. /1

$$\boxed{\text{Donc } \mathcal{L}(\varphi) \text{ existe et } \mathcal{L}(\varphi) = \frac{1}{\alpha+x}}$$

2. Soit $\omega \in \mathbb{R}_+$. On note $C : t \mapsto \cos(\omega t)$ et $S : t \mapsto \sin(\omega t)$.

 (a) On procède simplement au calcul (on peut réfléchir et exploiter les nombres complexes...) :

$$\mathcal{L}_n(C)(x) + \mathcal{L}_n(S)(x) = \int_0^n e^{i\omega t}e^{-xt}\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{i\omega - x}e^{(i\omega-x)t}\right]_0^n$$

 car $i\omega - x \neq 0$, car $x > 0$.
 Et donc en prenant la partie réelle et imaginaire :

$$\mathcal{L}_n(C)(x) + \mathcal{L}_n(S)(x) = \frac{-i\omega - x}{\omega^2 + x^2}\left(e^{(i\omega-x)n} - 1\right)$$

/2

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ x > 0, \quad \mathcal{L}_n(C)(x) = \frac{1}{\omega^2+x^2}\left(x - e^{-xn}[-x\cos(\omega n) + \omega\sin(\omega n)]\right)}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ x > 0, \quad \mathcal{L}_n(S)(x) = \frac{1}{\omega^2+x^2}\left(\omega - e^{-xm}[-x\sin(\omega n) - \omega\cos(\omega n)]\right)}$$

 (b) Là aussi, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-xn} = 0$, car $x > 0$, on a donc : /1,5

$$\boxed{\mathcal{L}(C) \text{ et } \mathcal{L}(S) \text{ existent bien et } \mathcal{L}(C) = \frac{x}{\omega^2+x^2} \text{ et } \mathcal{L}(S) = \frac{\omega}{\omega^2+x^2}}$$

3. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une application telle que $\mathcal{L}(f)$ existe.
 Soient $a > 0$ et $h : x \mapsto f(x+a)$.
 On commence par faire l'étude avec n.

$$\mathcal{L}_n(h)(x) = \int_0^n h(t)e^{-xt}\mathrm{d}t = \int_0^n f(t+a)e^{-xt}\mathrm{d}t$$

 On fait le changement de variable $u = t + a$, admissible car $t \mapsto t + a$ est bijective de classe $\mathcal{C}^1$.
 Dans ce cas $\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$ et donc /1

$$\mathcal{L}_n(h)(x) = \int_a^{n+a} f(u)e^{-x(u-a)}\mathrm{d}u = e^{xa}\int_a^{n+a} f(u)e^{-xu}\mathrm{d}u$$

car e^{xa} est indépendant de u.
Puis par relation de Chasles, comme $\int_0^{n+a} \psi(u)\mathrm{d}u = \int_0^a \psi(u)\mathrm{d}u + \int_a^{n+a} \psi(u)\mathrm{d}u$,

$$\mathcal{L}_n(h)(x) = e^{xa}\left(\int_0^{n+a} f(u)e^{-xu}\mathrm{d}u - \int_0^a f(u)e^{-xu}\mathrm{d}u\right) = e^{xa}\left(\mathcal{L}_{n+a}(f)(x) - \mathcal{L}_a(f)(x)\right)$$

On peut alors passer à la limite pour $n \to \infty$ (par addition de suite convergente). /1

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \mathcal{L}(h) \text{ existe bien et } \forall\, x > 0,\ \mathcal{L}(h)(x) = e^{xa}\big(\mathcal{L}(f)(x) - \mathcal{L}_a(f)(x)\big)}$$

B. Propriétés linéaires

1. Soit $f \in \mathcal{B}$. On souhaite montrer dans cette question que $\mathcal{L}(f)$ existe. On considère $x > 0$.

   (a) On note $f^+ : x \mapsto (f(x))^+ = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad f(x) \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad f(x) \leqslant 0 \end{cases}$ et $f^- : x \mapsto (f(x))^- = \begin{cases} -f(x) & \text{si} \quad f(x) \leqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad f(x) \geqslant 0 \end{cases}$.
   C'est un résultat du cours : $f = f^+ - f^-$. Et donc, par linéarité de l'intégrale : /1

   $$\boxed{\mathcal{L}_n(f)(x) = \mathcal{L}_n(f^+)(x) - \mathcal{L}_n(f^-)(x)}$$

   (b) Comme $0 \leqslant f^+(x) \leqslant f(x)$, alors f^+ est également bornée (comme f).
   De même pour f^-. /1

   $$\boxed{f^+ \text{ et } f^- \text{ sont également bornées sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la relation de Chasles :

   $$\mathcal{L}_{n+1}(f^+)(x) - \mathcal{L}_n(f^+)(x) = \int_n^{n+1} f^+(t)e^{-xt}\mathrm{d}t$$

   Or pour tout $t \in [n, n+1]$, $f^+(t)e^{-xt} > 0$,
   donc par croissance de l'intégrale : $\mathcal{L}_{n+1}(f^+)(x) - \mathcal{L}_n(f^+)(x) \geqslant 0$.
   De même, pour tout $t \in [n, n+1]$, $f^-(t)e^{-xt} > 0$, puis : $\mathcal{L}_{n+1}(f^-)(x) - \mathcal{L}_n(f^-)(x) \geqslant 0$. /1,5

   $$\boxed{\text{Donc les suites } \left(\mathcal{L}_n(f^+)(x)\right)_n \text{ et } \left(\mathcal{L}_n(f^-)(x)\right)_n \text{ sont croissantes.}}$$

   En outre, en notant M^+ un majorant de f^+ (bornée),

   $$0 \leqslant \int_0^n f^+(t)e^{-xt}\mathrm{d}t \leqslant M^+ \int_0^n e^{-xt}\mathrm{d}t = \frac{M^+}{x}(1 - e^{-nx}) \leqslant \frac{M^+}{x}$$

   Et de même, avec M^- un majorant de f^-, /1,5

   $$0 \leqslant \int_0^n f^-(t)e^{-xt}\mathrm{d}t \leqslant M^- \int_0^n e^{-xt}\mathrm{d}t = \frac{M^-}{x}(1 - e^{-nx}) \leqslant \frac{M^-}{x}$$

   $$\boxed{\text{Donc les suites } \left(\mathcal{L}_n(f^+)(x)\right)_n \text{ et } \left(\mathcal{L}_n(f^-)(x)\right)_n \text{ sont majorée.}}$$

   (d) Toute suite croissante majorée converge, donc $\mathcal{L}_n(f^+)(x)$ et $\mathcal{L}_n(f^-)(x)$ convergent.
   Puis par soustraction de deux suites convergentes : /1

   $$\boxed{\mathcal{L}_n(f)(x) \text{ converge également, c'est-à-dire } \mathcal{L}(f) \text{ existe bien.}}$$

   (e) La question précédente, montre que $\mathcal{L}(f)(x) = \mathcal{L}(f^+)(x) - \mathcal{L}(f^-)(x)$.
   Puis par l'encadrement donné en question (c) : $0 \leqslant \displaystyle\int_0^n f^+(t)e^{-xt}\mathrm{d}t \leqslant \frac{M^+}{x}$,
   en passant à la limite $(n \to \infty)$: $0 \leqslant \mathcal{L}(f^+)(x) \leqslant \dfrac{M^+}{x}$.
   Puis pour finir, pour $x \to +\infty$: $\mathcal{L}(f^+)(x) \longrightarrow 0$ (par encadrement).
   Et de même $0 \leqslant \mathcal{L}(f^-)(x) \leqslant \dfrac{M^-}{x}$ et pour $x \to +\infty$: $\mathcal{L}(f^-)(x) \longrightarrow 0$.
   Donc par addition /2

   $$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \mathcal{L}(f)(x) = 0}$$

2. Soient $f, g \in \mathcal{B}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
   il existe $M_1, M_2 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$, $M_1 \leqslant f(x) \leqslant M_2$.
   il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$, $N_1 \leqslant g(x) \leqslant N_2$.
   Donc pour tout $x > 0$, $\lambda M_1 + \mu N_1 \leqslant \lambda f(x) + \mu g(x) \leqslant \lambda M_2 + \mu N_2$. *\/1*

$$\boxed{\text{Donc } \lambda f + \mu g \in \mathcal{B}}$$

   Puis par linéarité de l'intégrale : *\/1,5*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \mathcal{L}_n(\lambda f + \mu g) = \int_0^n (\lambda f(t) + \mu g(t)) e^{-xt} \mathrm{d}t = \lambda \mathcal{L}_n(f)(x) + \mu \mathcal{L}_n(g)(x)$$

   Puis par limite d'une addition de suite

$$\boxed{\mathcal{L}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathcal{L}(f) + \mu \mathcal{L}(g)}$$

3. Soit f_1 et f_2 telle $\mathcal{L}(f_1) = \mathcal{L}(f_2)$.
   Alors par linéarité de $\mathcal{L}$: $\mathcal{L}(f_1 - f_2) = \mathcal{L}(f_1) - \mathcal{L}(f_2) = 0$ (la fonction nulle).
   Or par hypothèse, la fonction nulle d'admet que l'application nulle pour antécédent par $\mathcal{L}$.
   Ainsi $f_1 - f_2 = 0$, ou encore $f_1 = f_2$. *\/1,5*

$$\boxed{\text{L'application } \mathcal{L} \text{ est donc injective sur l'ensemble des fonctions bornées}}$$

C. Transformée de fonctions dérivées et de produit de convolution

1. Soit f, bornée, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et telle que f' est également bornée sur $\mathbb{R}_+$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$, $x > 0$. On effectue une intégration par parties, en considérant

$$u(t) = f(t) \qquad v(t) = -e^{-xt} \qquad \text{de classe } \mathcal{C}^1$$

\/1

$$\mathcal{L}_n(f')(x) = \int_0^n f'(t) e^{-xt} \mathrm{d}t = \left[f(t) e^{-xt}\right]_0^n + \int_0^n x f(t) e^{-xt} \mathrm{d}t = f(n) e^{-xn} - f(0) + x \mathcal{L}_n(f)(x)$$

   On peut alors faire tendre $n \to \infty$, comme $x > 0$ et f bornée : *\/1*

$$\boxed{\mathcal{L}(f')(x) = x \mathcal{L}(f)(x) - f(0)}$$

2. Démontrons le résultat par récurrence.
   Posons, pour $n \geqslant 1$, $\mathcal{H}_n$: « Si f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}_+$ et que pour tout $h \in \mathbb{N}$, $h \leqslant k$, $f^{(h)}$ est bornée, alors pour tout $x > 0$, $\mathcal{L}(f^{(k)})(x) = x^n \mathcal{L}(f)(x) - \sum_{h=0}^{k-1} x^h f^{(k-1-h)}(0)$ » *\/1,5*

   — Le cas $\mathcal{H}_1$ correspond à la question précédente. *\/0,5*
   — Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{H}_k$ est vraie.
     Soit f de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur $\mathbb{R}_+$ et tel que pour tout $h \in \mathbb{N}$, $h \leqslant k+1$, $f^{(h)}$ est bornée.
     Comme f^k est de classe $\mathcal{C}^1$ et que f^k et f^{k+1} sont bornés, on a donc (d'après la question précédente) : *\/0,5*

$$\mathcal{L}(f^{(k+1)})(x) = x \mathcal{L}(f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)$$

     Puis, on applique $\mathcal{H}_k$ à f, qui est (aussi) de classe $\mathcal{C}^p$ avec toutes les dérivées bornées.

$$\mathcal{L}(f^{(k)})(x) = x^n \mathcal{L}(f)(x) - \sum_{h=0}^{k-1} x^h f^{(k-1-h)}(0)$$

     Donc

$$\mathcal{L}(f^{(k+1)})(x) = x \left(x^n \mathcal{L}(f)(x) - \sum_{h=0}^{k-1} x^h f^{(k-1-h)}(0) \right) - f^{(k)}(0)$$

$$= x^{n+1} \mathcal{L}(f)(x) - \sum_{h=0}^{k-1} x^{h+1} f^{(k-1-h)}(0) - x^0 f^{(k-0)}(0)$$

     On fait le changement de variable $i = h+1$ dans la somme : *\/1,5*

$$\mathcal{L}(f^{(k+1)})(x) = x^{n+1} \mathcal{L}(f)(x) - \sum_{i=1}^{k} x^i f^{((k+1)-1-i)}(0) - x^0 f^{((k+1)-1)}(0) = x^{n+1} \mathcal{L}(f)(x) - \sum_{i=0}^{k} x^i f^{((k+1)-1-i)}(0)$$

     Donc $\mathcal{H}_{k+1}$ est vraie.

La récurrence est démontrée :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*, \text{ si } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^k \text{ sur } \mathbb{R}_+ \text{ et que pour tout } h \in \mathbb{N},\ h \leqslant k,\ f^{(h)} \text{ est bornée.}\\ \text{Alors pour tout } x > 0,\ \mathcal{L}(f^{(k)})(x) = x^n \mathcal{L}(f)(x) - \displaystyle\sum_{h=0}^{k-1} x^h f^{(k-1-h)}(0)\end{array}}$$

3. Soient $f, g \in \mathcal{B}$. On considère $h : t \mapsto \displaystyle\int_0^t f(t-x)g(x)\mathrm{d}x$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, et $x > 0$

$$\mathcal{L}_n(h)(x) = \int_0^n h(t)e^{-xt}\mathrm{d}t = \int_0^n \left(\int_0^t f(t-u)g(u)\mathrm{d}u\right) e^{-xt}\mathrm{d}t$$

Or, comme pour les sommes doubles, lorsque u varie de 0 à t et t de 0 à n,
c'est que l'on intègre sur la condition : $0 \leqslant u \leqslant t \leqslant n$;
ou encore comme si t variait de u à n et u de 0 à n. */2*

$$\mathcal{L}_n(h)(x) = \int_0^n \left(\int_u^n f(t-u)e^{-xt}\mathrm{d}t\right) g(u)\mathrm{d}u$$

Puis, on fait le changement de variable de t à $v = t - u$, donc $\mathrm{d}t = \mathrm{d}v$ et $e^{-xt} = e^{-x(u+v)}$. */1*

$$\mathcal{L}_n(h)(x) = \int_0^n \left(e^{-xu}\int_0^{n-u} f(v)e^{-xv}\mathrm{d}v\right) g(u)\mathrm{d}u$$

$$\mathcal{L}_n(h)(x) = \int_0^n \left(e^{-xu}\left(\int_0^n f(v)e^{-xv}\mathrm{d}v - \int_{n-u}^n f(v)e^{-xv}\mathrm{d}v\right)\right) g(u)\mathrm{d}u$$

$$\mathcal{L}_n(h)(x) = \int_0^n \left(e^{-xu}\int_0^n f(v)e^{-xv}\mathrm{d}v\right) g(u)\mathrm{d}u - \int_0^n \left(e^{-xu}\int_{n-u}^n f(v)e^{-xv}\mathrm{d}v\right) g(u)\mathrm{d}u$$

$$\mathcal{L}_n(h)(x) = \int_0^n e^{-xu}g(u)\mathrm{d}u \times \int_0^n f(v)e^{-xv}\mathrm{d}v - \int_0^n \left(e^{-xu}\int_{n-u}^n f(v)e^{-xv}\mathrm{d}v\right) g(u)\mathrm{d}u$$

$$\mathcal{L}_n(h)(x) = \mathcal{L}_n(g) \times \mathcal{L}_n(f) - \int_0^n \left(e^{-xu}\int_{n-u}^n f(v)e^{-xv}\mathrm{d}v\right) g(u)\mathrm{d}u$$

Il reste à passer à la limite en montrant que $\displaystyle\int_0^n \left(e^{-xu}\int_{n-u}^n f(v)e^{-xv}\mathrm{d}v\right) g(u)\mathrm{d}u \longrightarrow 0$. */1,5*
Comme f est bornée entre M_1 et M_2 :

$$\int_{n-u}^n M_1 e^{-xv}\mathrm{d}v \leqslant \int_{n-u}^n f(v)e^{-xv}\mathrm{d}v \leqslant \int_{n-u}^n M_2 e^{-xv}\mathrm{d}v$$

On intègre :

$$\frac{M_1}{x}\left(e^{-xn} - e^{-x(n-u)}\right) \leqslant \int_{n-u}^n f(v)e^{-xv}\mathrm{d}v \leqslant \frac{M_2}{x}\left(e^{-xn} - e^{-x(n-u)}\right)$$

Puis comme g est bornée entre M_3 et M_4 :

$$\frac{M_1M_3}{x}e^{-xu}\left(e^{-xn} - e^{-x(n-u)}\right) \leqslant e^{-xu}\int_{n-u}^n f(v)e^{-xv}\mathrm{d}v g(u) \leqslant \frac{M_2M_4}{x}e^{-xu}\left(e^{-xn} - e^{-x(n-u)}\right)$$

$$\frac{M_1M_3}{x}\left(e^{-xn-xu} - e^{-xn}\right) \leqslant e^{-xu}\int_{n-u}^n f(v)e^{-xv}\mathrm{d}v g(u) \leqslant \frac{M_2M_4}{x}\left(e^{-xn-xu} - e^{-xn}\right)$$

Puis on intègre entre 0 et n pour la variable u :

$$\frac{M_1M_3}{x}\left(\frac{e^{-xn}}{x}[1 - e^{-xn}] - ne^{-xn}\right) \leqslant \int_0^n e^{-xu}\int_{n-u}^n f(v)e^{-xv}\mathrm{d}v g(u)\mathrm{d}u \leqslant \frac{M_2M_4}{x}\left(\frac{e^{-xn}}{x}[1 - e^{-xn}] - ne^{-xn}\right)$$

Et comme $x > 0$, pour $n \to \infty$: $\left(\dfrac{e^{-xn}}{x}[1 - e^{-xn}] - ne^{-xn}\right) \longrightarrow 0$.
Ainsi par addition de limites : */1,5*

$$\boxed{\mathcal{L}(h) \text{ existe et } \mathcal{L}(h) = \mathcal{L}(f) \times \mathcal{L}(g)}$$

D. Application à la résolution d'équations différentielles

On considère les deux problèmes de Cauchy

$$(PC_1) : y'' + 3y' + 2y = 2e^{-\frac{3}{2}t} \qquad y(0) = 1, y'(0) = 2$$

$$(PC_2) : y'' + 4y' + 3y = \sin t, \qquad y(0) = 1, y'(0) = -3$$

1. (a) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
L'équation caractéristique associée est $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$.
Donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène est $\{t \mapsto Ae^{-t} + Be^{-2t}, A, B \in \mathbb{R}\}$. */1*
Comme $\frac{3}{2}$ n'est pas solution de l'équation caractéristique, on peut chercher une solution particulière de la forme $t \mapsto Ce^{-\frac{3}{2}t}$.
Elle vérifie alors :

$$\forall\, t \geqslant 0, (\frac{9}{4} - 3 \times \frac{3}{2} + 2)Ce^{-\frac{3}{2}t} = 2e^{-\frac{3}{2}t} \Longrightarrow C = -8$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation $y'' + 3y' + 2y = 2e^{-\frac{3}{2}t}$ est $\{t \mapsto Ae^{-t} + Be^{-2t} - 8e^{-\frac{3}{2}t}, A, B \in \mathbb{R}\}$. */1,5*
On cherche maintenant la solution de la forme $t \mapsto Ae^{-t} + Be^{-2t} - 8e^{-\frac{3}{2}t}$ qui vérifie les conditions de Cauchy : $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.
Nécessairement :

$$\left\{\begin{array}{rcl} A + B - 8 & = & 1 \\ -A - 2B + 12 & = & 2 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A = 8 \\ B = 1 \end{array}\right.$$

Pas besoin de faire réciproque, un problème de Cauchy admet toujours une unique solution. */1,5*

$$\boxed{\text{La solution de } (PC_1) \text{ est } t \mapsto 8e^{-t} + 1e^{-2t} - 8e^{-\frac{3}{2}t}.}$$

(b) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
L'équation caractéristique associée est $x^2 + 4x + 3 = (x+1)(x+3)$.
Donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène est $\{t \mapsto Ae^{-t} + Be^{-3t}, A, B \in \mathbb{R}\}$. */1*
Comme i n'est pas solution de l'équation caractéristique, on peut chercher une solution particulière de la forme $t \mapsto C\cos(t) + D\sin(t)$.
Elle vérifie alors :

$$\forall\, t \geqslant 0, (-C+4D+3C)\cos t + (-D-4C+3D)\sin t = \sin t \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2C + 4D & = & 0 \\ -4C + 2D & = & 1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} C = -\frac{1}{5} \\ D = \frac{1}{10} \end{array}\right.$$

(car on peut identifier - l'égalité est vraie pour tout $t \geqslant 0$).
Donc l'ensemble des solutions de l'équation $y'' + 4y' + 3y = \sin t$ est $\{t \mapsto Ae^{-t} + Be^{-3t} + \frac{1}{10}(\sin t - 2\cos t), A, B \in \mathbb{R}\}$. */1,5*
On cherche maintenant la solution de la forme $t \mapsto Ae^{-t} + Be^{-3t} + \frac{1}{10}(\sin t - 2\cos t)$ qui vérifie les conditions de Cauchy : $y(0) = 1$, $y'(0) = -3$.
Nécessairement :

$$\left\{\begin{array}{rcl} A + B - \frac{1}{5} & = & 1 \\ -A - 3B + \frac{1}{10} & = & -3 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A = \frac{1}{4} \\ B = \frac{19}{20} \end{array}\right.$$

Pas besoin de faire réciproque, un problème de Cauchy admet toujours une unique solution. */1,5*

$$\boxed{\text{La solution de } (PC_2) \text{ est } t \mapsto \tfrac{1}{4}e^{-t} + \tfrac{19}{20}e^{-3t} + \tfrac{1}{10}(\sin t - 2\cos t).}$$

2. On cherche à résoudre ces problèmes de Cauchy en exploitant la transformée de Laplace.

(a) On considère donc f_1 la solution de (PC_1).
Par linéarité et d'après la relation vue en partie C :

$$\mathcal{L}(f_1''+3f_1'+2f_1)(x) = \mathcal{L}(f_1'')(x)+3\mathcal{L}(f_1')(x)+2\mathcal{L}(f_1)(x) = x^2\mathcal{L}(f_1)-xf_1(0)-f_1'(0)+3x\mathcal{L}(f_1)(x)-3f_1(0)+2\mathcal{L}(f_1)$$

$$= (x^2 + 3x + 2)\mathcal{L}(f_1)(x) - x - 5$$

d'après les valeurs de $f_1(0) = 1$ et $f_1'(0) = 2$. Et comme f_1 est solution de (PC_1) (avec les notations de la première partie) :

$$\mathcal{L}(f_1'' + 3f_1' + 2f_1)(x) = \mathcal{L}(2\varphi_{\frac{3}{2}})(x) = \frac{2}{\frac{3}{2} + x}$$

/2

$$\boxed{\text{Bilan : } \mathcal{L}(f_1'' + 3f_1' + 2f_1)(x) = (x^2 + 3x + 2)\mathcal{L}(f_1) - x - 5 = \frac{2}{\frac{3}{2} + x}}.$$

(b) On a donc

$$(x+1)(x+2)\mathcal{L}(f_1)(x) = x+5+\frac{2}{\frac{3}{2}+x} = \frac{x^2+\frac{13}{2}x+\frac{19}{2}}{x+\frac{3}{2}}$$

Et ainsi /1

$$\boxed{\forall\, x\in\mathbb{R}_+^*,\qquad \mathcal{L}(f_1) = \frac{x^2+\frac{13}{2}x+\frac{19}{2}}{(x+1)(x+2)(x+\frac{3}{2})}}$$

(c) On admet qu'il existe $A, B, C \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{-1,-2,-\frac{3}{2}\}$,

$$\frac{x^2+\frac{13}{2}x+\frac{19}{2}}{(x+1)(x+2)(x+\frac{3}{2})} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x+\frac{3}{2}}$$

En multipliant cette relation par $(x+1)$, on obtient :

$$\forall\, x\in\mathbb{R}_+^*\setminus\left\{-1,-2,-\frac{3}{2}\right\},\qquad \frac{x^2+\frac{13}{2}x+\frac{19}{2}}{(x+2)(x+\frac{3}{2})} = A+\frac{B(x+1)}{x+2}+\frac{C(x+1)}{x+\frac{3}{2}}$$

Puis en prenant (par continuité) la valeur en $x=-1$, /1

$$\frac{1-\frac{13}{2}+\frac{19}{2}}{1\times\frac{1}{2}} = A+0+0 \Longleftrightarrow A=8$$

De même, en multipliant la relation initiale par $(x+2)$, on obtient :

$$\forall\, x\in\mathbb{R}_+^*\setminus\left\{-1,-2,-\frac{3}{2}\right\},\qquad \frac{x^2+\frac{13}{2}x+\frac{19}{2}}{(x+1)(x+\frac{3}{2})} = \frac{A(x+2)}{x+1}+B+\frac{C(x+2)}{x+\frac{3}{2}}$$

Puis en prenant (par continuité) la valeur en $x=-2$, /1

$$\frac{4-13+\frac{19}{2}}{(-1)\times(\frac{-1}{2})} = 0+B+0 \Longleftrightarrow B=1$$

Et enfin, en multipliant la relation initiale par $(x+\frac{3}{2})$, on obtient :

$$\forall\, x\in\mathbb{R}_+^*\setminus\left\{-1,-2,-\frac{3}{2}\right\},\qquad \frac{x^2+\frac{13}{2}x+\frac{19}{2}}{(x+1)(x+2)} = \frac{A(x+\frac{3}{2})}{x+1}+\frac{B(x+\frac{3}{2})}{x+2}+C$$

Puis en prenant (par continuité) la valeur en $x=-\frac{3}{2}$, /1

$$\frac{\frac{9}{4}-\frac{39}{4}+\frac{19}{2}}{(\frac{-1}{2})\times(\frac{1}{2})} = C \Longleftrightarrow C=-8$$

$$\boxed{\text{On a bien } A=8,\ B=1 \text{ et } C=-8.}$$

(d) On a donc $\mathcal{L}(f_1) = \dfrac{8}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{8}{x+\frac{3}{2}}$

En prenant le résultat trouvé en première question (et la linéarité) :

$$\frac{8}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{8}{x+\frac{3}{2}} = 8\mathcal{L}(\varphi_1)+\mathcal{L}(\varphi_2)+8\mathcal{L}(\varphi_{\frac{3}{2}}) = \mathcal{L}(8\varphi_1+\varphi_2-8\varphi_{\frac{3}{2}})$$

Puis par injectivité de $\mathcal{L}$, on peut affirmer /2

$$\boxed{f_1 = 8\varphi_1+\varphi_2-8\varphi_{\frac{3}{2}}}$$

3. On applique la même méthode On considère donc f_2 la solution de (PC_2).
Par linéarité et d'après la relation vue en partie C :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f_2''+4f_2'+3f_2)(x) &= x^2\mathcal{L}(f_2)-xf_2(0)-f_2'(0)+4x\mathcal{L}(f_2)(x)-4f_2(0)+3\mathcal{L}(f_1)\\ &= (x^2+4x+3)\mathcal{L}(f_2)(x)-x-1\end{aligned}$$

d'après les valeurs de $f_2(0)=1$ et $f_2'(0)=-3$. Et comme f_2 est solution de (PC_2) (avec les notations de la première partie et $\omega=1$) :

$$\mathcal{L}(f_2''+4f_2'+3f_2)(x) = \mathcal{L}(S)(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

4. On a donc
$$(x+1)(x+3)\mathcal{L}(f_2)(x) = x+1+\frac{1}{1+x^2} = \frac{x^3+x^2+x+2}{1+x^2}$$
Et ainsi
$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \mathcal{L}(f_2) = \frac{x^3+x^2+x+2}{(x+1)(x+3)(x^2+1)}$$
On admet qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{C}$ tels que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, -2, \}$,
$$\frac{z^3+z^2+z+2}{(z+1)(z+3)(z^2+1)} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z+3} + \frac{C}{z+i} + \frac{\overline{C}}{z-i}$$
En multipliant cette relation par $(z+1)$, on obtient :
$$\frac{z^3+z^2+z+2}{(z+3)(z^2+1)} = A + \frac{B(z+1)}{z+3} + \frac{C(z+1)}{z+i} + \frac{\overline{C}(z+1)}{z-i}$$
Puis en prenant (par continuité) la valeur en $z=-1$,
$$\frac{1}{(-2)\times 2} = A+0+0+0 \Longleftrightarrow A = \frac{1}{4}$$
En multipliant cette relation par $(z+3)$, on obtient :
$$\frac{z^3+z^2+z+2}{(z+1)(z^2+1)} = \frac{A(z+3)}{z+1} + B + \frac{C(z+3)}{z+i} + \frac{\overline{C}(z+3)}{z-i}$$
Puis en prenant (par continuité) la valeur en $z=-3$,
$$\frac{-27+9-3+2}{(-2)\times 10} = 0+B+0+0 \Longleftrightarrow B = \frac{-19}{20}$$
En multipliant cette relation par $(z+i)$, on obtient :
$$\frac{z^3+z^2+z+2}{(z+1)(z+3)(z-i)} = \frac{A(z+i)}{z+1} + \frac{B(z+i)}{z+3} + C + \frac{\overline{C}(z+i)}{z-i}$$
Puis en prenant (par continuité) la valeur en $z=-i$,
$$\frac{i-1-i+2}{(1-i)(3-i)(-2i)} = 0+0+C+0 \Longleftrightarrow C = \frac{1}{-8-4i} = \frac{2-i}{-20} = \frac{-2+i}{20}$$
On a donc $\mathcal{L}(f_2) = \dfrac{\frac{1}{4}}{x+1} + \dfrac{\frac{-19}{20}}{x+3} + 2\mathrm{Re}\left(\dfrac{-2+i}{20}\dfrac{1}{x+i}\right)$.
Or $2\mathrm{Re}\left(\dfrac{-2+i}{20}\dfrac{1}{x+i}\right) = \dfrac{\mathrm{Re}\big((-2+i)(x-i)\big)}{10(x^2+1)} = \dfrac{-2x+1}{10(x^2+1)}$
En prenant le résultat trouvé en première question (et la linéarité et $\omega = 1$) :
$$\frac{\frac{1}{4}}{x+1} + \frac{\frac{19}{20}}{x+3} + \frac{-2x+1}{10(x^2+1)} = \mathcal{L}\Big(\frac{1}{4}\varphi_1 + \frac{19}{20}\varphi_3 - \frac{2}{10}C + \frac{1}{10}S\Big)$$
Puis par injectivité de $\mathcal{L}$, on peut affirmer *(/10)*
$$\boxed{f_2 = \frac{1}{4}\varphi_1 + \frac{19}{20}\varphi_3 - \frac{1}{5}C + \frac{1}{10}S}$$