Devoir à la maison n°5

La notation tiendra particulièrement compte de la **qualité de la rédaction**, la **précision des raisonnements** et l'**énoncé des formules utilisées**.

Exercice 1

On pose, pour $n \geq 1$, $u_n = \sqrt{n + \sqrt{n-1} + \dots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}$.

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
2. Montrer que $(u_n) \rightarrow +\infty$
3. Exprimer u_{n+1} en fonction de (u_n) .
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq n$
5. Montrer que $\lim \frac{u_n}{n} = 0$ (noté comme au DS 4 : $u_n = o(n)$)

Exercice 2

Le but de cet exercice est de démontrer le lemme des pics (ou du soleil levant)

Théorème 1 *Lemme des pics*

Soit (u_n) une suite numérique, bornée.

Alors (u_n) admet une suite extraite croissante ou une suite extraite décroissante

1. Donner une suite numérique qui admet (au moins) une suite extraite croissante et (au moins) une suite extraite décroissante et qui ne converge pas.
2. On considère une suite (u_n) bornée.
On note $P = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall m \geq n, u_n \leq u_m\}$
 - (a) On suppose que P est infini. Montrer qu'on peut extraire de (u_n) une suite croissante.
 - (b) On suppose que P est fini. Montrer qu'on peut extraire de (u_n) une suite décroissante.
 - (c) Conclure
3. Quelles hypothèses sur $\mathbb{R}$ ont été nécessaires pour démontrer le lemme de pics ?
Peut-on l'appliquer pour des suites définies sur d'autres ensembles : $\mathbb{Q}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{C}$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? Et sur l'ensemble $\mathcal{P}(E)$, des parties de E pour la relation d'inclusion ?
4. Application. Donner une nouvelle démonstration du théorème de Bolzano-Weierstrass.

Exercice 3

Le but de cet exercice est de démontrer le théorème de Heine-Borel,

Théorème 2 *Heine-Borel*

Soit $[a, b]$ un segment fermé de $\mathbb{R}$ et I un ensemble tel que

$$[a, b] \subset \bigcup_{i \in I} F_i$$

où pour tout $i \in I$, F_i est de la forme $]a_i, b_i[$.

On dit que $[a, b]$ peut s'écrire sous la forme d'un recouvrement d'intervalles ouverts.

Alors il existe $J \subset I$, **fini** tel que $[a, b] \subset \bigcup_{i \in J} F_i$.

On considère donc un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ et une famille $(F_i)_{i \in I}$ d'intervalles ouverts tel que $[a, b] \subset \bigcup_{i \in I} F_i$.

On supposera que pour tout $i \in I$, $F_i =]a_i, b_i[$.

1. Rappeler le lemme de Cousin appliqué à $[a, b]$.
2. Soit $x \in [a, b]$, montrer qu'il existe $\delta(x) > 0$ tel que

$$\exists i(x) \in I \text{ tel que } \left[x - \frac{\delta(x)}{2}, x + \frac{\delta(x)}{2} \right] \subset F_{i(x)}$$

3. Appliquer le lemme de Cousin et conclure