Devoir à la maison n°5
CORRECTION

La notation tiendra particuliérement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

Exercice - Oral Mines-Telecom MP2016

On pose, pour $n \geqslant 1$, $u_n = \sqrt{n + \sqrt{n-1} + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}$.

1. On a
$$\boxed{u_1 = 1, \quad u_2 = \sqrt{3} \quad u_3 = \sqrt{3+\sqrt{3}}}$$

2. Soit $A > 0$, notons $N = \lfloor A^2 \rfloor + 1$.
Alors pour tout $n \geqslant N$, et pour tout $a > 0$, $\sqrt{n+a} \geqslant \sqrt{n} \geqslant \sqrt{N} \geqslant A$.
et ainsi, pour tout $n \geqslant N$, $u_n = \sqrt{n+a}$ avec $a = \sqrt{n-1+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{1}}} > 0$, donc $u_n \geqslant A$.
Par application de la définition :
$$\boxed{\lim(u_n) = +\infty}$$

3. On a donc, pour $n \geqslant 1$,
$$u_{n+1}^2 = n + 1 + \sqrt{n + \sqrt{n-1} + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}} = (n+1) + u_n$$
$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{n+1+u_n}}$$

4. On peut démontrer ce résultat par récurrence.
   — Il est vraie pour $n = 1$: $u_1 = 1$, donc $u_1 \leqslant 1$.
   — Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$. Supposons que $u_n \leqslant n$.
   Par croissance de $t \mapsto \sqrt{t}$,
$$u_{n+1} = \sqrt{n+1+u_n} \leqslant \sqrt{n+1+n} = \sqrt{2n+1}$$
   Or
$$2n+1 \leqslant (n+1)^2 \Longleftrightarrow n^2 \geqslant 0$$
   Ceci étant toujours vrai :
$$u_{n+1} \leqslant \sqrt{2n+1} \leqslant \sqrt{(n+1)^2} = n+1$$
   La récurrence est démontée :
$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant n.}$$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et $n \geqslant 2$
$$0 \leqslant \frac{u_n}{n} = \frac{\sqrt{n+u_{n-1}}}{n} \leqslant \frac{\sqrt{n+n-1}}{n} = \sqrt{\frac{2n-1}{n^2}}$$
Or par comparaison : $\dfrac{2n-1}{n^2} \to 0$ et par composition avec $t \mapsto \sqrt{t}$, $\sqrt{\dfrac{2n-1}{n^2}} \to 0$.
Enfin, en exploitant le théorème de convergence par encadrement :
$$\boxed{\lim \frac{u_n}{n} = 0}$$

Dans le sujet initial, on demandait ensuite de calculer un équivalent de (u_n)... nous ne pouvons pas encore le faire.

Exercice 2

Le but de cet exercice est de démontrer le lemme des pics (ou du soleil levant)

Théoreme 1 *Lemme des pics*
Soit (u_n) une suite numérique, bornée.
Alors (u_n) admet une suite extraite croissante ou une suite extraite décroissante

1. La suite (u_n) définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = 2 + \frac{1}{n}$ et $u_{2n+1} = 1 - \frac{1}{n}$ vérifie :
   — (u_{2n}) est décroissante car $u_{2(n+1)} - u_{2n} = u_{2n+2} - u_{2n} = 2 + \frac{1}{n+1} - 2 - \frac{1}{n} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$
   — (u_{2n+1}) est décroissante car $u_{2(n+1)+1} - u_{2n+1} = u_{2n+3} - u_{2n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} - 1 + \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n+1)} > 0$
   (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont bien deux suites extraites de (u_n).

   $$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ définie par : } \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{2n} = 2 + \tfrac{1}{n} \text{ et } u_{2n+1} = 1 - \tfrac{1}{n} \text{ vérifie les conditions recherchées}}$$

2. On considère une suite (u_n) bornée.
   On note $P = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall\, m \geqslant n, u_n \leqslant u_m\}$
   (a) On suppose que P est infini.
   $P \subset \mathbb{N}$, donc P est énumérable : on peut écrire $P = \{n_1, n_2, \dots n_p \dots\}$ où pour tout $i \in \mathbb{N}$, $n_i < n_{i+1}$.
   On note $\varphi : i \mapsto n_i$. Alors $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, strictement croissante. Par définition de P, $u_{n_{i+1}} = u_{\varphi(i+1)} \geqslant u_{n_i} = u_{\varphi(i)}$.

   $$\boxed{\text{Ainsi } (u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite extraite, strictement croissante de } (u_n).}$$

   (b) On suppose que P est fini.
   Notons $M = \max P$. Alors pour tout $n > M$, $\exists\, n' \geqslant n$ tel que $u_{n'} < u_n$.
   Nous allons donc construire une suite décroissante, par récurrence. On prend $\varphi(1) = M + 1$.
   Supposons qu'on ait construit $\varphi(1)$, $\varphi(2)\dots\varphi(n)$, avec $\forall\, i < j \leqslant n$, $\varphi(i) < \varphi(j)$,
   Comme $\varphi(n) > \varphi(1) = M + 1$, alors $\varphi(n) \notin P$.
   Donc il existe $m > \varphi(n)$ tel que $u_m < u_{\varphi(n)}$ (sinon $\varphi(n) \in P$).
   $\{m \geqslant \varphi(n) \mid u_m < u_{\varphi(n)}\}$ est donc non vide, minorée.
   Notons alors $\varphi(n+1) = \min\{m \geqslant \varphi(n) \mid u_m < u_{\varphi(n)}\}$.
   On construit ainsi une fonction φ strictement décroissante sur $\mathbb{N}$,
   et $(u_{\varphi(n)})$ est décroissante.

   $$\boxed{\text{Ainsi } (u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite extraite, strictement décroissante de } (u_n).}$$

   (c) Comme P est nécessairement fini ou infini,

   $$\boxed{\text{le lemme de pics découle des deux questions précédentes.}}$$

   A noter que le « ou »n'est pas exclusif.

3. Seul la relation d'ordre total est nécessaire. Les ensembles $\mathbb{Q}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Z}$ admettent une relation d'ordre total.
   Donc le lemme des pics existe également pour ces ensembles.
   Dans $\mathbb{C}$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la notion de suites croissantes n'a pas de sens.
   Sur l'ensemble $\mathcal{P}(E)$, des parties de E, la relation d'inclusion n'est pas totale ; la démonstration telle que nous l'avons faite ne peut pas s'adapter.

4. Application. Soit (u_n) une suite bornée.
   Alors il existe φ strictement croissante tel que $u_{\varphi(n)}$ est croissante ou décroissante.
   Or $(u_{\varphi(n)})$ est bornée, également, elle est donc convergente.
   Ainsi,

   $$\boxed{(u_n) \text{ admet une suite extraite convergente. C'est le théorème de Bolzano-Weierstrass.}}$$

Exercice 3

Le but de cet exercice est de démontrer le théorème de Heine-Borel,

Théoreme 2 *Heine-Borel*
Soit $[a,b]$ un segment fermé de $\mathbb{R}$ et I un ensemble tel que

$$[a,b] = \bigcup_{i\in I} F_i$$

où pour tout $i \in I$, F_i est de la forme $]a_i, b_i[$.
On dit que $[a,b]$ peut s'écrire sous la forme d'un recouvrement d'intervalles ouverts.
*Alors il existe $J \subset I$, **fini** tel que $[a,b] = \bigcup_{i\in I} F_i$.*

On considère donc un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ et une famille $(F_i)_{i\in I}$ d'intervalles ouverts tel que $[a,b] \bigcup_{i\in I} F_i$.
On supposera que pour tout $i \in I$, $F_i =]a_i, b_i[$.

1. Le lemme de Cousin énonce :

   $$\boxed{\begin{array}{c}\text{Pour toute jauge } \delta > 0 \text{ définie sur } [a,b], \text{ il existe une subdivision pointée de } [a,b],\\ \mathcal{P} = \big(([x_0,x_1],t_1),([x_1,x_2],t_2),\dots([x_{n-1},x_n],t_n)\big) \text{ adaptée à } \delta.\end{array}}$$

2. Soit $x \in [a,b]$, alors comme $[a,b]$ est recouverte par les ouverts F_i, il existe (ou moins) un ouvert $F_i =]a_i, b_i[$ tel que $x \in F_i$.
   On a donc $a_i < x < b_i$. Notons $\delta(x) = \min(b_i - x, x - a_i)$. Alors $\delta(x) > 0$ Alors $b_i - x \geqslant \delta(x)$, donc $x + \delta(x) \leqslant b_i$ et donc $x < x + \frac{\delta(x)}{2} < b_i$.
   De même $x - a_i \geqslant \delta(x)$, donc $a_i \leqslant x - \delta(x)$ et donc $a_i < x - \frac{\delta(x)}{2} < x$.
   Et finalement $\left[x - \frac{\delta(x)}{2}, x + \frac{\delta(x)}{2}\right] \subset]a_i, b_i[= F_i$

   $$\boxed{\text{Pour tout } x \in [a,b], \text{ il existe } \delta(x) > 0 \text{ et il existe } i(x) \in I \text{ tel que } \left[x - \tfrac{\delta(x)}{2}, x + \tfrac{\delta(x)}{2}\right] \subset F_{i(x)}}$$

3. On a ainsi créé une application : $\delta : [a,b] \to \mathbb{R}_+^*, x \mapsto \delta(x)$.
   C'est une jauge définie sur $]a,b[$, on peut appliquer le lemme de Cousin :
   il existe une subdivision pointée $\mathcal{P} = \big(([x_0,x_1],t_1),([x_1,x_2],t_2),\dots([x_{n-1},x_n],t_n)\big)$ δ-fine
   Or par définition, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, : $[x_{j-1}, x_j] \subset [t_j - \dfrac{\delta(t_j)}{2}, t_j + \dfrac{\delta(t_j)}{2}] \subset F_{i(t_j)}$ Et donc $[a,b] \subset \displaystyle\bigcup_{j=1}^{n} [x_{j-1}, x_j] \subset \bigcup_{j=1}^{n} F_{i(t_j)}$.
   Ainsi on peut extraire de $(F_i)_{i\in I}$ un recouvrement de $[a,b]$ en un nombre fini d'ouverts.

$$\boxed{\text{Le théorème de Heine-Borel est ainsi démontré}}$$