

Devoir à la maison n°3 CORRECTION

Problème

A. Définitions

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Pour tout $a \in I$, on définit $\Delta_a : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

☀️ A la première lecture...

🌀 On va procéder par double implication. Le raisonnement par équivalence direct est possible, mais pour le moment un peu trop subtil...

Supposons que, pour tout $a \in I$, Δ_a est croissante.

Soient $x, y \in I$ et $\lambda \in [0, 1]$.

On peut supposer, sans perte de généralité que $x \leq y$.

Dans ce cas, $\lambda x \leq \lambda y$ et donc $\lambda x + (1 - \lambda)y \leq ((\lambda + 1 - \lambda)y = y$.

De même : $x \leq \lambda x + (1 - \lambda)y$. Ainsi : $a = \lambda x + (1 - \lambda)y \in I$

Et l'on a $x - a = \lambda x + (1 - \lambda)x - \lambda x - (1 - \lambda)y = (1 - \lambda)(x - y)$, de même : $y - a = \lambda(y - x)$.

Δ_a est croissante, donc $\Delta_a(x) \leq \Delta_a(y)$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(y) - f(a)}{y - a} \iff \frac{f(a) - f(x)}{(1 - \lambda)(y - x)} = \frac{f(x) - f(a)}{(1 - \lambda)(x - y)} \leq \frac{f(y) - f(a)}{\lambda(y - x)}$$

On peut diviser par $y - x > 0$, et multiplier par $\lambda(1 - \lambda) > 0$ donc

$$\lambda(f(a) - f(x)) \leq (1 - \lambda)(f(y) - f(a)) \iff f(a) = (\lambda + 1 - \lambda)f(a) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Réciproquement, supposons que $\forall x, y \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$.

Soit $a \in I$ et $x, y \in I$. On peut supposer que $x < y$ (le cas $x = y$ est sans intérêt).

On a trois options possibles : $x \leq a \leq y$, $a \leq x \leq y$ ou $x \leq y \leq a$.

Nous allons faire l'étude des deux premiers cas, le troisième est un peu comme le second.

Inspiré par le sens direct, on cherche λ de sorte que $a = \lambda x + (1 - \lambda)y$;

considérons donc $\lambda = \frac{y - a}{y - x}$, alors comme $a \geq x$, $\lambda \leq 1$ et comme $a \leq y$, $\lambda \geq 0$.

enfin une simple manipulation littérale donne $\lambda x + (1 - \lambda)y = a$.

Et par conséquent :

$$f(a) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \iff \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(y) - f(a)}{y - a}$$

Dans le cas $a \leq x \leq y$, on prend $\mu = \frac{y - x}{y - a}$, de sorte que $\mu \in [0, 1]$ et $x = \mu a + (1 - \mu)y$.

On a donc $f(x) = f(\mu a + (1 - \mu)y) \leq \mu f(a) + (1 - \mu)f(y)$

Or $\mu = \frac{y - x}{y - a}$ et $1 - \mu = \frac{x - a}{y - a}$, donc $f(x) \leq \frac{y - x}{y - a}f(a) + \frac{x - a}{y - a}f(y)$.

En multipliant par $y - a > 0$: $(y - a)f(x) \leq (y - x)f(a) + (x - a)f(y)$.

Enfin, on soustrait de part et d'autre : $(y - a)f(a)$:

$$(y - a)(f(x) - f(a)) \leq (a - x)f(a) + (x - a)f(y) = (x - a)(f(y) - f(a)).$$

Pour finir, on divise par $(y - a)(x - a) > 0$: $\Delta_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(y) - f(a)}{y - a} = \Delta_a(y)$.

On fait le même raisonnement avec $\nu = \frac{a - y}{a - x}$ dans le cas $x \leq y \leq a$.

Ainsi par double implication, on a l'équivalence :

$$\boxed{\forall a \in I, \Delta_a \text{ est croissante} \iff \forall x, y \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)}$$

2. En remplaçant les inégalités précédentes par des égalités, on aurait l'équivalence :

$$\boxed{\forall a \in I, \Delta_a \text{ est strictement croissante} \iff \forall x \neq y \in I^2, \forall \lambda \in]0, 1[, f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)}$$

On dit que f est **convexe**, si $\forall x, y \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$

3. Une corde est une droite qui lie deux points.

L'équation de la droite qui lie les points $M(x_0, f(x_0))$ et $N(y_0, f(y_0))$ est

$$y = \frac{f(y_0) - f(x_0)}{y_0 - x_0}(x - y_0) + f(y_0)$$

(On connaît la pente, et on s'arrange pour que la droite passe par N).

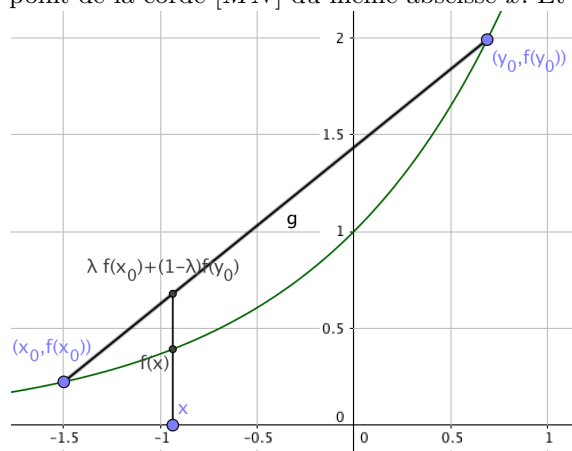
Soit $x \in [x_0, y_0]$, il existe $\lambda = \frac{y_0 - x}{y_0 - x_0} \in [0, 1]$ tel que $x = \lambda x_0 + (1 - \lambda)y_0$.

Sur la courbe $\mathcal{C}_f$, le point d'abscisse x a pour ordonnée $f(x)$.

Sur la corde $[MN]$, le point d'abscisse x a pour ordonnée :

$$\frac{f(y_0) - f(x_0)}{y_0 - x_0}(x - y_0) + f(y_0) = \frac{f(y_0) - f(x_0)}{y_0 - x_0}\lambda(x_0 - y_0) + f(y_0) = f(y_0) - \lambda(f(y_0) - f(x_0)) = \lambda f(x_0) + (1 - \lambda)f(y_0)$$

L'inégalité de convexité signifie donc : Sur la courbe $\mathcal{C}_f$, le point d'abscisse x a une ordonnée situé sous l'ordonnée du point de la corde $[MN]$ du même abscisse x . Et cela pour tout $x \in [x_0, y_0]$.



C'est pourquoi, on peut écrire « le graphe de f est au-dessous de toutes ses cordes »

Pour la suite de cette partie, f est supposée convexe.

4. Soient $a, b, c \in I, a < b < c$.

Remarquons que $\Delta_c(a) = \frac{f(a) - f(c)}{a - c} = \frac{f(c) - f(a)}{c - a} = \Delta_a(c)$

Comme f est convexe, on a $\underbrace{\Delta_a(b)}_{b < c} \leq \underbrace{\Delta_c(a)}_{a < b} = \Delta_c(b)$. Donc l'inégalité des trois pentes :

$$\forall a, b, c \in I, a < b < c \quad \frac{f(a) - f(b)}{a - b} \leq \frac{f(a) - f(c)}{a - c} \leq \frac{f(b) - f(c)}{b - c}$$

5. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Soient $x < y \in \mathbb{R}$.

$$\Delta_a(x) = \frac{x^2 - a^2}{x - a} = x + a \leq y + a = \frac{y^2 - a^2}{y - a} = \Delta_a(y)$$

Donc Δ_a est croissante, pour tout $a \in \mathbb{R}$.

$$f : x \mapsto x^2 \text{ est convexe sur } \mathbb{R}$$

B. Fonctions convexes dérivables

On suppose dans cette partie que $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe et dérivable sur I .

1. Soit $x_0, y_0 \in I$. On suppose que $x_0 < y_0$, on doit montrer que $f'(x_0) \leq f'(y_0)$.

Pour tout $x \in]x_0, y_0[$, comme f est convexe d'après l'inégalité des trois pentes :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(y_0) - f(x_0)}{y_0 - x_0} \leq \frac{f(y_0) - f(x)}{y_0 - x}$$

Donc en passant à la limite $x \rightarrow x_0$ (elle existe car f est dérivable en x_0) : $f'(x_0) \leq \frac{f(y_0) - f(x_0)}{y_0 - x_0}$.

De même avec $x \rightarrow y_0$ (elle existe car f est dérivable en y_0) : $f'(y_0) \geq \frac{f(y_0) - f(x_0)}{y_0 - x_0}$.

Donc $f'(x_0) \leq f'(y_0)$.

La fonction f' est croissante sur I

Remarques !

On n'est pas obligé de faire pour tout $x \rightarrow x_0$, mais on peut se contenter de $x \rightarrow x_0^+$, car on sait déjà que la limite existe, elle a une unique valeur : $f'(x_0)$.

En fait, on a démontré mieux, cela nous servira par la suite :

Si f est convexe, dérivable sur I et $x_0 < y_0$, alors $f'_d(x_0) \leq \frac{f(y_0) - f(x_0)}{y_0 - x_0} \leq f'_g(y_0)$

Réciproquement, supposons que f' est croissante sur I .

Soit $a \in I$ et Δ_a définie comme en partie A.

Δ_a est dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et pour tout $x \in I, x \neq a$:

$$\Delta'_a(x) = \frac{f'(x) \times (x - a) - [f(x) - f(a)]}{(x - a)^2}$$

Il suffit de démontrer que pour tout $x \neq a, \psi(x) := f'(x) \times (x - a) - [f(x) - f(a)] \geq 0$.

Supposons $x > a$. f' est croissante sur $[a, x]$, donc pour tout $t \in [a, x], f'(t) \leq f'(x)$.

En intégrant entre a et x : $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt \leq \int_a^x f'(x) dt = f'(x)(x - a)$ i.e. $\psi(x) \geq 0$

Supposons $x < a$. f' est croissante sur $[x, a]$, donc pour tout $t \in [x, a], f'(t) \geq f'(x)$.

En intégrant entre x et a : $f(a) - f(x) = \int_x^a f'(t) dt \geq \int_x^a f'(x) dt = f'(x)(a - x)$ i.e. $-\psi(x) \leq 0$

Dans tous les cas $\psi(x) \geq 0$.

La réciproque est vraie : si f est dérivable sur I et f' croissante, alors f est convexe

2. Supposons que f est convexe et dérivable, alors avec la fin de la remarque, on a :

$$\forall a < x, \quad f'(a) = f'_d(a) \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \implies f(x) \geq f'(a)(x - a) + f(a)$$

$$\forall x < a, \quad \frac{f(a) - f(x)}{a - x} \leq f'_g(a) = f'(a) \implies f(x) \geq f'(a)(x - a) + f(a)$$

Dans tous les cas : pour tout $x, a \in I, f(x) \geq f'(a)(x - a) + f(a)$

Réciproquement supposons que pour tout $x, a \in I, f(x) \geq f'(a)(x - a) + f(a)$

Soient $x, y \in I$ avec $x \leq y$.

Alors $f(x) \geq f'(y)(x - y) + f(y)$ et $f(y) \geq f'(x)(y - x) + f(x)$.

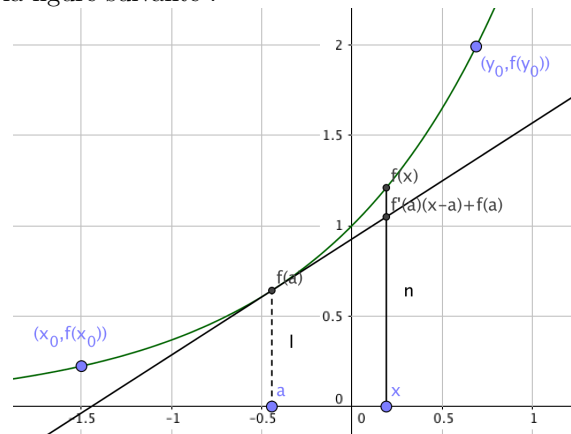
donc comme $x - y \leq 0$,

$$f'(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'(y)$$

Donc f' est croissante et f est convexe.

f est convexe et dérivable sur I si et seulement si pour tout $x, a \in I, f(x) \geq f'(a)(x - a) + f(a)$

Comme le montre la figure suivante :



Avec un tel résultat, on peut affirmer que « le graphe de f est au-dessus de toutes ses tangentes »

3. On suppose ici que f est de classe $\mathcal{C}^2$.

La croissance de f' est assurée par la positivité de f'' .

La réciproque est vraie, dès qu'on sait que f' est elle-même dérivable.

Si f est de classe $\mathcal{C}^2$, f est convexe sur I ssi $f'' \geq 0$ sur I

4. Exemples

- (a) f_1 est dérivable deux fois, et $\forall x \in \mathbb{R}, f_1^{(2)}(x) = \exp(x) > 0$.
Donc f_1' est croissante, donc

$f_1 : x \mapsto \exp(x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

- (b) De même, f_2 est dérivable deux fois, et $\forall x \in \mathbb{R}, f_2'(x) = -2x \exp(-x^2)$ et $f_2^{(2)}(x) = (-2 + 4x^2) \exp(-x^2) = 4(x - \frac{1}{\sqrt{2}})(x + \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Donc : $f_2^{(2)}(x) \geq 0 \iff x \in]-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}] \cup [\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty[$.

$f_2 : x \mapsto \exp(-x^2)$ est convexe sur $] -\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}] \cup [\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty[$.

- (c) Toujours avec la même méthode : $\sin$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, donc $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Et pour tout $x \in \mathbb{R}, \sin''(x) = -\sin(x)$.

Ainsi, on a l'équivalence :

$$\sin^{(2)}(x) \geq 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x \in [(2k-1)\pi, 2k\pi]$$

L'intervalle le plus grand contenant 0 de la forme $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$ est obtenu pour $k = 0$.

La fonction $\sin$ est donc convexe sur intervalles de la forme $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$ ($k \in \mathbb{Z}$), le plus grand contenant 0 est $[-\pi, \pi]$

C. Inégalités

On suppose dans cette partie que $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe sur I .

1. Nous allons faire un raisonnement par récurrence sur n .

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, définissons $\mathcal{P}_n$ de la façon suivante :

$$\mathcal{P}_n : \ll \text{si } (x_i) \in I^n \text{ et } (\alpha_i) \in [0, 1]^n \text{ tel que } \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \text{ alors } \sum_{i=1}^n f(\alpha_i x_i) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i) \gg$$

- $\mathcal{P}_1$ est vraie, il faut dans ce cas considérer $\alpha_1 = 1$ et donc on a à comparer $f(1x_1)$ avec $1f(x_1)$.
- $\mathcal{P}_2$ est vraie, c'est la définition de la convexité.
Mais on a pas besoin de ce fait ici. On exploitera ce résultat dans l'hérédité.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Soient $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \in I$ et $(\alpha_i) \in [0, 1]^{n+1}$ tel que $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1$.

Notons $\lambda = \alpha_{n+1}$, on a alors $1 - \lambda = 1 - \alpha_{n+1} = \sum_{i=1}^n \alpha_i$.

On note également $X = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i}{1 - \alpha_{n+1}}$ et $Y = x_{n+1}$.

Remarquons que $Y \in I$ car $Y = x_{n+1} \in I$, mais aussi $X \in I$.

En effet : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \min(x_k) \leq x_i \leq \max(x_k)$.

En multipliant par $\alpha_i \geq 0$ et en additionnant :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \min(x_k) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i \max(x_k) \text{ donc } \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right) \min(x_k) \leq \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right) X \leq \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right) \max(x_k)$$

Donc : $\min x_k \leq X \leq \max x_k$.

On peut appliquer l'inégalité de définition à f convexe :

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i\right) = f(\lambda Y + (1-\lambda)X) \leq \lambda f(Y) + (1-\lambda)f(X) = \alpha_{n+1} f(x_{n+1}) + (1-\lambda) f\left(\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{1-\lambda} x_i\right)$$

Ensuite, on applique l'hypothèse de récurrence à $(x_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ et $(\alpha'_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ avec $\alpha'_i = \frac{\alpha_i}{1-\lambda}$.

On le peut car $\sum_{i=1}^n \alpha'_i = \frac{1}{1-\lambda} \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$.

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i\right) \leq \alpha_{n+1} f(x_{n+1}) + (1-\lambda) \times \left(\sum_{i=1}^n \alpha'_i f(x_i)\right) = \alpha_{n+1} f(x_{n+1}) + \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i f(x_i)$$

Ainsi, par récurrence, on a démontré :

pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, si $(x_i) \in I^n$ et $(\alpha_i) \in [0, 1]^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, alors $\sum_{i=1}^n f(\alpha_i x_i) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i)$
--

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $\exp$ est convexe. On considère $\alpha_i = \frac{1}{n}$ et $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.

$$\left(\prod_{i=1}^n e^{x_i}\right)^{1/n} = \exp\left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n}\right) \leq \sum_{i=1}^n \frac{e^{x_i}}{n}$$

Donc en considérant $t_k \in \mathbb{R}_+$ et $x_k = \ln(t_k)$ i.e. $t_k = e^{x_k}$

$\forall t_1, t_2, \dots, t_n > 0, \quad \sqrt[n]{t_1 t_2 \cdots t_n} \leq \frac{t_1 + t_2 + \cdots + t_n}{n}$
--

3. On a $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soient $u, v \in \mathbb{R}_+^*$, on note $U = \ln u$ i.e. $e^U = u$ et $V = \ln v$ i.e. $e^V = v$, par convexité de $\exp$:

$$u^{1/p} v^{1/q} = \exp\left(\frac{1}{p} U\right) \times \exp\left(\frac{1}{q} V\right) = \exp\left(\frac{1}{p} U + \frac{1}{q} V\right) \leq \frac{1}{p} e^U + \frac{1}{q} e^V = \frac{1}{p} u + \frac{1}{q} v$$

En composant avec $\exp$, fonction strictement croissante :

$$\frac{1}{p} u + \frac{1}{q} v \leq \ln\left(\frac{1}{p} e^u + \frac{1}{q} e^v\right)$$

Soient $(a_i), (b_i) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$. Considérons alors $u_i = \frac{a_i^p}{\sum_{k=1}^n a_k^p} > 0$ et $v_i = \frac{b_i^q}{\sum_{v=1}^n b_v^q} > 0$.

$$u_i^{1/p} v_i^{1/q} \leq \frac{1}{p} u_i + \frac{1}{q} v_i \implies \frac{a_i}{\left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{1/p}} \frac{b_i}{\left(\sum_{k=1}^n b_k^q\right)^{1/q}} \leq \frac{1}{p} \frac{a_i^p}{\sum_{k=1}^n a_k^p} + \frac{1}{q} \frac{b_i^q}{\sum_{v=1}^n b_v^q}$$

En sommant ces inégalités, pour i de 1 à n :

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i b_i}{\left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n b_k^q\right)^{1/q}} \leq \frac{1}{p} \frac{\sum_{i=1}^n a_i^p}{\sum_{k=1}^n a_k^p} + \frac{1}{q} \frac{\sum_{i=1}^n b_i^q}{\sum_{v=1}^n b_v^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Et donc, pour finir par manipulation classique on a l'inégalité de HÖLDER

$\forall p, q \in \mathbb{R}_+^* \text{ tels que } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \forall (a_i), (b_i) \in (\mathbb{R}_+^*)^n \quad \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{1/q}$
--