MPSI 3 - Fermat
2017-2018

Le 07.11.17

# Devoir à la maison n°4
CORRECTION

---

## Exercice

On considère l'ensemble $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites numériques **non nulles à partir d'un certain rang**.
On définit deux relations sur cet ensemble :

$$(u_n) \sim (v_n) \Longleftrightarrow \lim \frac{u_n}{v_n} = 1 \qquad \text{et} \qquad (u_n) = o\big((v_n)\big) \Longleftrightarrow \lim \frac{u_n}{v_n} = 0$$

1. (a) En trois temps :
   — Soit $(u_n)$ non nulle à partir d'un certain rang $n_0$,
   pour tout $n \geqslant n_0$, $\frac{u_n}{u_n} = 1$, donc $\lim \dfrac{u_n}{u_n} = 1$ et ainsi $(u_n) \sim (u_n)$.
   La relation est donc reflexive.
   — Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ non nulle à partir d'un certain rang $n_0$ et telles que $(u_n) \sim (v_n)$
   pour tout $n \geqslant n_0$, $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = 1$, donc $\lim \dfrac{v_n}{u_n} = \dfrac{1}{\lim \dfrac{u_n}{v_n}} = \dfrac{1}{1} = 1$ et ainsi $(v_n) \sim (u_n)$.
   La relation est donc symétrique.
   — Soient $(u_n)$, $(v_n)$ et $(w_n)$ non nulle à partir d'un certain rang $n_0$ et telles que $(u_n) \sim (v_n)$ et $(v_n) \sim (w_n)$
   pour tout $n \geqslant n_0$, $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = 1$ et $\lim \dfrac{v_n}{w_n} = 1$, donc $\lim \dfrac{u_n}{w_n} = \lim \dfrac{u_n}{v_n} \times \lim \dfrac{v_n}{w_n} = 1 \times 1 = 1$ et ainsi $(u_n) \sim (w_n)$.
   La relation est donc transitive.

   $\boxed{\sim \text{ est donc bien une relation d'équivalence définie sur } E.}$

   (b) Par exemple $\dfrac{n^2 + 4n - 1}{n^2} \to 1$, donc $(n^2 + 4n - 1) \sim (n^2)$.
   Ou encore $\dfrac{n^2 + \ln(n)}{n^2} \to 1$, donc $(n^2 + \ln(n)) \sim (n^2)$.

2. (a) Ce n'est pas une relation d'ordre, car $= o(\cdot)$ n'est en particulier par réflexive.
   Elle est seulement transitive : Soient $(u_n)$, $(v_n)$ et $(w_n)$ non nulle à partir d'un certain rang $n_0$ et telles que $(u_n) = o\big((v_n)\big)$ et $(v_n) = o\big((w_n)\big)$
   pour tout $n \geqslant n_0$, $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = 0$ et $\lim \dfrac{v_n}{w_n} = 0$, donc $\lim \dfrac{u_n}{w_n} = \lim \dfrac{u_n}{v_n} \times \lim \dfrac{v_n}{w_n} = 0 \times 0 = 0$ et ainsi $(u_n) = o\big((w_n)\big)$.
   La relation est donc transitive.

   $\boxed{= o(\cdot) \text{ est donc bien une relation transitive, qui n'est pas une relation d'ordre sur } E.}$

   **Remarques !**
   *En fait il s'agit d'une relation d'ordre strict.*
   *En effet, la relation $\underline{\underline{o}}(\,\cdot\,)$ définie par :*

   $$(u_n)\underline{\underline{o}}\big((v_n)\big) \Longleftrightarrow (u_n) = o\big((v_n)\big) \text{ ou } (u_n) = (v_n)$$

   *est une relation d'ordre. En effet, par construction elle est réflexive et antisymétrique.*

   (b) Elle n'est pas totale, en particulier elle n'est pas reflexive.

   (c) Par exemple $(b_n) = (n - 1)$ et $(c_n) = (n^3 - 2n)$, on

   $$\lim \frac{b_n}{a_n} = \lim \frac{n-1}{n^2} = 0 \qquad \lim \frac{a_n}{c_n} = \lim \frac{n^2}{n^3 - 2n} = 0$$

   $\boxed{\text{Ainsi } (b_n) = o\big((a_n)\big) \text{ et } (a_n) = o\big((c_n)\big).}$

**Remarques !**

*En fait on définit ainsi une sorte d'échelle ou de niveau par la relation d'ordre stricte.*
*On pourrait alors penser que les classes d'équivalence serait les étages de cet échelle.*
*Et c'est presque vrai...mais la question suivante montre qu'il faut être un peu moins strict dans nos classes d'équivalence et donc dans la relation d'équivalence à considérer. Il faudrait prendre :* $=O(\cdot)$.

3.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Non, par exemple avec } (u_n)=(n^2) \text{ et } (v_n)=(2n^2), \text{ on n'a pas} \\ (u_n)\sim(v_n) \qquad \text{ou} \qquad (u_n)=o\big((v_n)\big) \qquad \text{ou} \qquad (v_n)=o\big((u_n)\big)\end{array}}$$

## Problème

Ici on reprend (notations...) ce qui a été vu dans le problème du devoir surveillé n°2. On rappelle les notations/définitions :

$$\sigma = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1-r^4}} \tag{1}$$

$$F(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1-r^4}} \tag{2}$$

Et $\mathtt{sl}$ est le prolongement à $\mathbb{R}$, par symétrie puis $2\sigma$-périodicité de $F^{-1}$.

### III. Equation différentielle et trigonométrie lemniscatique.

1. On a montré en partie 2 : $\forall\, u \in \mathbb{R}$, $\mathtt{sl}'(u) = \pm\sqrt{1-\mathtt{sl}^4(u)}$.
Et donc$\mathtt{sl}'$ est de classe $\mathcal{C}^1$, puisque $u \mapsto \sqrt{1-u^4}$ et $\mathtt{sl}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ et par composition.

$$\boxed{\text{On a alors } \mathtt{sl} \text{ est de classe } \mathcal{C}^2}$$

En outre, $\forall\, u \in [-\sigma,\sigma]$,

$$\mathtt{sl}''(u) = \frac{-4\mathtt{sl}'(u)\mathtt{sl}^3(u)}{2\sqrt{1-\mathtt{sl}^4(u)}} = -2\mathtt{sl}^3(u)$$

De même, $\forall\, u \in [\sigma, 3\sigma]$,

$$\mathtt{sl}''(u) = \frac{-[-4\mathtt{sl}'(u)\mathtt{sl}^3(u)]}{2\sqrt{1-\mathtt{sl}^4(u)}} = -2\mathtt{sl}^3(u)$$

Dans tout les cas

$$\boxed{\mathtt{sl} \text{ vérifie l'équation différentielle suivante sur } \mathbb{R},\ \mathtt{sl}''(x)+2\mathtt{sl}^3(x)=0}$$

Soit $f$ une solution de (3) sur $\mathbb{R}$.

2. $f$ étant de classe $\mathcal{C}^2$, nécessairement, $H$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad H'(x) = 2f''(x)f'(x) + 4f'(x)f^3(x) = 2f'(x)[f''(x)+2f^3(x)] = 2f'(x)\times 0 = 0$$

$$\boxed{\text{Donc } H \text{ est constante sur } \mathbb{R}. \text{ On note encore } H \text{ cette constante.}}$$

On choisit désormais de considérer le cas où $H>0$, et on définit la fonction $\varphi$ par

$$\varphi(x) = F(H^{-1/4}f(x)) \tag{5}$$

où $F$ a été définie à la formule (2).

3. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\big(H^{-1/4}f(x)\big)^4 = \dfrac{f^4(x)}{H} = \frac{f(x)^4}{f'(x)^2+f(x)^4} \in [0,1]$.
Et donc $H^{-1/4}f(x) \in [-1,1]$

$$\boxed{\varphi \text{ est donc bien continue sur } \mathbb{R}}$$

4. $F$ étant dérivable sur $]-1,1[$, $\varphi$ sera dérivable (à dérivée continue) en tout point $x$ tel que $H^{-1/4}f(x) \in ]-1,1[$,
et donc, d'après les calculs précédents,

$$\boxed{\varphi \text{ est dérivable en tout } x \text{ tel que } f'(x)^2>0}$$

Soit $]\alpha,\beta[$ un intervalle où $f'$ ne s'annule pas. On vient de justifier que $\varphi \in \mathcal{C}^1(]\alpha,\beta[)$ et les théorèmes d'opérations donnent, après calcul,

$$\forall\ x \in ]\alpha,\beta[,\ \varphi'(x) = H^{1/4}\frac{f'(x)}{|f'(x)|} = \text{signe}(f'(x))H^{1/4}$$

Par théorème des valeurs intermédiaires (appliquées à $f'$), $f'$ est de signe constant sur $]\alpha,\beta[$ (elle ne s'annule pas).
On distingue deux cas

— Si $\forall\ x \in ]\alpha,\beta[,\ f'(x) > 0$ alors $\forall\ x \in ]\alpha,\beta[,\ \varphi'(x) = H^{1/4}$.
Il existe donc une constante $b$ telle que $\forall\ x \in ]\alpha,\beta[,\ F(H^{-1/4}f(x)) = \varphi(x) = H^{1/4}x + b$.
En particulier, $H^{1/4}x + b$ est dans $[-\sigma,\sigma]$ et en composant par $F^{-1}$ on obtient

$$\forall\ x \in ]\alpha,\beta[,\ f(x) = H^{1/4}F^{-1}(H^{1/4}x + c) = H^{1/4}\mathtt{sl}(H^{1/4}x + b)$$

— Si $\forall\ x \in ]\alpha,\beta[,\ f'(x) < 0$ alors $\forall\ x \in ]\alpha,\beta[,\ \varphi'(x) = -H^{1/4}$.
Il existe donc une constante $c$ telle que $\forall\ x \in ]\alpha,\beta[,\ F(H^{-1/4}f(x)) = \varphi(x) = -H^{1/4}x + c$.
En particulier, $-H^{1/4}x + c)$ est dans $[-\sigma,\sigma]$ et en composant par $F^{-1}$ on obtient

$$\forall\ x \in ]\alpha,\beta[,\ f(x) = H^{1/4}F^{-1}(-H^{1/4}x + c) = H^{1/4}\mathtt{sl}(-H^{1/4}x + c)$$

Pour $y \in [-\sigma,\sigma]$, on a $\mathtt{sl}(2\sigma - y) = \mathtt{sl}(y)$. En posant $b = 2\sigma - c$, on obtient alors

$$\underline{\forall x \in ]\alpha,\beta[,\ f(x) = H^{1/4}\mathtt{sl}(H^{1/4}x + b)}$$

On admet que **pour toute solution $f$ de l'équation différentielle** (5)**,**
**il existe une constante $b \in \mathbb{R}$ telle que** $\underline{\forall\ x \in \mathbb{R}}$ **,** $f(x) = H^{1/4}\mathtt{sl}(H^{1/4}x + b)$

**Remarques !**
*Dans la version originale du sujet, ce résultat (le plus difficile du sujet) est à démontrer.*
*Mais aujourd'hui, nous n'avons vraiment pas les moyens de le faire.*

La fonction $\mathtt{cl}$ est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\mathtt{cl}(x) = \frac{\mathtt{sl}'(x)}{1 + \mathtt{sl}^2(x)} \tag{7}$$

5. D'après les questions II.1. $\mathtt{sl}$ vérifie les mêmes propriétés que $f$
et donc d'après II.2, $\mathtt{sl}'(x)^2 + \mathtt{sl}(x)^4$ est une quantité constante.
Comme $\mathtt{sl}(0) = 0$ et $\mathtt{sl}'(0) = 1$, la valeur de cette constante est 1 et donc

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\quad \mathtt{sl}'^2(x) = 1 - \mathtt{sl}^4(x) = (1 - \mathtt{sl}^2(x))(1 + \mathtt{sl}^2(x))$$

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ \mathtt{cl}^2(x) = \frac{\mathtt{sl}'^2(x)}{(1 + \mathtt{sl}^2(x))^2} = \frac{1 - \mathtt{sl}^2(x)}{1 + \mathtt{sl}^2(x)}$$

Par conséquent :

$$\boxed{\forall\ x \in \mathbb{R},\ \mathtt{cl}^2(x)(1 + \mathtt{sl}^2(x)) = 1 - \mathtt{sl}^2(x) \Longrightarrow \mathtt{sl}^2(x) + \mathtt{cl}^2(x) = 1 - \mathtt{sl}^2(x)\mathtt{cl}^2(x)}$$

6. Dérivons $\mathtt{cl}$ (de classe $\mathcal{C}^2$ car $\mathtt{sl}$ est $\mathcal{C}^\infty$, à partir de sa définition ;
$\forall\ x \in \mathbb{R}$ :

$$\mathtt{cl}'(x) = \frac{\mathtt{sl}''(x)(1 + \mathtt{sl}^2(x)) - 2\mathtt{sl}(x)\mathtt{sl}'^2(x)}{(1 + \mathtt{sl}^2(x))^2} = \frac{\mathtt{sl}''(x)(1 + \mathtt{sl}^2(x)) - 2\mathtt{sl}(x)(1 - \mathtt{sl}^4(x))}{(1 + \mathtt{sl}^2(x))^2}$$

$$= \frac{-2\mathtt{sl}^3(x)(1 + \mathtt{sl}^2(x)) - 2\mathtt{sl}(x)(1 - \mathtt{sl}^2(x))(1 + \mathtt{sl}^2(x))}{(1 + \mathtt{sl}(x)^2)^2} = \frac{-2\mathtt{sl}^3(x) - 2\mathtt{sl}(x)(1 - \mathtt{sl}^2(x))}{(1 + \mathtt{sl}(x)^2)}$$

$$\boxed{\forall\ x \in \mathbb{R},\qquad \mathtt{cl}'(x) = -\frac{2\mathtt{sl}(x)}{1 + \mathtt{sl}(x)^2}}$$

On peut alors dériver de nouveau

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\quad \mathtt{cl}''(x) = \frac{-2\mathtt{sl}'(x) + 2\mathtt{sl}^2(x)\mathtt{sl}'(x)}{(1 + \mathtt{sl}^2(x))^2} = \frac{2\mathtt{sl}'(x)(\mathtt{sl}^2(x) - 1)}{(1 + \mathtt{sl}^2(x))^2}$$

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\quad \mathtt{cl}''(x) = -\frac{2\mathtt{sl}'(x)}{1 + \mathtt{sl}(x)^2} \times \frac{1 - \mathtt{sl}^2(x)}{1 + \mathtt{sl}^2(x)} = -2\mathtt{cl}(x)^3$$

Ainsi

$$\boxed{\mathtt{cl} \text{ est solution de l'équation différentielle (3)}}$$

7. D'après le résultat admis, il existe une constante $b$ telles que

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathtt{cl}(x) = \mathtt{sl}(x+b)$$

puisque la constante $H$ associée à $\mathtt{cl}$ est $\mathtt{cl}'(0)^2 + \mathtt{cl}(0)^4 = 1$.
Appliquée en $x = 0$, cette égalité donne $\mathtt{sl}(b) = 1$ et donc $b = \sigma + 4k\sigma$ $(k \in \mathbb{Z})$.
Par $4\sigma$-périodicité de $\mathtt{sl}$ et avec la symétrie par rapport à $x = \sigma$, on a ainsi

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathtt{cl}(x) = \mathtt{sl}(x+\sigma) = \mathtt{sl}(\sigma - x)}$$

On définit la fonction $G$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par

$$G(x,y) = \frac{\mathtt{sl}(x)\mathtt{sl}'(y) + \mathtt{sl}(y)\mathtt{sl}'(x)}{1 + \mathtt{sl}^2(x)\mathtt{sl}^2(y)}$$

8. On a, en dérivant par rapport à la première et la seconde variable $(1+\mathtt{sl}^2(x)\mathtt{sl}^2(y))G(x,y) = \dots$

$$(1+\mathtt{sl}^2(x)\mathtt{sl}^2(y))\frac{\partial G}{\partial x}(x,y) + 2\mathtt{sl}(x)\mathtt{sl}'(x)\mathtt{sl}^2(y)G(x,y) = \mathtt{sl}'(x)\mathtt{sl}'(y) + \mathtt{sl}(y)\mathtt{sl}''(x)$$

$$(1+\mathtt{sl}^2(x)\mathtt{sl}^2(y))\frac{\partial G}{\partial y}(x,y) + 2\mathtt{sl}(y)\mathtt{sl}'(y)\mathtt{sl}^2(x)G(x,y) = \mathtt{sl}'(x)\mathtt{sl}'(y) + \mathtt{sl}(x)\mathtt{sl}''(y)$$

La soustraction donne :

$$(1+\mathtt{sl}^2(x)\mathtt{sl}^2(y))\left(\frac{\partial G}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial G}{\partial y}(x,y)\right) + 2\mathtt{sl}(x)\mathtt{sl}(y)\big(\mathtt{sl}'(x)\mathtt{sl}(y) - \mathtt{sl}'(y)\mathtt{sl}(x)\big)G(x,y)$$

$$= \mathtt{sl}(y)\mathtt{sl}''(x) - \mathtt{sl}(x)\mathtt{sl}''(y) = 2\mathtt{sl}(y)\mathtt{sl}(x)\big(\mathtt{sl}^2(y) - \mathtt{sl}^2(x)\big)$$

Ainsi

$$(1+\mathtt{sl}^2(x)\mathtt{sl}^2(y))^2\left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial G}{\partial y}\right)(x,y) = 2\mathtt{sl}(x)\mathtt{sl}(y)\Big[\big(\mathtt{sl}^2(y) - \mathtt{sl}^2(x)\big) - \big(\mathtt{sl}'(x)\mathtt{sl}(y) - \mathtt{sl}'(y)\mathtt{sl}(x)\big)G(x,y)\Big](1+\mathtt{sl}^2(x)\mathtt{sl}^2(y))$$

$$= 2\mathtt{sl}(x)\mathtt{sl}(y)\Big[\big(\mathtt{sl}^2(y) - \mathtt{sl}^2(x)\big)(1+\mathtt{sl}^2(x)\mathtt{sl}^2(y)) - \big(\mathtt{sl}'^2(x)\mathtt{sl}^2(y) - \mathtt{sl}'^2(y)\mathtt{sl}^2(x)\big)\Big]$$

Or on sait que $\mathtt{sl}'(x)^2 = 1 - \mathtt{sl}(x)^4$, on vérifie que cette égalité est nulle et donc

$$\boxed{\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial G}{\partial y}}$$

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $h\ :\ x \mapsto G(x, a-x)$.
$h$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = \frac{\partial G}{\partial x}(x, a-x) - \frac{\partial G}{\partial y}(x, a-x) = 0$.
$h$ est donc constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$. i.e.

$$\boxed{G \text{ est constante le long de la droite d'équation } x + y = a}$$

9. En particulier, pour tout $a$ et tout $t$, $G(t, a-t) = G(0,a) = \mathtt{sl}(a)$.
Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, en prenant $t = x$ et $a = x + y$, on obtient

$$\boxed{G(x,y) = \mathtt{sl}(x+y)}$$

En utilisant l'expression de $G(x,y)$ et la relation $\mathtt{sl}'(x) = (1+\mathtt{sl}(x)^2)\mathtt{cl}(x)$, on obtient alors

$$\boxed{\mathtt{sl}(x+y) = \frac{\mathtt{sl}(x)(1+\mathtt{sl}(y)^2)\mathtt{cl}(y) + \mathtt{sl}(y)(1+\mathtt{sl}(x)^2)\mathtt{cl}(x)}{1+\mathtt{sl}(x)^2\mathtt{sl}(y)^2}}$$